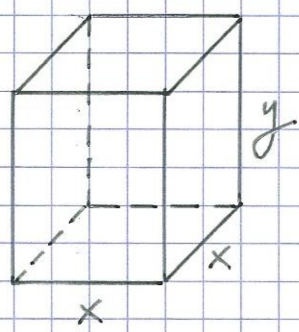
## Exercices de préparation à l'examen de maths 3 de juin 2015

### Problème 1




On cherche la formule pour calculer la perte de chaleur :

plafond : $x^2 \cdot 3 = 3x^2$

4 faces latérales : $xy \cdot 4 = 4xy$

$\Rightarrow$ perte de chaleur $= 3x^2 + 4xy$.

Comme on a 2 lettres dans cette formule, on cherche à supprimer $y$ pour n'avoir que du $x$. On sait que le volume de la maison est $768\ m^3$.

On a donc $x^2 y = 768 \Rightarrow y = \frac{768}{x^2}$.

La perte de chaleur s'écrit donc $3x^2 + 4x\frac{768}{x^2} = 3x^2 + \frac{3072}{x}$.

On doit donc chercher le minimum de $f(x) = 3x^2 + \frac{3072}{x}$.

La dérivée de $x^2$ étant $2x$ et celle de $\frac{1}{x}$ étant $-\frac{1}{x^2}$, on a

$f'(x) = 6x - \frac{3072}{x^2}$.

Ainsi $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - \frac{3072}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x = \frac{3072}{x^2} \Rightarrow 6x^3 = 3072$

$\Rightarrow x^3 = 512 \Rightarrow x = 8$.

On vérifie que $x = 8$ donne bien un minimum pour $f$ en faisant un tableau de variation :

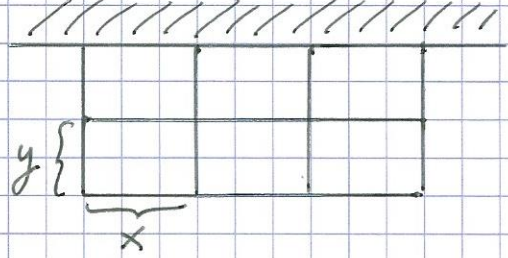
| $x$ | | 8 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$x = 7 \rightarrow f'(7) < 0 \qquad x = 9 \rightarrow f'(9) > 0$

De plus, avec $x = 8$, on a $y = \frac{768}{x^2} = \frac{768}{8^2} = 12$.

Les dimensions doivent donc être : base $= 8\text{m}$ sur $8\text{m}$, hauteur $= 12\text{m}$.

Problème 2.




Surface d'un enclos $= x \cdot y$.

Autre info : on a 288 m de clôture $\Rightarrow 6x + 8y = 288$

$\Rightarrow 8y = 288 - 6x \Rightarrow y = 36 - 0{,}75x$

Donc : surface d'un enclos $= x(36 - 0{,}75x) = 36x - 0{,}75x^2$.

On doit chercher le maximum de $f(x) = 36x - 0{,}75x^2$.

On a $f'(x) = 36 - 1{,}5x$ ; $f'(x) = 0 \Rightarrow 36 - 1{,}5x = 0 \Rightarrow 1{,}5x = 36$

$\Rightarrow x = 24$.

De plus, $f''(x) = -1{,}5$ et on a $f''(24) < 0$, ce qui assure que $x = 24$ correspond bien à un maximum.

Avec $x = 24$, on a $y = 36 - 0{,}75x = 36 - 0{,}75 \cdot 24 = 18$.

Les dimensions d'un enclos doivent donc être : longueur = 24 m et largeur = 18 m.

Problème 3

a) Pour Aline, il s'agit d'une progression arithmétique :

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, où $a_1$ est le salaire de la 1e année (48'000), n la ne année (6 puisque c'est 5 ans après la 1e année) et r la raison (600.-)

$\Rightarrow$ après 5 ans, Aline aura donc $a_6 = 48'000 + (6-1) \cdot 600$
$= \underline{51'000.-}$

Pour Jacques, il s'agit d'une progression géométrique :

$g_n = q^{n-1} \cdot g_1$, où $g_1$ est le salaire de la 1e année (40'000), n la ne année (6 puisque 1+5) et q la raison ($100\% + 1{,}5\% = 101{,}5\% = 1{,}015$)

$\Rightarrow$ après 5 ans, Jacques aura donc $g_6 = 1{,}015^5 \cdot 40'000$
$= \underline{\underline{43'091{,}36}}$

b) Pour Aline: $a_n > 70'000 \Rightarrow 48'000 + (n-1) \cdot 600 > 70'000$ | $-48'000$

$$(n-1) \cdot 600 > 22'000 \quad | :600$$
$$n-1 > 36{,}\overline{6} \quad | +1$$
$$n > 37{,}\overline{6}$$

Ça sera donc la 38$^e$ année, soit en $2014 + 37 = \underline{\underline{2051}}$.

Pour Jacques: $g_n > 70'000 \Rightarrow 1{,}015^{n-1} \cdot 40'000 > 70'000$ | $:40'000$

$$1{,}015^{n-1} > 1{,}75 \quad | \ln(\ldots)$$
$$\ln(1{,}015^{n-1}) > \ln(1{,}75) \quad | \ln(a^n) = n\ln(a)$$
$$(n-1)\ln(1{,}015) > \ln(1{,}75) \quad | :\ln(1{,}015)$$
$$n-1 > \frac{\ln(1{,}75)}{\ln(1{,}015)} \cong 37{,}59 \quad | +1$$
$$n > 38{,}59$$

Ça sera donc la 39$^e$ année, soit en $2014 + 38 = \underline{\underline{2052}}$.

c) Pour Aline: on a $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r$ avec $n = 10$

$$\Rightarrow S_n = 10 \cdot 48'000 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 600 = \underline{\underline{507'000.-}}$$

Pour Jacques: on a $S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot g_1$ avec $n = 10$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1{,}015^{10} - 1}{1{,}015 - 1} \cdot 40'000 = \underline{\underline{428'108{,}87}}$$

## Problème 4

C'est une progression géométrique de raison $q = 100\% + 1{,}25\% = 101{,}25\%$ $= 1{,}0125$ avec $g_1 = 25'000$.

a) Le 1er janvier 2009 correspond au début de la 4e année et on a donc $n = 4$.

Ainsi $g_4 = q^{n-1} \cdot g_1 = 1{,}025^{4-1} \cdot 25'000 = \underline{\underline{25'949 \text{ habitants}}}$.

b) Lorsqu'on doit chercher le taux de croissance, il correspondra à $q-1$. On a ici $g_1 = 32'000$ et $g_5 = 33'300$ avec $n = 5$.

Ainsi : $g_n = q^{n-1} \cdot g_1 \Rightarrow 33'300 = q^{5-1} \cdot 32'000 \quad \Big| : 32'000$

$$1{,}040625 = q^4 \quad \Big| \sqrt[4]{\phantom{x}}$$

$$1{,}01 = q$$

Le taux de croissance est donc $q-1 = 1{,}01 - 1 = 0{,}01 = \underline{\underline{1\%}}$.

c) 1e ville : $g_n = 1{,}0125^{n-1} \cdot 25'000$

2e ville : $g_n' = 1{,}01^{n-1} \cdot 32'000$

Même nombre d'habitants : $g_n = g_n' \Rightarrow 1{,}0125^{n-1} \cdot 25'000 = 1{,}01^{n-1} \cdot 32'000$

$$\Rightarrow \frac{1{,}0125^{n-1}}{1{,}01^{n-1}} = \frac{32'000}{25'000} \Rightarrow \left(\frac{1{,}0125}{1{,}01}\right)^{n-1} = 1{,}28$$

$$\Rightarrow 1{,}002475^{n-1} = 1{,}28 \Rightarrow n-1 = \frac{\ln(1{,}28)}{\ln(1{,}002475)} = 99{,}85$$

$$\Rightarrow n = 100{,}85 \Rightarrow \underline{\underline{\text{dans } 100 \text{ ans}}}.$$