# Exercices de préparation à l'examen de maths 3 de juin 2015 — Version 2

## Exercice 1

a) L'équation de la droite d est de la forme $y = mx + h$ où m est la pente et vaut donc $\frac{2-0,5}{4-0} = \frac{1,5}{4} = 0,375$ et h est l'ordonnée à l'origine et vaut 0,5. L'équation de d est donc $\underline{\underline{y = 0,375x + 0,5}}$.

b) Les dimensions du rectangle sont $4-x$ et $0,375x+0,5$.

Son aire est donc $(4-x)\cdot(0,375x+0,5) = 1,5x + 2 - 0,375x^2 - 0,5x$

$= -0,375x^2 + x + 2.$

Il faut chercher le maximum de la fonction $f(x) = -0,375x^2 + x + 2$.

On a $f'(x) = -0,75x + 1$ et $f'(x) = 0 \Rightarrow -0,75x + 1 = 0$

$\Rightarrow 0,75x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{0,75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}.$

Les dimensions du rectangle d'aire maximale sont donc $4 - \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

et $0,375\cdot\frac{4}{3} + 0,5 = \underline{\underline{1}}.$

c) On a $f''(x) = -0,75$. Comme $f''\left(\frac{4}{3}\right) = -0,75 < 0$, on est sûr que $x = \frac{4}{3}$ est un maximum.

## Exercice 2

La matière utilisée pour la fabrication de la boîte correspond à l'aire des faces, donc de la base et des 4 faces latérales.

Cette aire s'écrit $2x\cdot x + 2\cdot 2x\cdot h + 2x\cdot h = 2x^2 + 4xh + 2xh$

$= 2x^2 + 6xh.$

On sait que le volume de la boîte vaut $972\ cm^3$. On a donc $2x\cdot x\cdot h = 972$

$\Rightarrow 2x^2h = 972 \Rightarrow x^2h = 486 \Rightarrow h = \frac{486}{x^2}.$

Ainsi l'aire s'écrit $f(x) = 2x^2 + 6x\cdot\frac{486}{x^2} = 2x^2 + \frac{2916}{x}.$

On doit chercher le minimum de cette fonction et donc résoudre $f'(x)=0$.

Comme $(x^2)'=2x$ et $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, on a

$$f'(x)=2\cdot 2x+2916\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=4x-\frac{2916}{x^2}.$$

On a $f'(x)=0 \Longrightarrow 4x-\frac{2916}{x^2}=0 \Longrightarrow 4x=\frac{2916}{x^2}$

$\Longrightarrow 4x^3=2916 \Longrightarrow x^3=729 \Longrightarrow x=9$

Pour être sûr qu'on a bien là un minimum, on fait un tableau de variation :

| $x$ | | $9$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$x=8$ : $f'(8)=4\cdot 8-\frac{2916}{8^2}<0$

$x=10$ : $f'(10)=4\cdot 10-\frac{2916}{10^2}>0$

L'aire est donc bien minimum en $x=9$.

Les dimensions correspondantes sont donc $x=\underline{\underline{9\text{ cm}}}$, $2x=\underline{\underline{18\text{ cm}}}$ et

$$h=\frac{486}{x^2}=\frac{486}{9^2}=\underline{\underline{6\text{ cm}}}.$$

Exercice 3

a) On a ici une progression arithmétique :

$a_1=200$, $a_2=240$, $a_3=280$, etc. La raison est $r=40$

On considère les sommes $S_n$ : $S_n=n\cdot a_1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot r$.

Un retard de 30 jours correspond donc à $n=30$ et le coût pour l'entreprise est $S_{30}=30\cdot 200+\frac{30\cdot 29}{2}\cdot 40=\underline{\underline{23'400.-}}$

b) Cherchons $n$ tel que $S_n=50'000$.

On doit donc résoudre $n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot r=50'000$

$\Longrightarrow n\cdot 200+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 40=50'000$

$$\Rightarrow 200n + 20n(n-1) = 50'000 \Rightarrow 200n + 20n^2 - 20n = 50'000$$

$$\Rightarrow 20n^2 + 180n - 50'000 = 0 \Rightarrow n^2 + 9n - 2500 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 10'000}}{2} = \frac{-9 \pm 100,4}{2} = \begin{cases} 45,7 \\ -54,7. \end{cases}$$

Comme le cas $-54,7$ est exclu, on trouve $n = 45,7$ et on conclut que l'entreprise ne doit pas dépasser <u>45 jours</u> de retard.

<u>Exercice 4</u>

a) On est dans la situation de la progression d'un capital avec intérêts et capitalisation. Après $n$ années, le montant obtenu est donné par $S_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t} \cdot A$, où $t = 4,25\% = 0,0425$ est le taux d'intérêts annuel et $A = 50'000$ est l'augmentation annuel du capital effectué en fin d'année après le versement des intérêts.
Ici, l'augmentation annuel du capital est effectué en début d'année et on devra donc le déduire si on regarde la situation en fin d'année. On aura $S_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t} \cdot A - A$.
A fin 2010, on aura $n = 7$ : puisque on est en fin 2010, au début 2011 sans avoir rajouté le dernier $A$, comme 2005 correspond à $n=1$, on a ici $n=7$.

Le montant disponible à fin 2010 sera donc $S_7 =$

$$= \frac{(1+0,0425)^7 - 1}{0,0425} \cdot 50'000 - 50'000 = \underline{347'923,75}.$$

b) Il faut chercher $n$ tel que $S_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t} \cdot 50'000 - 50'000 = 800'000$

$$\Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} \cdot 50'000 = 850'000 \Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} = 17$$

$$\Rightarrow \frac{(1+0,0425)^n - 1}{0,0425} = 17 \Rightarrow 1,0425^n - 1 = 0,7225$$

$$\Rightarrow 1{,}0425^n = 1{,}7225 \Rightarrow n = \frac{\log(1{,}7225)}{\log(1{,}0425)} \cong 13{,}064$$

$$\Rightarrow n = 13 \Rightarrow \text{fin } 2016$$

La construction pourra donc commencer <u>en 2017</u>.