Problème 1

Par Pythagore

$$L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + f(x)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 20x + 64$$

D'où

$$L(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 20x + 64}$$

La dérivée

$$L'(x) = \frac{x^2 + 8x - 20}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 20x + 64}}$$

s'annule quand

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$
$$(x+10)(x-2) = 0$$
$$x = -10 \;,\; x = 2$$

Il est clair graphiquement que $L(x)$ est minimale pour $x = 2$.

Ce qu'on prouve (sans calculer $L''(x)$) avec le tableau de variation de L.

		-10		2	
$x+10$	$- - - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ + +$
$x-2$	$- - -$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$
$L'(x)$	$+ + + +$	0	$- - - -$	0	$+ + + +$
$L(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

La longueur minimale est donc

$$L(2) = \frac{2}{3}\sqrt{177} \cong \underline{8{,}869}$$

Problème 2

Contrainte : $2y + 6x = 90$

$\Rightarrow y = 45 - 3x$

Fonction à optimiser : $V(x) = x \cdot xy = x^2 \cdot (45 - 3x)$

$= 45x^2 - 3x^3$

Dérivée : $V'(x) = 90x - 9x^2$

Extrema : $V'(x) = 0$

$90x - 9x^2 = 0$

$9x \cdot (10 - x) = 0$

$x = 0 \ , \ x = 10$

Maximum : $V(x)$ est maximale pour $\underline{x = 10}$

En effet $V''(x) = 90 - 18x$

$V''(10) = -90 < 0.$

Dimensions optimales : $\underline{10 \times 15 \times 10}$.

Problème 3

a) $M_1 = 0{,}88 \cdot 98'000 + 2400 \cong \underline{88640}$

$M_2 = 0{,}88 \cdot 88640 + 2400 \cong \underline{80403{,}2}$

$M_3 = 0{,}88 \cdot 80403{,}2 + 2400 \cong \underline{73154{,}8}$

b) Posons $q = 0{,}88$, $A = 2400$

$M_1 = q \cdot M_0 + A$

$M_2 = qM_1 + A = q^2 M_0 + A + qA$

$M_3 = qM_2 + A = q^3 M_0 + A + qA + q^2 A$

$= q^3 M_0 + \frac{1 - q^3}{1 - q} \cdot A$

$\vdots$

$M_n = q^n M_0 + \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot A$

$M_{20} = \underline{26049{,}90}$

c) $\lim_{n \to \infty} M_n = \frac{1}{1 - q} \cdot A = \frac{1}{0{,}12} \cdot 2400 = \underline{20000}$

Problème 4

Les prix $a_1, a_2, \ldots, a_8$ forment une progression arithmétique de raison $r = 125$.

On sait que $S_8 = 5420$

$$8 \cdot \frac{a_1 + a_8}{2} = 5420$$

$$a_1 + a_8 = 1355$$

$$a_1 + a_1 + 7 \cdot 125 = 1355$$

$$2a_1 = 480$$

$$a_1 = \underline{\underline{240}}$$

$$a_8 = 240 + 7 \cdot 125 = \underline{\underline{1115}}$$