

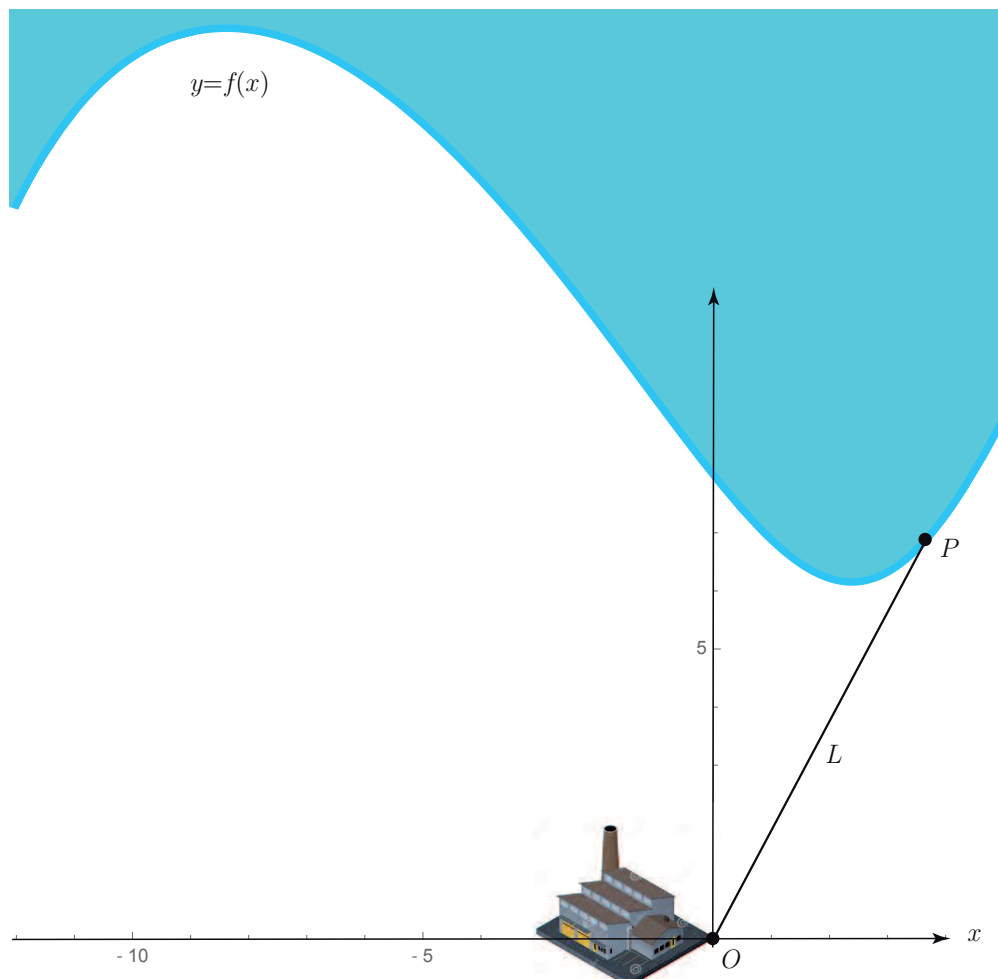
Mathématiques 3

Remarque : Dans le temps imparti, il est demandé de résoudre impérativement les problèmes 3 et 4 et, à choix, l'un des problèmes 1 et 2. Il est loisible d'aborder plus de trois problèmes.

Problème 1 On veut construire une conduite pour alimenter en eau de mer une usine de production alimentaire. Le tracé du bord de la mer est défini par la courbe $y = f(x)$ avec

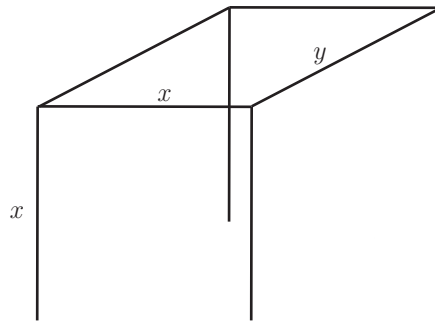
$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 20x + 64}$$

On suppose que l'usine est située à l'origine d'un système d'axes orthonormés.



- a) Déterminer la fonction $L(x)$ qui donne la longueur de la conduite pour un point $P(x; y)$ quelconque du bord de mer.
- b) Déterminer pour quelle valeur de x cette longueur est minimale. Démontrer qu'on a bien affaire à un minimum.
- c) En déduire la longueur L minimale.

Problème 2 Avec une barre de fer d'une longueur de 90 mètres, on construit l'armature d'une tente dont la toile est tendue pour former un parallélépipède rectangle (sans fond), dont deux faces au moins sont carrées.



- Déterminer le volume de l'espace contenu par cette tente en fonction des longueurs x et y . On suppose que la barre à disposition est utilisée entièrement.
- Pour quelle valeur de x le volume de la tente est-il maximal? Démontrer que la valeur trouvée correspond bien à un maximum.
- Quelles sont alors les dimensions x et y de la tente de volume maximal?

Problème 3 Un compte en banque ne servant pas d'intérêt contient un montant de $M_0 = 98000$ francs. A la fin de chaque année, conformément à un ordre permanent, les 12% sont retirés pour être versés à une association caritative. Ce montant étant retiré, le titulaire verse alors une annuité de $A = 2400$ francs qui s'ajoute sur le compte au solde de 88%. On pose M_n le montant sur le compte à la fin de l'année n après les deux opérations de retrait et de versement.

- Calculer M_1 , M_2 et M_3 .
- Donner une formule exprimant M_n . En déduire le montant sur le compte après 20 ans.
- Quel montant constant restera sur le compte à long terme?

Problème 4 Aux 8 finalistes d'un concours d'athlétisme, on remet des prix pour une valeur totale de 5420 francs de telle sorte qu'il y ait une différence de 125 entre chaque récompense. Quels sont les montants de la plus petite et de la plus grande des récompenses?