Maths 3 - Exercices de révision

a) Les zéros de $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ correspondent à $-\frac{2}{9}x^2 + 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{2}{9}x^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6.$

Les coordonnées de A sont donc $A(6;0)$ et celles de B sont $B(-6;0)$

Avec $P(x;y)$, la base du triangle est alors $6+x$ et sa hauteur $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8.$

L'aire du triangle s'écrit donc $A(x) = \frac{1}{2}(6+x)\left(-\frac{2}{9}x^2+8\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}x^2 + 48 - \frac{2}{9}x^3 + 8x\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 24 - \frac{1}{9}x^3 + 4x =$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24.}}$

b) On cherche le ou les x tels que $A'(x) = 0$.

On a $A'(x) = -\frac{1}{9}\cdot 3x^2 - \frac{2}{3}\cdot 2x + 4 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4.$

Ainsi $A'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 = 0 \xrightarrow{\cdot(-3)} x^2 + 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$

Il est clair que si $x = -6$, le triangle se résume au point B et son aire ne peut pas être maximale.

Vérifions que $x = 2$ donne une aire maximale. Pour cela, vérifions que $A''(2) < 0$.

On a $A''(x) = -\frac{1}{3}\cdot 2x - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ et $A''(2) = -\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{4}{3} < 0.$

Ainsi, l'aire du triangle est maximale si $\underline{\underline{x = 2.}}$

c) La base du triangle, avec $x = 2$, vaut $6 + 2 = 8$.

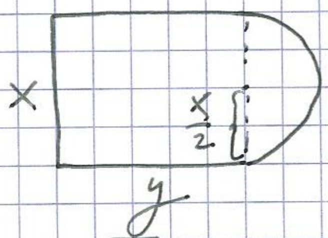
Sa hauteur, toujours avec $x = 2$, vaut $-\frac{2}{9}\cdot 2^2 + 8 = -\frac{8}{9} + 8 = \frac{64}{9}.$

Par le théorème de Pythagore, on a alors :

$BP = \sqrt{8^2 + \left(\frac{64}{9}\right)^2} = \sqrt{64 + \frac{4096}{81}} = \sqrt{\frac{5184+4096}{81}} = \frac{\sqrt{9280}}{9} \cong \underline{\underline{10{,}7.}}$

Problème 2

On a la situation suivante :



La longueur du demi-cercle vaut $\frac{\pi x}{2}$

Le coût de construction s'écrit donc $5 \cdot \frac{\pi x}{2} + x + 2y$

On sait de plus que l'aire vaut $50 m^2$. On a donc $xy + \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 50$

$$\Rightarrow xy + \frac{\pi x^2}{8} = 50 \Rightarrow xy = 50 - \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow y = \frac{50}{x} - \frac{\pi x}{8}.$$

Ainsi, le coût de construction s'écrit $f(x) = \frac{5\pi x}{2} + x + 2\left(\frac{50}{x} - \frac{\pi x}{8}\right) =$

$$= \frac{5\pi}{2}x + x + \frac{100}{x} - \frac{\pi}{4}x = \left(\frac{5\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{100}{x}$$

$$= \left(\frac{9\pi}{4} + 1\right)x + \frac{100}{x}.$$

Cherchons la ou les solutions de $f'(x) = 0$.

Comme $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, on a $f'(x) = \frac{9\pi}{4} + 1 - \frac{100}{x^2}$.

Ainsi $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{9\pi}{4} + 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{9\pi}{4} + 1 = \frac{100}{x^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{9\pi}{4} + 1\right)x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{\frac{9\pi}{4} + 1} \xRightarrow{x>0} x = \sqrt{\frac{100}{\frac{9\pi}{4} + 1}} \cong 3,52$$

On vérifie que $x = 3,52$ correspond bien à un minimum pour f en faisant un tableau de variation (ou tableau de croissance) :

x		$3,52$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

avec $x = 3$,

$f'(3) = \frac{9\pi}{4} + 1 - \frac{100}{3^2} = -3,042 < 0$

avec $x = 4$,

$f'(4) = \frac{9\pi}{4} + 1 - \frac{100}{4^2} = 1,819 > 0$

On a donc bien un minimum.

Pour atteindre ce minimum, la largeur de la piscine doit valoir $x = 3{,}52$ m et la longueur totale $y + \frac{x}{2} = \frac{50}{x} - \frac{\pi x}{8} + \frac{x}{2} =$ $= 14{,}58$ m

Problème 3

a) Victor : c'est une progression géométrique avec $g_1 = 12$ km et $q = 1 + t = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$; ainsi, le 7e jour d'entraînement, il courra $g_7 = q^{7-1} \cdot g_1 = 1{,}05^6 \cdot 12 = 16{,}081$ km.

Paul : c'est une progression arithmétique avec $a_1 = 15$ km et $r = 0{,}4$ km ; ainsi, le 7e jour, il courra $a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r$ $= 15 + 6 \cdot 0{,}4 = 17{,}4$ km.

b) Victor : pour avoir $g_n = 21$ km, on doit avoir $g_n = q^{n-1} \cdot g_1$

$\Rightarrow 21 = 1{,}05^{n-1} \cdot 12 \Rightarrow 1{,}05^{n-1} = 1{,}75$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{\log(1{,}75)}{\log(1{,}05)} = 11{,}47 \Rightarrow n = 12{,}47$

$\Rightarrow$ après 13 jours.

Paul : pour avoir $a_n = 21$ km, on doit avoir $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$\Rightarrow 21 = 15 + (n-1) \cdot 0{,}4 \Rightarrow 6 = (n-1) \cdot 0{,}4$

$\Rightarrow n - 1 = 15 \Rightarrow n = 16$

$\Rightarrow$ après 16 jours.

c) Victor : on doit calculer S_{17} avec la formule $S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot g_1$

$\Rightarrow S_{17} = \frac{1{,}05^{17} - 1}{1{,}05 - 1} \cdot 12 = 310{,}084$ km

Paul : on doit calculer S_n avec la formule $S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r$

$\Rightarrow S_{17} = 17 \cdot 15 + \frac{17 \cdot 16}{2} \cdot 0{,}4 = 309{,}4$ km

Par conséquent, avec un écart de moins d'un km, les 2 coureurs ont couru la même distance après 17 jours.

Problème 4

On a une progression arithmétique avec une raison $r = 50.-$ et on cherche a_1 et $a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot r = a_1 + 11\cdot 50 = a_1 + 550$.

On sait que $S_{12} = 30'300.-$. Avec $S_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}$, on a

$$S_{12} = 12\cdot\frac{a_1+a_{12}}{2} \Longrightarrow 30'300 = 12\cdot\frac{a_1+a_{12}}{2} \Longrightarrow 2525 = \frac{a_1+a_{12}}{2}$$

$$\Longrightarrow a_1 + a_{12} = 5050.$$

Comme $a_{12} = a_1 + 550$, on obtient, par substitution,

$$a_1 + a_1 + 550 = 5050 \Longrightarrow 2a_1 = 4500 \Longrightarrow a_1 = 2250.$$

On a alors $a_{12} = a_1 + 550 = 2250 + 550 = 2800.-$

Son salaire initial était donc de $\underline{\underline{2250.-}}$ et son salaire final de $\underline{\underline{2800.-}}$.