Maths 3 - Exercices de révision

Exercice 1

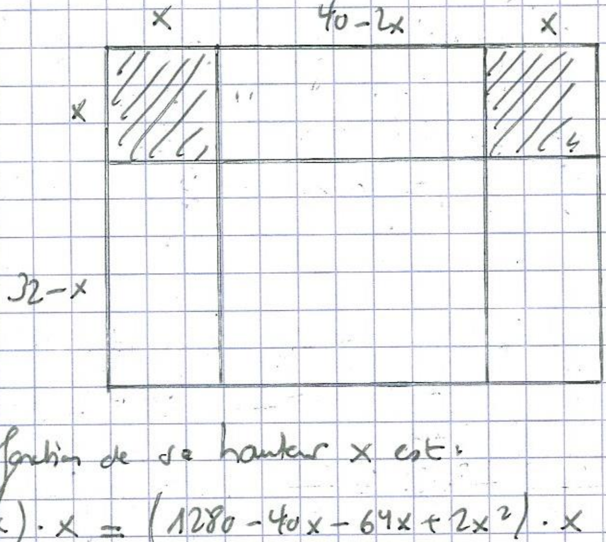
a) L'équation de la droite d est de la forme $y = mx + h$ où m est la pente et vaut donc $\frac{2-0,5}{4-0} = \frac{1,5}{4} = 0,375$ et h est l'ordonnée à l'origine et vaut $0,5$. L'équation de d est donc $\underline{\underline{y = 0,375x + 0,5}}$.

b) Les dimensions du rectangle sont $4-x$ et $0,375x+0,5$.
Son aire est donc $(4-x)\cdot(0,375x+0,5) = 1,5x + 2 - 0,375x^2 - 0,5x$
$= -0,375x^2 + x + 2$.
Il faut chercher le maximum de la fonction $f(x) = -0,375x^2 + x + 2$.
On a $f'(x) = -0,75x + 1$ et $f'(x) = 0 \Rightarrow -0,75x + 1 = 0$
$\Rightarrow 0,75x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{0,75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$.
Les dimensions du rectangle d'aire maximale sont donc $4 - \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$
et $0,375 \cdot \frac{4}{3} + 0,5 = \underline{\underline{1}}$.

c) On a $f''(x) = -0,75$. Comme $f''\left(\frac{4}{3}\right) = -0,75 < 0$, on est sûr que $x = \frac{4}{3}$ est un maximum.

Exercice 2

On a la situation suivante:



a) Le volume de la boîte en fonction de sa hauteur x est:
$V(x) = (40-2x)\cdot(32-x)\cdot x = (1280 - 40x - 64x + 2x^2)\cdot x =$

$= (1280 - 104x + 2x^2) \cdot x = 1280x - 104x^2 + 2x^3 =$

$= \underline{\underline{2x^3 - 104x^2 + 1280x}}$

b) On cherche les solutions de $V'(x) = 0$.

On a $V'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 104 \cdot 2x + 1280 = 6x^2 - 208x + 1280$.

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{208 \pm \sqrt{208^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1280}}{2 \cdot 6} = \dfrac{208 \pm 112}{12} = \begin{cases} 26,\overline{6} \\ 8 \end{cases}$

Comme, avec $x = 26,\overline{6}$, $40 - 2x = 40 - 2 \cdot 26,\overline{6} = -13,\overline{3} < 0$, ce qui est exclu, on élimine la solution $x = 26,\overline{6}$ et ~~la~~ l'unique solution est donc $\underline{\underline{x = 8.}}$

On a de plus, $V''(x) = 6 \cdot 2x - 208 = 12x - 208$ et $V''(8) = 12 \cdot 8 - 208 =$

$= -112 < 0$. Ainsi $x = 8$ correspond bien au maximum de $V(x)$.

c) Les dimensions de la boîte sont alors : longueur $= 40 - 2 \cdot 8 = \underline{\underline{24}}$;

largeur $= 32 - 8 = \underline{\underline{24}}$ et hauteur $= x = \underline{\underline{8.}}$

Exercice 3

a) 2011 : $A_1 = (1-t) \cdot A_0 + 9000 = (1 - 0,037) \cdot 320'000 + 9000 = \underline{\underline{317'160.}}$

2012 : $A_2 = (1-t) \cdot A_1 + 9000 = (1 - 0,037) \cdot 317'160 + 9000 = \underline{\underline{314'425.}}$

2013 : $A_3 = (1-t) \cdot A_2 + 9000 = (1 - 0,037) \cdot 314'425 + 9000 = \underline{\underline{311'791.}}$

b) Par analogie avec la formule pour l'amortissement d'une dette avec intérêts et remboursement, on peut écrire :

$$A_n = (1-t)^n \cdot A_0 + \frac{(1-t)^n - 1}{-t} \cdot A \quad , \text{ où } A = 9000$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_n = 0,963^n \cdot 320'000 + \frac{0,963^n - 1}{-0,037} \cdot 9000.}}$$

c) En 2025, on a $n = 15$ et donc $A_{15} = 0,963^{15} \cdot 320'000 + \dfrac{0,963^{15} - 1}{-0,037} \cdot 9000 =$

$= \underline{\underline{286'846 \text{ abonnés.}}}$

Problème 4

On a une progression arithmétique avec $a_1 = 48'000.-$ et $r = 1200.-$

a) Avec $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ et $a_n = 70'000.-$, on a :

$70'000 = 48'000 + (n-1)\cdot 1200 \Rightarrow 22'000 = (n-1)\cdot 1200$

$\Rightarrow 18{,}33 = n-1 \Rightarrow n = 19{,}33$

Ainsi, il faut que $n = 20$ pour avoir dépassé les 70'000.-.

Comme $n = 1$ correspond à 2014, on en conclut qu'elle aura dépassé les 70'000.- en $2014 + 19 = \underline{\underline{2033}}$.

b) On doit calculer S_5 : $S_5 = n\cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot r =$

$= 5\cdot 48'000 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 1200 = \underline{\underline{252'000.-}}$

c) On doit chercher n tel que $S_n = 1'000'000$.

Avec $S_n = n\cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot r$, on a $1'000'000 = n\cdot 48'000 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 1200$

$\Rightarrow 1'000'000 = 48'000n + \frac{n^2-n}{2}\cdot 1200$

$\Rightarrow 1'000'000 = 48'000n + (n^2-n)\cdot 600$

$\Rightarrow 1'000'000 = 48'000n + 600n^2 - 600n$

$\Rightarrow 0 = 600n^2 + 47'400n - 1'000'000$

$\Rightarrow n = \frac{-47'400 \pm \sqrt{47'400^2 - 4\cdot 600\cdot(-1'000'000)}}{2\cdot 600} = \frac{-47'400 \pm 68'167}{1200}$

$= \begin{cases} 17{,}3 \\ -56{,}3 \end{cases}$

Comme $n > 0$, on en déduit que $n = 17{,}3$.

Ainsi, elle aura dépassé un salaire cumulé d'un million de francs $\underline{\underline{\text{après 18 ans.}}}$