Août 2017

Mathématiques 3

Corrigé

---

(1)

Problème 1

On a $Q(K;L) = 50 \cdot K^{0,8} \cdot L^{0,2}$.

a) avec $K = 16'807$ et $L = 3125$, on a $Q(K;L) =$
$= 50 \cdot 16'807^{0,8} \cdot 3125^{0,2} = \underline{\underline{600'250}}$.

b) Comme la dérivée de x^n est $n \cdot x^{n-1}$, on a
$\frac{\partial Q}{\partial L}(K;L) = 50 \cdot K^{0,8} \cdot 0,2 L^{0,2-1} = 50 \cdot 0,2 \cdot K^{0,8} \cdot L^{-0,8} =$
$= \underline{\underline{10 \cdot K^{0,8} \cdot L^{-0,8}}}$.

c) avec $K = 16'807$ et $L = 3125$, on a $\frac{\partial Q}{\partial L}(K;L) =$
$= 10 \cdot 16'807^{0,8} \cdot 3125^{-0,8} = \underline{\underline{38,416}}$.

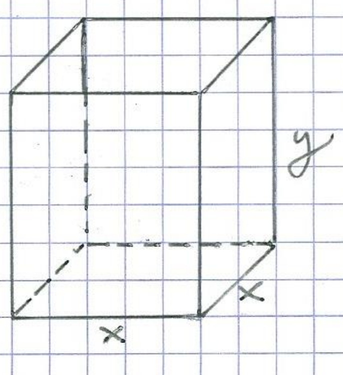
d) $\frac{\partial Q}{\partial L} = 38,416$ correspond à la pente de Q dans la direction de l'axe L et signifie donc que <u>si L augmente de 1, Q augmente de ~38,416.</u>

En particulier, avec $K = 16'807$ et $L = 3126 = 3125 + 1$, on aura
$Q(16'807; 3126) \cong Q(16'807; 3125) + 38,416 \cong 600'250 + 38,416$
$\cong \underline{\underline{600'288,416}}$.

La vrai valeur de Q pour $K = 16'807$ et $L = 3126$ est
$Q(K;L) = 50 \cdot 16'807^{0,8} \cdot 3126^{0,2} = 600'288,411$.

Problème 2

On a :



Tissu utilisé = aire de la surface sans le couvercle =
$= x^2 + 4xy$.

On sait que le volume de la boîte vaut $108\,dm^3$.

En choisissant les longueurs en dm, on a alors $x^2 \cdot y = 108$, d'où
$y = \frac{108}{x^2}$.

Le tissu utilisé est alors donné par la fonction $f(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} =$
$= x^2 + \frac{432}{x}$.

Sa dérivée est $f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$ (la dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$).

$f'(x) = 0$ donne donc $2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Rightarrow 2x^3 = 432$
$\Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$.

Comme la dérivée de $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ est $-2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$, on a
$f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$ et $f''(6) = 2 + \frac{864}{6^3} > 0$.

Ainsi, f est convexe en $x = 6$ et atteint donc bien un minimum en ce point.

Avec $x = 6$, on a $y = \frac{108}{6^2} = \frac{108}{36} = 3$.

Les dimensions pour que la quantité de tissu utilisé soit minimale sont donc:

base: 6 dm sur 6 dm ; hauteur: 3 dm.

Problème 3

1) 1e année: 12 fois 800.- $= 12 \cdot 800 = 9600$.-

2e année: 12 fois (800.- + 5% de 800.-) $= 12 \cdot 1{,}05 \cdot 800 = 1{,}05 \cdot 12 \cdot 800 =$
$= 1{,}05 \cdot 9600 = 10'080$.-

3e année: $1{,}05^2 \cdot 9600 = 10'584$.-

4e année: $1{,}05^3 \cdot 9600 = 11'113{,}20$

5e année: $1{,}05^4 \cdot 9600 = 11'668{,}86$.

Au total, avec cette option, il aura payé $9600 + 10'080 + 10'584 +$
$+ 11'113{,}2 + 11668{,}86 = 53'046{,}06$ frs.

2) 1^e année: $12 \cdot 800 = 9600.-$

2^e année: $12 \cdot 840 = 10'080.-$

3^e année: $12 \cdot 880 = 10'560.-$

4^e année: $12 \cdot 920 = 11'040.-$

5^e année: $12 \cdot 960 = 11'520.-$

Au total, avec cette option, il aura payé $9600 + 10'080 + 10'560 +$
$+ 11'040 + 11'520 = 52'800$ frs.

a) Etant moins onéreuse au total, il choisira l'option 2).

b) Le loyer mensuel au terme de la période sera alors de $960.-$.

Problème 4.

a) On a une progression d'un capital avec intérêts et capitalisation. Comme l'augmentation du capital est effectué au début de chaque année, la somme accumulée à la fin de l'année n est $S_n = \frac{(1+t)^n - 1}{t} \cdot A - A$
où t est le taux d'intérêt annuel. Ici $n = 2025 - 2016 = 9$
($n = 1$ au 1^{er} janvier 2017) et $t = 1,75\% = 0,0175$

Le montant accumulé sera donc $S_n = \frac{(1+0,0175)^9 - 1}{0,0175} \cdot 200'000 - 200'000 =$
$= 1'731'282,45$ frs.

b) On cherche n pour que $S_n = 3'700'000$.

On doit donc avoir $3'700'000 = \frac{(1+0,0175)^n - 1}{0,0175} \cdot 200'000 - 200'000$

$\Rightarrow 3'900'000 = \frac{1,0175^n - 1}{0,0175} \cdot 200'000$

$\Rightarrow 19,5 = \frac{1,0175^n - 1}{0,0175} \Rightarrow 0,34125 = 1,0175^n - 1$

$\Rightarrow 1,0175^n = 1,34125 \Rightarrow n = \frac{\log(1,34125)}{\log(1,0175)} \cong 16,92$

$\Rightarrow n = 17$

La construction pourra donc débuter en $2016 + 17 = 2033$.