MATHÉMATIQUES 3 : partie 1

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Maxime Zuber, Dr ès sciences

Haute École de Gestion Arc, février 2015

1 Suites numériques

1.1 Définitions

On appelle *suite numérique* toute application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n)=a_n\ . \end{array}$$

L'image par f de l'entier n est appelé *n-ième terme* de la suite et est noté a_n. On notera également $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par l'image de la fonction f.

Exemple La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par la fonction $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$, a pour premiers termes : $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{5}{7}$, $a_5 = \frac{3}{4}$,...

Exercice 1 Écrire les premiers termes des suites définies par *les formules explicites* suivantes

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & n^2-1; \\ b_n & = & 125-(n-1)5; \\ c_n & = & 1,05^n \cdot 100. \end{array}$$

Exercice 2 Écrire les premiers termes de la suite définie par *la formule de récurrence*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & 2 \\ a_n & = & 3\cdot a_{n-1}+1. \end{array} \right.$$

Même question pour les suites

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_1 & = & 1 \\ b_n & = & b_{n-1}^2-3, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} F_1 & = & F_2=1 \\ F_n & = & F_{n-1}+F_{n-2}. \end{array} \right.$$

Exercice 3 Trouver une formule explicite qui définisse la suite des nombres pairs. Même question pour les nombres impairs.

1.2 La suite des sommes partielles

À partir d'une suite numérique quelconque $(a_n)_{n\geq 1}$, on définit une nouvelle suite, appelée *suite des sommes partielles* et notée $(S_N)_{N\geq 1}$, en posant $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Ainsi, S_N est la somme des N premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

$$\boxed{S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}$$

Exercice 4 Considérer la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = -n^2 + 3n + 1$ et calculer les cinq premiers termes de la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\geq 1}$.

Exercice 5 Même question pour la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = (-2)^n$.

Exercice 6 On sait que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ des sommes partielles de $(a_n)_{n\geq 1}$ est donnée par $S_N = N^3 - 4N$; calculer les six premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. Donner la formule explicite définissant la suite (a_n).

2 Progressions arithmétiques

Une suite numérique $(a_n)_{n\geq 1}$ est une *progression arithmétique* s'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$, appelée *raison* de la progression, telle que

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + r}$$

pour tout rang $n \geq 2$. Autrement dit, on obtient un terme quelconque d'une progression arithmétique en ajoutant toujours le même nombre r à son prédecesseur.

Exercice 7 Établir la liste des six premiers termes des *progressions arithmétiques* suivantes

a) $a_1 = 25 \qquad r = -3$;
b) $a_1 = -72{,}4 \qquad r = 2{,}1$;
c) $a_5 = 11{,}2 \qquad r = 1{,}2$.

2.1 Formule explicite pour le terme général a_n

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une progression arithmétique de raison r, alors

$$\begin{array}{lllll} a_2 & = & a_1 + r; & & \\ a_3 & = & a_2 + r & = & a_1 + 2r \\ a_4 & = & a_3 + r & = & a_1 + 3r \\ a_5 & = & a_4 + r & = & a_1 + 4r, \end{array}$$

et donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

Exercice 8 Calculer le terme a_{15} de chacune des progressions qui font l'objet de l'exercice 7

Exercice 9 Démontrer qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique est toujours égal à la *moyenne arithmétique* de son prédecesseur et de son successeur. Ce résultat est à l'origine de la terminologie.

2.2 Formule explicite pour la somme partielle S_N

Dans le cas général, c'est-à-dire pour une suite quelconque, on ne dispose pas d'une formule explicite qui fournisse l'expression de la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ des sommes partielles. Dans le cas particulier d'une progression arithmétique ceci est possible ; plus précisément, on a le résultat suivant. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une *progression arithmétique* de raison r, alors on a

$$\boxed{S_N = N \cdot \frac{a_1 + a_N}{2} = N \cdot a_1 + \frac{N \cdot (N-1)}{2} \cdot r}$$

Exercice 10 Démontrer la proposition précédente.

Exercice 11 Que dire de la somme de N termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque ?

Exercice 12 Considérer les progressions arithmétiques suivantes

a)	2	4	6	$\ldots$	calculer	r,	a_{100},	S_{50};
b)	-7	-4	-1	$\ldots$	calculer	r,	a_{48},	S_{39};
c)	0	6	12	$\ldots$	calculer	r,	a_{16},	S_{20};
d)	-1	9	19	$\ldots$	calculer	r,	a_{10},	S_{15}.

Exercice 13 La somme des huitième et quatorzième termes d'une progression arithmétique est égale à 50 et $a_3 = 13$. Définir cette progression.

Exercice 14 Trouver trois nombres en progression arithmétique, connaissant leur somme 33 et leur produit 1287.

Exercice 15 Trouver quatre nombres en progression arithmétique, connaissant le produit des extrêmes 22 et celui des moyens 40.

Exercice 16 Dans le vide, un corps parcourt 4,9 m durant la première seconde de chute puis, pour chaque seconde qui suit, 9,8 m de plus que pendant la seconde précédente. Quelle est la distance parcourue pendant la vingtième seconde ? Et durant les vingt premières secondes ?

Exercice 17 Calculer la somme des 300 premiers multiples non nuls de 7. Même question pour les 200 premiers multiples non nuls de 4.

Exercice 18 La somme des neuf premiers termes d'une progression arithmétique est égale à 0 ; le dernier terme est 16. Déterminer cette suite.

Exercice 19 Calculer la somme des

a) 100 premiers nombres entiers non nuls ;

b) nombres pairs de 0 à 100 inclus ;

c) nombres impairs de 1 à 99 inclus.

Exercice 20 La somme des N premiers nombres entiers non-nuls est 780. Calculer le dernier terme de la somme (c'est-à-dire N).

3 Progressions géométriques

Une suite numérique $(g_n)_{n\geq 1}$ est une *progression géométrique* s'il existe une constante $q \in \mathbb{R}$, appelée *raison* de la progression, telle que

$$\boxed{g_n = q \cdot g_{n-1}}$$

pour tout rang $n \geq 2$. Autrement dit, on obtient un terme quelconque d'une progression géométrique en multipliant son prédécesseur par le nombre q.

Exemple La suite 3, 6, 12, 24, 48, ... est une progression géométrique de raison 2. Quelle est la moyenne géométrique de trois termes consécutifs ?

Exercice 21 Établir la liste des sept premiers termes des progressions géométriques suivantes

- **a)** $g_1 = 16, \quad q = -1/2$;
- **b)** $g_5 = 405, \quad q = 3$;
- **c)** $g_6 = 224, \quad q = -2$.

3.1 Formule explicite pour le terme général g_n

Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une progression géométrique de raison q, alors

$$\begin{array}{lclcl} g_2 & = & q \cdot g_1 & & \\ g_3 & = & q \cdot g_2 & = & q^2 \cdot g_1 \\ g_4 & = & q \cdot g_3 & = & q^3 \cdot g_1 \\ g_5 & = & q \cdot g_4 & = & q^4 \cdot g_1 \end{array}$$

et donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\boxed{g_n = q^{n-1} \cdot g_1}$$

Exercice 22 Calculer le terme g_{13} des progressions qui font l'objet de l'exercice 21.

Exercice 23 Dans des conditions idéales, une cellule se subdivise en deux nouvelles cellules une fois atteint un certain âge (que l'on choisira comme unité de temps). Soit N_1 le nombre initial de cellules et N_n le nombre de cellules après n unités de temps. Calculer N_2, N_3 et plus généralement N_n. Si $N_1 = 200$, combien de temps faut-il pour que le nombre de cellules dépasse 10^9.

Exercice 24 Considérer les progressions géométriques suivantes

a)	3	6	12	...	calculer	q, g_7;
b)	1	$-1/2$	$1/4$	...	calculer	q, g_6;
c)	4	$8/3$	$16/9$	...	calculer	q, g_5;
d)	2	10	50	...	calculer	q, g_{10}.

Exercice 25 Le sixième terme d'une progression géométrique est 1215, le dixième 98415 ; que vaut le quatrième ?

Exercice 26 Trouver quatre nombres en progression géométrique, connaissant la somme des deux premiers : 28, et celle des deux derniers : 175.

Exercice 27 Trouver trois nombres en progression géométrique, connaissant leur somme 36,75 et leur produit 343.

3.2 Formule explicite pour la suite des sommes partielles

Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une *progression géométrique* de raison $q \neq 1$, alors on a

$$\boxed{S_N = \frac{1-q^N}{1-q}\cdot g_1 = \frac{q^N-1}{q-1}\cdot g_1 = \frac{g_1 - g_{N+1}}{1-q}}$$

Exercice 28 Démontrer la proposition précédente. Celle-ci n'est pas valable si $q = 1$; pourquoi et qu'en est-il dans ce cas ?

Exercice 29 Une légende, probablement apocryphe, prétend que le roi Check-Rama, émerveillé par l'invention du jeu des échecs, demanda à son inventeur, le brahmane Sessa, de choisir lui-même sa récompense. Ce dernier demanda un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux grains pour la deuxième, quatre pour la troisième et ainsi de suite, en doublant chaque fois le nombre de grains jusqu'à la dernière case.

Démontrer que la demande de Sessa, modeste en apparence, se révèle impossible à satisfaire[1].

Exercice 30 Une progression géométrique est définie par $S_N = 86'093'440$, $g_6 = 972$ et $g_1 = 4$; calculer q et N.

Exercice 31 Une progression géométrique est définie par $S_N = 315$, $q = 2$ et $g_1 = 5$; calculer g_N et N.

Exercice 32 Trouver trois nombres A, B et C en progression géométrique, connaissant leur somme 248 et sachant que $C - A = 192$.

Exercice 33 Les réserves connues de gaz naturel étaient estimées en 1971 à $5 \cdot 10^{13} m^3$. En 1971, la consommation mondiale atteignit $1{,}3 \cdot 10^{12} m^3$ et elle connut, depuis cette date, un accroissement annuel de 8,7 % Avec ces données, répondre aux questions suivantes.

- **a)** Quelle quantité de gaz fut consommée au cours de l'année $1970 + n$?
- **b)** A quelle date dut-on s'attendre à un épuisement des réserves connues ?
- **c)** A quelle date doit-on s'attendre à un épuisement des réserves totales potentielles si celles-ci sont estimées 9 fois les réserves connues ?

Exercice 34* Une personne dépose une somme de 12'000 Frs sur un carnet d'épargne à 3,75 % au début de chaque année. Calculer la somme totale (versements et intérêts cumulés) accumulée par cette personne à la fin de la vingt-septième année.

Exercice 35* Pour amortir une dette de 100'000 Frs, on décide de verser, à la fin de chaque année, une somme fixe A de 8000 francs, qu'on appelle l'amortissement annuel. Le taux d'intérêt sur la dette en cours étant de 4,5 %, quelle est la dette résiduelle à la fin de la neuvième année ?

Exercice 36* Pour régler, en 10 ans, une dette de 200'000 Frs au taux de 7,75 %, on prévoit de verser, à la fin de chaque année, une somme fixe A. Déterminer le montant de l'annuité A.

Exercice 37* Quelle est la durée d'amortissement total d'une dette de 300000 francs si le taux d'intérêt est de 5,2% et l'annuité de 42000 francs ?

[1] Effectivement, le nombre total de grains demandé est égal à 18'446'744'073'709'551'615, c'est-à-dire beaucoup plus que la contenance de tous les greniers du vaste royaume de Perse.

4 Série illimitée

Considérons la suite 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,... et la suite des sommes partielles associées définie par

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$$

Comme il s'agit d'une progression géométrique, cette somme vaut

$$S_N = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} \cdot 1 = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right].$$

Quand $N \to \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^N \to 0$ et la somme S_N tend vers 2. On note alors

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

De manière générale, on peut donc affirmer que la somme de tous les termes d'une progression géométrique de raison q, avec $|q| < 1$ est donnée par

$$\boxed{S_\infty = \frac{1}{1-q} \cdot g_1}$$

Exercice 38 Calculer

a) $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ **c)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

b) $0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \cdots$ **d)** $0{,}12 + 0{,}0012 + 0{,}000012 + 0{,}00000012 + \cdots$

Exercice 39 Une sauterelle fait un premier bond de 1 mètre. Elle continue de sauter mais chacun de ses bonds ne mesure que les trois quarts du bond précédent.

a) Quel sera le premier bond de longueur inférieure à 1 cm ?

b) Déterminer la longueur du chemin total parcouru par la sauterelle au terme du dixième bond.

c) Quelle serait la longueur limite du chemin parcouru par la sauterelle après une infinité de sauts ?

5 Exercices d'évaluation

Exercice 40 En 2001, une loterie a versé une subvention de 325'000 francs à une fondation culturelle et une autre de 240'000 francs à une association sportive. Elle s'est engagée ensuite à augmenter :
– de 12'000 francs chaque année le montant versé à la fondation culturelle ;
– de 5% chaque année la subvention affectée à l'association sportive.

a) Quels montants ces deux institutions vont-elles percevoir en 2008 ?

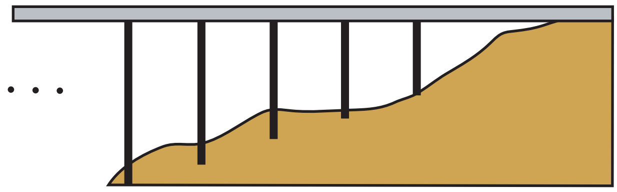
b) Quel est le montant total qu'aura versé cette loterie à ces deux institutions subventionnées entre 2001 et 2010 (y compris) ?

Exercice 41 Une municipalité décide de profiter d'une période de plein emploi pour alimenter un fonds de chômage qui devrait lui permettre de faire face à une aggravation ultérieure du marché du travail. À cette fin, les autorités décident d'ouvrir un compte produisant un intérêt annuel fixe de 2,75% et d'y verser un montant de 100'000 francs le 1er janvier de chaque année. Le premier versement est effectué le 1er janvier 1991. Le 1er janvier 2015, aucun montant ne sera versé mais on soldera le compte.

a) Quel montant total aura alors été versé ?

b) Quelle sera la somme totale au moment où on soldera le compte ?

Exercice 42 Des tubes métalliques ancrés verticalement dans le sol constituent la structure de soutien d'un pont. Le premier pilier a une longueur de 3,2 m. Un tube quelconque mesure 65 cm de plus que le précédent.



a) Quelle est la longueur du 23^e tube ?

b) Calculer la quantité de métal (longueur en m) nécessaire à la fabrication de 35 tubes ?

c) Dans le cas précis, pour construire cette structure, on a utilisé 787,5 m de métal. Combien de tubes soutiennent ce pont ?

Exercice 43 Le Conseil fédéral a pris la décision de cesser l'exploitation des centrales nucléaires au plus tard en 2034. L'Office fédéral de l'énergie (OFEN) a élaboré une stratégie visant d'une part à réduire la consommation d'énergie du pays et, d'autre part, à substituer progressivement une partie de l'énergie nucléaire par des énergies renouvelables. Plus précisément, en application de cette politique, la production des centrales hydrauliques, qui était de 37,5 TWh[2] en 2011, devra augmenter de 0,59% par année jusqu'en 2051.

a) Déterminer le volume de production ainsi planifiée pour les années 2012, 2013 et 2051.

b) Quelle sera, dans ces conditions, l'énergie totale produite par les centrales hydrauliques entre 2011 et 2051 (années 2011 et 2051 comprises) ?

Exercice 44 Un amateur de course à pied relève le défi de participer à un marathon. Il prépare son entraînement en courant tous les jours de manière progressive. Chaque jour, il ajoute une même longueur à la distance parcourue la veille. Dans son agenda, il note qu'il devra courir 20,525 km le 22^e jour et 25,775 km le 32^e jour.

a) Quelle distance doit-il alors courir le 40^e jour ?

b) Quel jour dépassera-t-il pour la première fois la distance du marathon, à savoir 42,195 km ?

c) Quelle distance totale cet amateur a-t-il parcourue au cours de 20 premiers jours d'entraînement ?

d) Combien de jours d'entraînement lui faut-il pour parcourir au total une distance de 148,65 km ?

Exercice 45 Une caisse-maladie estime qu'elle perdra chaque année 6% de ses assurés qui sont aujourd'hui au nombre de 341'725. Pour faire face à cette baisse de sa clientèle, elle mandate une société de démarchage en lui fixant l'objectif de trouver 10'000 nouveaux clients par année. Poser c_n le nombre de ses clients au terme de l'année n.

a) Calculer c_1, c_2 et c_3 puis donner une formule générale pour c_n.

b) Combien d'assurés comptera cette caisse après 20 ans.

c) Quel autre objectif cette assurance doit-elle fixer à la société mandataire si elle veut que le nombre de ses abonnés dépasse 400'000 après 10 ans ?

Exercice 46 Un véhicule circule pendant une minute à la vitesse de 90 km/h et accélère de sorte que pendant chacune des minutes suivantes, il parcourt 72 mètres de plus que durant la minute précédente.

a) Quelle distance ce véhicule parcourt-il durant la 20^e minute ?

b) Quelle distance totale sera alors parcourue ?

c) Après combien de minutes la vitesse de ce véhicule dépassera-t-elle les 240 km/h ?

[2]Térawattheure : $= 10^{12}$ Wattheures (unité de mesure énergétique).

Exercice 47 Une fondation gérant un musée décide de financer la construction d'une nouvelle galerie de la manière suivante. Au début de chaque année, à partir de 2001, 400'000 francs seront versés sur un compte offrant un intérêt annuel de 5,25%

a) De quel montant disposera cette fondation à la fin de l'année 2009 ?

b) La construction pourra débuter dès lors que la fondation disposera d'au moins 8 millions de francs de fonds propres. En quelle année les travaux pourront-ils commencer ?

Exercice 48 L'agence *Eurostat* de la Commission européenne publie annuellement le chiffre d'affaires des commerces de détails (produits alimentaires) dans les pays membres de l'Union européenne. Les valeurs figurant dans le tableau ci-dessous sont exprimées en milliards d'euros. Elles concernent la France et la Roumanie pour les années 2001 à 2007.

	2001	**2007**
France	146	183
Roumanie	2,6	7,4

On peut admettre que l'évolution du chiffre d'affaires annuel propre à la France suit une progression arithmétique, alors que celui relatif à la Roumanie correspond à une progression géométrique.

a) Avec ces hypothèses, quel fut le chiffre d'affaires de chacun de ces deux pays en 2003 ?

b) Quelles furent les chiffres d'affaires totaux des deux pays entre 2001 et 2007 ?

c) Quel est le taux annuel de croissance du chiffre d'affaires roumain ?

d) En quelle année doit-on s'attendre à voir le chiffre d'affaires roumain dépasser 50 Mia d'euros ?

Exercice 49 On lâche une bille métallique du haut de la Tour Eiffel. Durant la première seconde, la bille parcourt 4,9 mètres, puis pour chaque seconde qui suit, elle parcourt 9,8 mètres de plus que la distance parcourue durant la seconde précédente.

a) Quelle distance cette bille parcourt-elle durant la cinquième seconde ?

b) Et pendant les 5 premières secondes ?

c) À quel moment la bille touchera-t-elle le sol (hauteur du point sur la tour d'où est lâchée la bille : 313,6 m) ?

Exercice 50 À sa naissance, un orphelin est confié à un tuteur. Celui-ci décide alors de placer à chaque anniversaire du pupille dont il a la charge et ceci jusqu'à la majorité de ce dernier, un montant de 20000 francs sur un compte-épargne offrant un taux fixe de 2,5%.

a) Le jour des 18 ans du pupille, son tuteur ne verse aucun montant mais solde le compte. Quelle somme lui sera alors remise ?

b) Quel âge avait l'enfant la première fois que la somme sur le carnet a dépassé 200000 francs ?

Exercice 51 Le client d'une société de crédit contracte un emprunt de 150000 francs à un taux de 6,5% qu'il décide de rembourser en versant 13000 francs à la fin de chaque année.

a) Quel montant devra-t-il encore à la fin de la onzième année ?

b) Quel montant annuel aurait-il dû verser pour essuyer sa dette sur une durée de 10 ans ?

6 Réponses et corrigés

Exercice 1

n	1	2	3	4	5	6
a_n	0	3	8	15	24	35
b_n	125	120	115	110	105	100
c_n	105	110,25	115,7625	121,55063	127,62816	134,00956

Exercice 2

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	7	22	67	202	607
b_n	1	-2	1	-2	1	-2
F_n	1	1	2	3	5	8

Exercice 3 La suite des nombres pairs (p_n) est définie par $p_n = 2 \cdot (n-1)$. Celle des impairs (i_n) par la formule $i_n = 2n - 1$.

Exercice 4

n	1	2	3	4	5	6
a_n	3	3	1	-3	-9	-17
S_n	3	6	7	4	-5	-22

Exercice 5

n	1	2	3	4	5	6
a_n	-2	4	-8	16	-32	64
S_n	-2	2	-6	10	-22	42

Exercice 6

N	1	2	3	4	5	6
a_N	-3	3	15	33	57	87
S_N	-3	0	15	48	105	192

On a

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - 4n - [(n-1)^3 - 4(n-1)] = n^3 - 4n - [n^3 - 3n^2 - n + 3] = 3n^2 - 3n - 3$$

Exercice 7

	n	1	2	3	4	5	6
a)	a_n	25	22	19	16	13	10
b)	a_n	$-72{,}4$	$-70{,}3$	$-68{,}2$	$-66{,}1$	$-64{,}0$	$-61{,}9$
c)	a_n	6,4	7,6	8,8	10	11,2	12,4

Exercice 8 Avec la formule $a_{15} = a_1 + 14r$ on obtient : **a)** -17, **b)** -43, **c)** 23,2.

Exercice 9 On a

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_n - r) + (a_n + r)}{2} = \frac{2a_n}{2} = a_n$$

Exercice 10 Partons des égalités

$$\begin{array}{rcl} S_N & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N \\ S_N & = & a_N + a_{N-1} + \cdots + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_N & = & (a_1 + a_N) + (a_2 + a_{N-1}) + \cdots + (a_{N-1} + a_2) + (a_N + a_1) \\ & = & (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) + \cdots + (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) \\ & = & N \cdot (a_1 + a_N) \end{array}$$

dont la dernière découle du fait que

$$\begin{array}{rcl} a_2 + a_{N-1} & = & (a_1 + r) + (a_N - r) = a_1 + a_N \\ a_3 + a_{N-2} & = & (a_1 + 2r) + (a_N - 2r) = a_1 + a_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} + a_2 & = & (a_N - r) + (a_1 + r) = a_1 + a_N \end{array}$$

On en déduit que

$$S_N = N \cdot \frac{a_1 + a_N}{2} = \frac{N}{2}\Big[a_1 + a_1 + (N-1)\cdot r\Big] = \frac{N}{2} \cdot \Big[2a_1 + (N-1)\cdot r\Big] = N \cdot a_1 + \frac{N\cdot(N-1)}{2}\cdot r$$

Exercice 11 Il est clair que la somme de N termes consécutifs d'une progression arithmétique est égale à N fois la moyenne entre le premier et le dernier.

Exercice 12 **a)** $r = 2$, $a_{100} = 200$, $S_{50} = 2550$, **b)** $r = 3$, $a_{48} = 134$, $S_{39} = 1950$, **c)** $r = 6$, $a_{16} = 90$, $S_{20} = 1140$, **d)** $r = 10$, $a_{10} = 89$, $S_{15} = 1035$.

Exercice 13 On sait que $a_3 = a_1 + 2r = 13$ et que $a_8 + a_{14} = (a_1 + 7r) + (a_1 + 13r) = 2a_1 + 20r = 50$ d'où $a_1 + 10r = 25$. Le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 + 2r & = & 13 \\ a_1 + 10r & = & 25 \end{array}\right.$$

a pour solution $r = \frac{3}{2} = 1{,}5$ et $a_1 = 10$.

Exercice 14 Posons $x - r$, x et $x + r$ pour les trois nombres. Comme leur somme vaut 33, on a $(x - r) + x + (x + r) = 3x = 33$, d'où $x = 11$. Leur produit valant 1287, on en déduit l'équation $(11 - r) \cdot 11 \cdot (11 + r) = 1287$, c'est-à-dire $121 - r^2 = 117$, d'où $r^2 = 4$ et $r = \pm 2$. Solution 1 : $r = 2$ et les nombres sont 9, 11 et 13. Solution 2 : $r = -2$ et les nombres sont 13, 11 et 9.

Exercice 15 Soient $x - r$, x, $x + r$ et $x + 2r$ les quatre nombres. On sait donc que

$$\left\{\begin{array}{lcl} (x - r)\cdot(x + 2r) & = & 22 \\ x \cdot (x + r) & = & 40 \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boxed{x^2 + rx} - 2r^2 & = & 22 \quad | \quad (1) \\ \boxed{x^2 + rx} & = & 40 \quad | \quad (2) \end{array}\right.$$

En effectuant la soustraction (2)-(1), on obtient : $2r^2 = 18$, $r^2 = 9$ et donc, $r = \pm 3$.

- Si $r = 3$, alors l'équation (2) s'écrit $x^2 + 3x - 40 = 0$ ou encore $(x + 8)\cdot(x - 5) = 0$. On en déduit que $x = 5$, et les nombres sont 2, 5, 8 et 11, ou $x = -8$ et alors les nombres cherchés sont -11, -8, -5 et -2.
- Si $r = -3$, alors l'équation (2) s'écrit $x^2 - 3x - 40 = 0$ ou encore $(x - 8)\cdot(x + 5) = 0$. On en déduit que $x = 8$, et les nombres sont 11, 8, 5 et 2, ou $x = -5$ et alors les nombres cherchés sont -2, -5, -8 et -11.

Exercice 16 La suite (d_n) donnant la distance parcourue durant la seconde n est ainsi une progression arithmétique de raison $r = 9{,}8$ et de premier terme $d_1 = 4{,}9$. Il s'ensuit que $d_{20} = 191{,}1$ et que $d_1 + d_2 + \cdots + d_{20} = S_{20} = 20 \cdot \frac{4{,}9+191{,}1}{2} = 1960$.

Exercice 17 On a $S_{300} = 7 + 14 + \cdots + 2100 = 300 \cdot \frac{7+2100}{2} = 316050$. Puis $S_{200} = 4 + 8 + 12 + \cdots + 800 = 200 \cdot \frac{4+800}{2} = 80400$.

Exercice 18 On sait que

$$\begin{cases} a_9 = 16 & = & a_1 + 8r & | & (1) \\ S_9 = 0 & = & 9 \cdot \frac{a_1+16}{2} & | & (2) \end{cases}$$

De (2), on tire $a_1 = -16$. La relation (1) s'écrit alors $16 = -16 + 8r$, ce qui conduit à $32 = 8r$ et à $r = 4$. La suite est donc : $-16, -12, -8, \ldots, 12, 16$.

Exercice 19 **a)** On a $S_{100} = 1+2+\cdots+100 = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5050$, **b)** $S_{50} = 2+4+\cdots+100 = 50 \cdot \frac{2+100}{2} = 2550$, **c)** D'où $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = 5050 - 2550 = 2500$.

Exercice 20 On sait que

$$1 + 2 + \cdots + N = N \cdot \frac{1+N}{2} = 780$$

On en déduit que $N \cdot (N + 1) = 1560$ ou encore $N^2 + N - 1560 = 0$. Equation qu'on factorise sous la forme $(N + 40) \cdot (N - 39) = 0$. Ainsi $N = -40$ (solution à rejeter) et $N = 39$.

Exercice 21

	n	1	2	3	4	5	6	7
a)	g_n	16	-8	4	-2	1	$-1/2$	$1/4$
b)	g_n	5	15	45	135	405	1215	3645
c)	g_n	-7	14	-28	56	-112	224	-448

Exercice 22 **a)** $\frac{1}{256}$, **b)** 2657205, **c)** -28672.

Exercice 23 (N_n) est une progression géométrique de raison 2. On cherche alors n tel que $N_n > 10^9$, c'est-à-dire $200 \cdot 2^{n-1} > 10^9$, ou encore $2^{n-1} > 5000000$. On trouve alors $n = 24$.

Exercice 24 **a)** $q = 2$, $g_7 = 192$, **b)** $q = -\frac{1}{2}$, $g_6 = -\frac{1}{32}$, **c)** $q = \frac{2}{3}$, $g_5 = \frac{64}{81}$, **d)** $q = 5$, $g_{10} = 3906250$.

Exercice 25 On sait que : (1) : $g_6 = g_1 \cdot q^5 = 1215$ et que (2) : $g_{10} = g_1 \cdot q^9 = 98415$. En divisant (2) par (1), on tire $q^4 = 81$ donc $q = \pm 3$. Si $q = 3$, alors (1) donne $g_1 = 5$ et donc $g_4 = 5 \cdot 3^3 = 135$. Si $q = -3$, alors (1) donne $g_1 = -5$ et donc $g_4 = -5 \cdot (-3)^3 = 135$ aussi.

Exercice 26 Soient x, qx, q^2x et q^3x les quatre nombres. On sait donc que

$$\begin{cases} x + qx & = & 28 \\ q^2x + q^3x & = & 175 \end{cases}$$

Ce système s'écrit aussi

$$\begin{cases} \boxed{x + qx} & = & 28 & | & (1) \\ \boxed{(x + qx)} \cdot q^2 & = & 175 & | & (2) \end{cases}$$

En effectuant la division (2) :(1), on obtient : $q^2 = \frac{25}{4}$, et donc, $q = \pm\frac{5}{2}$.

- Si $q = \frac{5}{2}$, alors l'équation (1) s'écrit $\frac{7}{2} \cdot x = 28$. On en déduit que $x = 8$, et les nombres sont 8, 20, 50 et 125.
- Si $q = -\frac{5}{2}$, alors l'équation (1) s'écrit $-\frac{3}{2} \cdot x = 28$. On en déduit que $x = -\frac{56}{3}$, et les nombres sont $-\frac{56}{3}$, $\frac{140}{3}$, $-\frac{350}{3}$ et $\frac{875}{3}$.

Exercice 27 Soient $\frac{1}{q} \cdot x$, x et qx les trois nombres. Comme leur produit vaut 343, on en déduit que $x^3 = 343$ et donc $x = 7$. Les nombres sont donc $\frac{7}{q}$, 7 et $7q$. On sait ensuite que

$$\begin{array}{lcll}
\frac{7}{q} + 7 + 7q & = & 36{,}75 & | \quad -36{,}75 \\
\frac{7}{q} + 7q - 29{,}75 & = & 0 & | \quad \cdot \frac{q}{7} \\
q^2 - 4,25q + 1 & = & 0 & | \quad \cdot 4 \\
4q^2 - 17q + 4 & = & 0 & | \quad \text{factorisation} \\
(q-4) \cdot (4q-1) & = & 0 &
\end{array}$$

On en déduit que $q = 4$ et les nombres sont : $\frac{7}{4}$, 7 et 28. Ou alors $q = \frac{1}{4}$ et les nombres sont : 28, 7 et $\frac{7}{4}$.

Exercice 28 En soustrayant les égalités ci-dessous

$$\begin{array}{rcl}
S_N & = & g_1 + q \cdot g_1 + q^2 g_1 + \cdots + q^{N-2} g_1 + q^{N-1} g_1 \\
q \cdot S_N & = & \qquad q \cdot g_1 + q^2 g_1 + \qquad \cdots \qquad + q^{N-1} g_1 + q^N g_1 \\
\hline
S_N - q \cdot S_N & = & g_1 - q^N g_1
\end{array}$$

on obtient $(1-q) \cdot S_N = (1-q^N) \cdot g_1$ et les formules

$$S_N = \frac{1-q^N}{1-q} \cdot g_1 = \frac{g_1 - q^N g_1}{1-q} = \frac{g_1 - g_{N+1}}{1-q}$$

Il est clair que si $q = 1$, ces formules ne sont pas valables (division par 0). Mais dans ce cas plus banal $S_N = g_1 + g_1 + \cdots + g_1 = N \cdot g_1$.

Exercice 29 $S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = \dfrac{2^{64}-1}{2-1} \cdot 1 = 2^{64} - 1$.

Exercice 30 On sait que $g_6 = 972 = q^5 \cdot 4$, d'où $q^5 = 243$ et donc $q = 3$. Comme $S_N = 86093440$, on a donc

$$\frac{3^N - 1}{3-1} \cdot 4 = 86093440$$

Il s'ensuit que $3^N = 43046721$ et donc, que $N = 16$.

Exercice 31 Comme $S_N = 315$, on a

$$\frac{2^N - 1}{2-1} \cdot 5 = 315$$

d'où $2^N = 64$ et donc, $N = 6$. Ainsi $g_6 = 2^5 \cdot 5 = 160$.

Exercice 32 Notons les trois nombres A, qA et $q^2 A$. On sait que (1) : $A + qA + q^2 A = 248$ et que (2) : $q^2 A - A = 192$. On en déduit le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
(1 + q + q^2) \cdot A & = & 248 \\
(q^2 - 1) \cdot A & = & 192
\end{array} \right.$$

En divisant ces deux équations, on obtient

$$\frac{1 + q + q^2}{q^2 - 1} = \frac{248}{192} = \frac{31}{24}$$

c'est-à-dire l'équation

$$24 + 24q + 24q^2 = 31q^2 - 31$$

qui s'écrit aussi

$$7q^2 - 24q - 55 = 0$$

et se laisse factoriser sous la forme

$$(q - 5) \cdot (7q + 11) = 0$$

On en déduit que $q = 5$ ou $q = -\frac{11}{7}$.
Si $q = 5$, alors la deuxième équation du système s'écrit $24A = 192$, d'où les trois nombres 8, 40 et 200.
Si $q = -\frac{11}{7}$, alors la deuxième équation du système s'écrit $\frac{72}{49}A = 192$, d'où les trois nombres $\frac{392}{3}$, $-\frac{616}{3}$ et $\frac{968}{3}$.

Exercice 33 Posons C_n la consommation mondiale en $1970 + n$.

a) On a alors $C_n = 1{,}087^{n-1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{12}$.

b) Comme

$$S_N = \frac{1{,}087^N - 1}{1{,}087 - 1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{12}$$

on résout

$$\begin{aligned}
\tfrac{1{,}087^N - 1}{1{,}087 - 1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{12} &= 5 \cdot 10^{13} \\
1{,}087^N &= \tfrac{50}{1{,}3} \cdot 0{,}087 + 1 \\
1{,}087^N &= 4{,}346 \\
N &= \tfrac{\log 4{,}346}{\log 1{,}087} \\
N &\cong 17{,}61
\end{aligned}$$

Ainsi $n = 18$ et les réserves connues seront épuisées en 1988.

c) On résout cette fois

$$\begin{aligned}
\tfrac{1{,}087^N - 1}{1{,}087 - 1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{12} &= 45 \cdot 10^{13} \\
1{,}087^N &= \tfrac{450}{1{,}3} \cdot 0{,}087 + 1 \\
1{,}087^N &= 31{,}11 \\
N &= \tfrac{\log 31{,}11}{\log 1{,}087} \\
N &\cong 41{,}21
\end{aligned}$$

Ainsi $n = 42$ et les réserves connues seront épuisées en 2012.

Exercice 34* Notons S_N la somme (au sens financier) en compte au début de l'année N. On a alors

$$\begin{aligned}
S_1 &= 12000 \\
S_2 &= 1{,}0375 \cdot S_1 + 12000 = 12000 + 1{,}0375 \cdot 12000 \\
S_3 &= 1{,}0375 \cdot S_2 + 12000 = 12000 + 1{,}0375 \cdot 12000 + 1{,}0375^2 \cdot 12000
\end{aligned}$$

On observe que S_3 est la somme (au sens arithmétique) des trois premiers termes d'une progression géométrique de raison 1,0375 et de premier terme 12000. Au début de l'année 28, on aura donc en compte la somme des 28 premiers termes de cette même progression. Autrement dit

$$S_{28} = \frac{1{,}0375^{28} - 1}{1{,}0375 - 1} \cdot 12000 = 577050{,}55$$

Le montant à la fin de l'année 27 sera donc cette dernière valeur de laquelle on retranche la 28^e annuité, c'est-à-dire 565050,50 francs.

De manière plus générale, si l'on pose $t = 3{,}75\%$ pour le taux d'intérêt, $q = 1 + t = 1{,}0375$ et $A = 12000$ pour l'annuité, la somme en compte au début de l'année N est donnée par la formule

$$\boxed{S_N = \frac{q^N - 1}{q - 1} \cdot A = \frac{(1+t)^N - 1}{t} \cdot A}$$

Exercice 35* Notons D_N la dette résiduelle au terme de la N^e année. On a alors

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & 1{,}045 \cdot 100000 - 8000 \\ D_2 & = & 1{,}045 \cdot D_1 - 8000 = 1{,}045^2 \cdot 100000 - 1{,}045 \cdot 8000 - 8000 = 1{,}045^2 \cdot 100000 - (8000 + 1{,}045 \cdot 8000) \\ D_3 & = & 1{,}045 \cdot D_2 - 8000 = 1{,}045^3 \cdot 100000 - 1{,}045^2 \cdot 8000 - 1{,}045 \cdot 8000 - 8000 \\ & = & 1{,}045^3 \cdot 100000 - (8000 + 1{,}045 \cdot 8000 + 1{,}045^2 \cdot 8000) \end{array}$$

On constate que D_3 s'écrit comme la différence entre, d'une part $1{,}045^3 \cdot 100000$ (le montant dû en l'absence de remboursement) et d'autre part la somme $8000 + 1{,}045 \cdot 8000 + 1{,}045^2 \cdot 8000$ des trois premiers termes d'une progression géométrique (les versements et leurs intérêts). À la fin de la neuvième année, la somme résiduelle sera donc égale à

$$D_9 = 1{,}045^9 \cdot 100000 - \frac{1{,}045^9 - 1}{1{,}045 - 1} \cdot 8000 = 62192{,}60$$

De manière générale, si t est le taux d'intérêt, $q = 1 + t$, si A est l'amortissement annuel, si D_0 est la dette initiale et si D_N désigne la dette résiduelle après n années, alors

$$\boxed{D_N = q^N \cdot D_0 - \frac{q^N - 1}{q - 1} \cdot A = (1+t)^N \cdot D_0 - \frac{(1+t)^N - 1}{t} \cdot A}$$

Exercice 36* On peut sans autre reprendre la formule précédente avec $D_N = 0$ et isoler A pour obtenir

$$\boxed{A = \frac{q^N \cdot (q-1)}{q^N - 1} \cdot D_0 = \frac{(1+t)^N \cdot t}{(1+t)^N - 1} \cdot D_0}$$

Ici $D_0 = 20000$, $N = 10$ et $t = 7{,}75\%$. Il s'ensuit que

$$A = \frac{1{,}0775^{10} \cdot 0{,}0775}{1{,}0775^{10} - 1} \cdot 200000 = 29470{,}70$$

Exercice 37* Posant $D_N = 0$ dans la formule précédente, on obtient la relation

$$q^N \cdot D_0 = \frac{q^N - 1}{t} \cdot A$$

de laquelle on tire

$$\begin{array}{rcl} q^N \cdot t \cdot D_0 & = & q^N A - A \\ q^N \cdot t \cdot D_0 - q^N A & = & -A \\ q^N (t \cdot D_0 - A) & = & -A \\ q^N & = & \dfrac{A}{A - t \cdot D_0} \end{array}$$

En prenant le logarithme des deux membres, on isole N pour aboutir à

$$\boxed{N = \frac{\log\left(\dfrac{A}{A - t \cdot D_0}\right)}{\log q} = \frac{\log(A) - \log(A - t \cdot D_0)}{\log q}}$$

Ici $A = 42000$, $D_0 = 300000$ $t = 0{,}052$ et $q = 1{,}052$.Il s'ensuit que

$$N = \frac{\log(42000) - \log(42000 - 0{,}052 \cdot 300000)}{\log(1{,}052)} \cong 9{,}16$$

Il faudra donc 10 ans. Pour être précis, à la fin de la neuvième année, la dette résiduelle est égale à

$$D_9 = 1{,}052^9 \cdot 300000 - \frac{1{,}052^9 - 1}{1{,}052 - 1} \cdot 42000 = 6489{,}95$$

un montant qu'on solde pour effacer la dette en 9 ans.

Exercice 38 **a)** $S_\infty = \frac{1}{2/3} \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5$, **b)** $S_\infty = \frac{1}{9/10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9} = 0{,}55555\ldots$, **c)** $S_\infty = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$, **d)** $S_\infty = \frac{1}{99/100} \cdot \frac{12}{100} = \frac{12}{99} = 0{,}12121212\ldots$

Exercice 39 Le n^e saut a pour longueur $L_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0{,}75^{n-1}$.

a) On cherche n tel que $0{,}75^{n-1} < 0{,}01$. On trouve alors $n \cong \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}75} + 1 \cong 17{,}008$. Ainsi $n = 18$.

b) On a $S_{10} = L_1 + L_2 + \cdots + L_{10} = \dfrac{1 - 0{,}75^{10}}{1 - 0{,}75} = 3{,}7747$.

c) $S_\infty = \dfrac{1}{1 - 0{,}75} = 4$.

Exercice 40 Posons C_n, respectivement A_n les montants versés l'année $2000 + n$ à la fondation culturelle, respectivement à l'association sportive.

a) Il est clair que $C_8 = 325000 + 7 \cdot 12000 = 409000$ et que $A_8 = 1{,}05^7 \cdot 240000 = 337704{,}10$.

b) On a $C_1 + C_2 + \cdots + C_{10} = 10 \cdot 325000 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 12000 = 3790000$.
Puis $A_1 + A_2 + \cdots + A_{10} = \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} \cdot 240000 = 3018694{,}20$.

Exercice 41 On pose S_N la somme sur ce compte au début de l'année $1990 + N$. Il est clair (cf. exercice 34*) que

$$S_{25} = \frac{q^{25} - 1}{q - 1} \cdot A = \frac{1{,}0275^{25} - 1}{0{,}0275} \cdot 100000 = 3528584{,}80$$

a) Total des versements au 1er janvier 2015 : 2400000 francs.

b) Montant du fonds à la même date : 3428584,80 francs.

Exercice 42 Posons (L_n) pour la suite des longueurs des tubes. Il s'agit d'une progression arithmétique de raison 0,65.

a) $L_{23} = 3{,}2 + 22 \cdot 0{,}65 = 17{,}5$ m.

b) $S_{35} = L_1 + L_2 + \cdots + L_{35} = 35 \cdot 3{,}2 + \frac{35 \cdot 34}{2} \cdot 0{,}65 = 498{,}75$ m.

c) On résout $S_N = 787{,}5$, ce qui conduit aux équations

$$\begin{aligned} N \cdot 3{,}2 + \tfrac{N(N-1)}{2} \cdot 0{,}65 &= 787{,}5 \quad | \quad \cdot 2 \\ 6{,}4N + 0{,}65N^2 - 0{,}65N &= 1575 \\ 0{,}65N^2 + 5{,}75N - 1575 &= 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$N = \frac{-5{,}75 \pm \sqrt{5{,}75^2 + 4 \cdot 0{,}65 \cdot 1575}}{1{,}3} = \frac{-5{,}75 \pm 64{,}25}{1{,}2}$$

et donc $N = -53{,}84$ (à rejeter) et $N = 45$. Ainsi 45 tubes soutiennent ce pont.

Exercice 43 Posons H_n pour la production l'année $2010 + n$. Il est clair que $H_n = 1{,}0059^{n-1} \cdot 37{,}5$.

a) On en déduit les productions suivantes

$$\begin{array}{lcl} \underline{2012} & : & H_2 = 37{,}72125 \\ \underline{2013} & : & H_3 = 37{,}9438 \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{2051} & : & H_{41} = 47{,}4486 \end{array}$$

b) On cherche

$$S_{41} = H_1 + H_2 + \cdots + H_{41} = \frac{1{,}0059^{41} - 1}{1{,}0059 - 1} \cdot 37{,}5 = 1733{,}655$$

Exercice 44 La distance d_n est donc une progression arithmétique de raison r, dont on connaît les termes $d_{22} = 20525$ et $d_{32} = 25775$. On en déduit le système

$$\left\{ \begin{array}{lcr|l} d_1 + 21 \cdot r & = & 20525 & (1) \\ d_1 + 31 \cdot r & = & 25775 & (2) \end{array} \right.$$

En effectuant la soustraction (2) − (1), on obtient $10r = 5250$ et donc $r = \boxed{525}$ m est la distance dont il rallonge chaque jour son entraînement. Le premier jour, il court donc une distance

$$d_1 = 20525 - 21 \cdot 525 = \boxed{9500}$$

On en déduit la distance parcourue le n^e jour

$$\boxed{d_n = 9500 + (n-1) \cdot 525}$$

a) Le 40^e jour, il courra ainsi $d_{40} = 9500 + 39 \cdot 525 = \boxed{29975}$ m.

b) On cherche n tel que $d_n = 9500 + (n-1) \cdot 525 = 42195$. On en conclut que

$$n \cong \frac{42195 - 9500}{525} + 1 = 63{,}27.$$

Il dépassera donc la distance du marathon lors du $\boxed{64^e}$ jour d'entraînement.

c) Il s'agit de calculer la somme des 20 distances

$$S_{20} = d_1 + d_2 + \cdots + d_{20} = 20 \cdot 9500 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 \cdot 5250 = \boxed{289750} \text{ m}$$

d) On cherche N tel que $S_N = 148650$, autrement dit, on résout l'équation

$$\begin{array}{rcl|l} N \cdot 9500 + \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N-1) \cdot 525 & = & 148650 & \cdot 2 \\ 19000N + 525N^2 - 525N & = & 297300 & -297300 \\ 525N^2 + 18475N - 297300 & = & 0 & :25 \\ 21N^2 + 739N - 11892 & = & 0 & \end{array}$$

On applique la formule de Viète et on trouve alors

$$N = \frac{-739 \pm \sqrt{739^2 - 4 \cdot 21 \cdot (-11892)}}{42} = \frac{-739 \pm 1243}{42}$$

on en déduit $N = -\frac{991}{21}$ (à rejeter !) et $\boxed{N = 12}$. C'est donc au 12^e jour d'entraînement qu'il aura accumulé cette distance totale.

Exercice 45 Posons $q = 94\% = 0{,}94$, $A = 10000$ et $I = 341725$.

a) On a

$$\begin{aligned} c_1 &= q \cdot I + A = \boxed{331221} \\ c_2 &= q \cdot c_1 + A = q^2 I + A + q \cdot A = \boxed{321348} \\ c_3 &= q \cdot c_2 + A = q^2 I + A + q \cdot A + q^2 A = q^3 I + \frac{1-q^3}{1-q} \cdot A = \boxed{312067} \end{aligned}$$

On en déduit plus généralement que

$$c_n = q^n I + \frac{1-q^n}{1-q} \cdot A = 0{,}94^n \cdot 341725 + \frac{1-0{,}94^n}{0{,}06} \cdot 10000$$

b) Pour $n = 20$, on trouve $c_{20} = \boxed{217452}$.

c) On cherche A tel que $c_{10} = 400000$. D'où

$$\begin{aligned} q^{10} I + \frac{1-q^{10}}{1-q} \cdot A &= 400000 \\ 184058{,}25 + 7{,}6897 \cdot A &= 400000 \\ 7{,}6897 \cdot A &= 215941{,}75 \end{aligned}$$

Ainsi $A \cong \boxed{28082}$

Exercice 46 Notons a_n la distance parcourue pendant la n^e minute. On a $a_1 = \frac{90000}{60} = 1500$. La suite (a_n) est une progression arithmétique de raison 72. Ainsi $a_n = 1500 + (n-1) \cdot 72$.

a) On a $a_{20} = \boxed{2868}$ m.

b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = S_{20} = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_{20}) = 10 \cdot (1500 + 2868) = \boxed{43680}$ m.

c) 240 km/h = 4000 m/min. On cherche alors n tel que

$$\begin{aligned} a_n &\cong 4000 \\ 1500 + (n-1) \cdot 72 &\cong 4000 \\ n &\cong \tfrac{2500}{72} + 1 \cong 35{,}72 \end{aligned}$$

Dès la $\boxed{36^e}$ minute.

Exercice 47

a) Montant disponible au début de l'année $2000 + n$

$$S_N = 400000 + 1{,}525 \cdot 400000 + \cdots + 1{,}525^{N-1} \cdot 400000 = \frac{1{,}0525^N - 1}{1{,}0525 - 1} \cdot 400000$$

Ainsi $S_{10} = 5090255{,}35$. À fin 2009 : $S_{10} - 400000 = \boxed{4690255{,}35}$ francs.

b) On résout

$$\begin{aligned} \frac{1{,}0525^N - 1}{1{,}0525 - 1} \cdot 400000 &= 8000000 \\ 1{,}0525^N - 1 &= 20 \cdot 0{,}0525 \\ 1{,}0525^N &= 2{,}05 \quad | \quad \log(\dots) \\ n \cdot \log(1{,}0525) &= \log(2{,}05) \\ n &= \tfrac{\log(2{,}05)}{\log(1{,}0525)} \cong 14{,}03 \end{aligned}$$

Cela se produit au début de l'année $\boxed{2015}$.

Exercice 48 Avec les hypothèses données, on a $F_n = 146 + (n-1) \cdot r$ et $R_n = 2{,}6 \cdot q^{n-1}$.

a) Détermination des raisons

$F_7 = 183 = 146 + 6r$, d'où $r = \frac{37}{6}$. Puis $R_7 = 7{,}4 = 2{,}6 \cdot q^6$, d'où $q = 1{,}19$. Il s'ensuit que

$F_3 = 146 + 2 \cdot \frac{37}{6} = \boxed{158{,}33}$ et $R_3 = 2{,}6 \cdot 1{,}19^2 = \boxed{3{,}68}$.

b) CHA globaux entre 2001 et 2007

France : $S_7 = 7 \cdot \dfrac{146 + 183}{2} = \boxed{1151{,}5}$

Roumanie : $S_7 = \dfrac{1{,}19^7 - 1}{1{,}19 - 1} \cdot 2{,}6 = \boxed{32{,}56}$.

c) Taux de croissance : $\boxed{19\%}$

d) On cherche n tel que

$$\begin{aligned} 1{,}19^{n-1} \cdot 2{,}6 &= 50 \\ 1{,}19^{n-1} &= \tfrac{50}{2{,}6} \quad | \quad \log(\dots) \\ (n-1)\log(1{,}19) &= \log(19{,}23) \\ n &= \frac{\log(19{,}23)}{\log(1{,}19)} + 1 \cong 17{,}99 \end{aligned}$$

Ainsi $n = 18$ et cela se produira en $\boxed{2018}$.

Exercice 49 Notons a_n la distance parcourue durant la n^e seconde.

a) $a_5 = 4{,}9 + 4 \cdot 9{,}8 = \boxed{44{,}1}$ m.

b) $S_5 = 5 \cdot \dfrac{4{,}9 + 44{,}1}{2} = \boxed{122{,}5}$ m.

c) On applique la formule

$$\begin{aligned} S_N &= N \cdot a_1 + \frac{N(N-1)}{2} \cdot r \\ 313{,}6 &= 4{,}9N + N \cdot (N-1) \cdot \tfrac{9{,}8}{2} \quad | \quad : 4{,}9 \\ 64 &= N^2 \end{aligned}$$

Ainsi $N = 8$. La bille touche donc le sol après $\boxed{8}$ secondes.

Exercice 50 Notons S_N la somme sur le carnet au début de l'année N. On en déduit que

$$S_N = \frac{1{,}025^N - 1}{1{,}025 - 1} \cdot 20000 = (1{,}025^N - 1) \cdot 800000$$

a) Comme $S_{18} = (1{,}025^{18} - 1) \cdot 800000 = 447726{,}95$, on lui remet $S_{18} - 20000 = \boxed{427726{,}95}$

b) On résout

$$\begin{aligned} (1{,}025^N - 1) \cdot 800000 &= 200000 \quad | \quad : 800000 \\ 1{,}025^N - 1 &= 0{,}25 \quad | \quad +1 \\ 1{,}025^N &= 1{,}25 \quad | \quad \log(\dots) \\ N &= \frac{\log(1{,}25)}{\log(1{,}025)} \cong 9{,}03 \end{aligned}$$

Cela se produira à son $\boxed{10^e}$ anniversaire.

Exercice 51 Posons $D_0 = 150000$, $A = 13000$, $t = 0{,}065$ $q = 1{,}065$ et notons D_N la dette résiduelle après N années. On va utiliser la formule

$$D_N = q^N \cdot D_0 - \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

a) On a

$$D_{11} = 1{,}065^{11} \cdot 150000 - \frac{1{,}065^{11} - 1}{0{,}065} \cdot 13000 = \boxed{100042{,}40}$$

b) Comme $D_{10} = 0$, on en déduit que

$$A = \frac{q^{10}(q-1)D}{q^{10} - 1} = \frac{1{,}065^{10} \cdot 0{,}065 \cdot 150000}{1{,}065^{10} - 1} = \boxed{20865{,}70}$$