MATHÉMATIQUES 3 : partie 2

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Maxime Zuber, Dr ès sciences

Haute École de Gestion Arc, février 2015

1 Exercices

Exercice 1 Un nouveau produit est mis en vente dans une chaîne de magasins. Le nombre $N(t)$ d'articles vendus (en milliers) en fonction du temps t (en jours) est approximativement décrit par la relation

$$N(t) = \frac{2400t}{t^2 + 6400}.$$

a) À quel moment le nombre d'articles vendus sera-t-il maximal ?

b) Esquisser la courbe représentant les ventes de ce nouveau produit.

c) Cette courbe admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 2 Dans une région, une caisse maladie assure une part de la population définie par la fonction

$$P(t) = \frac{t}{(1+t)^3}$$

avec t exprimé en années.

a) Quelle part de marché maximale cette caisse a-t-elle atteinte ?

b) Esquisser la courbe représentant l'évolution de sa clientèle.

c) Cette courbe admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 3 Une action cotée en Bourse a une valeur (en euros)

$$V(t) = 100 - 20t \cdot e^{1-\frac{t}{4}}$$

avec t exprimé en semaines.

a) Déterminer les valeurs maximale et minimale de cette action.

b) Esquisser la courbe représentant l'évolution de la valeur de cette action.

c) Cette courbe admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 4 La formule

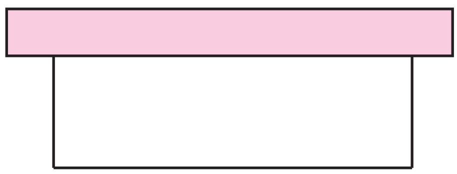
$$T(t) = \frac{t^2}{9} \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot t}$$

décrit le pourcentage du chiffre d'affaires d'une entreprise réalisé au travers des ventes d'un de ces produits phares en fonction du temps t exprimé en mois.

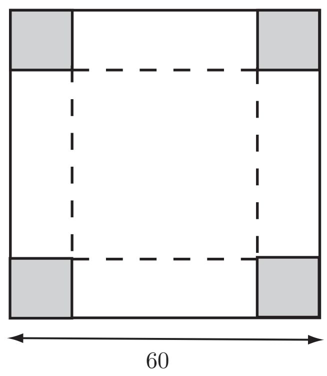
a) Quelle part maximale du chiffre d'affaires de cette société a-t-elle été réalisée au travers des ventes de ce produit ?

b) Esquisser la courbe représentant la fonction T.

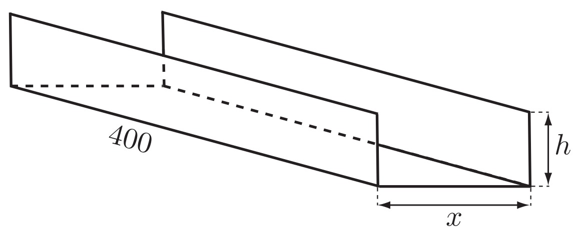
Exercice 5 On dispose de barrières d'une longueur totale de 20 mètres pour construire un enclos rectangulaire le long d'un mur rectiligne. Quelles dimensions faut-il donner à cet enclos pour que le pré qu'il délimite ait une aire maximale ?



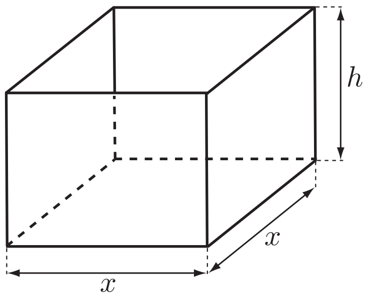
Exercice 6 Avec une plaque de carton carrée de 60 cm de côté, on fabrique une boîte en forme de parallélépipède rectangle sans couvercle. Quelles dimensions donner à cette boîte si l'on veut qu'elle ait un volume maximal ?



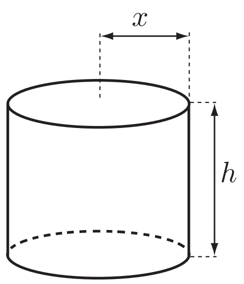
Exercice 7 Une plaque de métal rectangulaire longue de 4 mètres et large de 40 centimètres est pliée de sorte à former une gouttière en forme de parallélépipède rectangle. Quelles dimensions faut-il donner à cette gouttière si l'on veut qu'elle ait un volume maximal ?



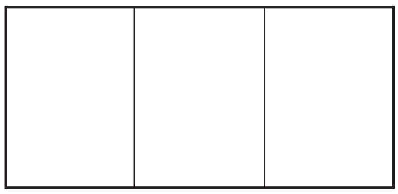
Exercice 8 L'intérieur d'un réservoir sans couvercle, dont le fond a la forme d'un carré, doit être recouvert d'un produit imperméable. La capacité du réservoir est de 32 litres. Déterminer les dimensions du réservoir qui rendent minimale la quantité de produit à utiliser.



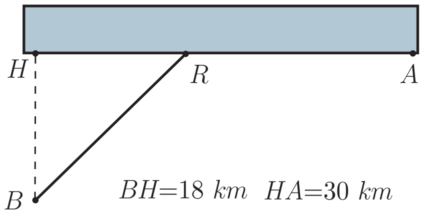
Exercice 9 Quelles doivent être les dimensions d'une boîte cylindrique contenant un litre dont la construction requiert le minimum de fer blanc ?



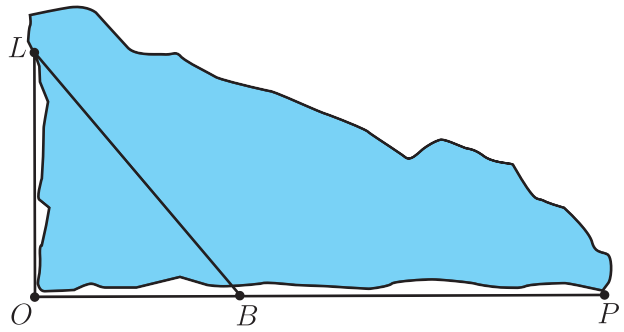
Exercice 10 On veut construire une halle d'exposition de forme rectangulaire et d'une surface de 200 mètres carrés. À l'intérieur, deux murs sépareront le bâtiment en trois salles d'égale grandeur. Le coût des murs extérieurs est six fois plus élevé que celui des murs intérieurs. Quelles dimensions donner à cette salle pour que sa construction soit la moins coûteuse ?



Exercice 11 Une compétition sportive consiste à se déplacer d'un bateau B à un point d'arrivée A en suivant à la nage et à vélo l'itinéraire de son choix. Un concurrent se déplace à la nage à la vitesse de 3 km/h alors qu'il parcourt 20 km/h sur son vélo. Déterminer la position R où ce sportif doit accoster s'il entend réaliser le meilleur temps dans ces conditions.

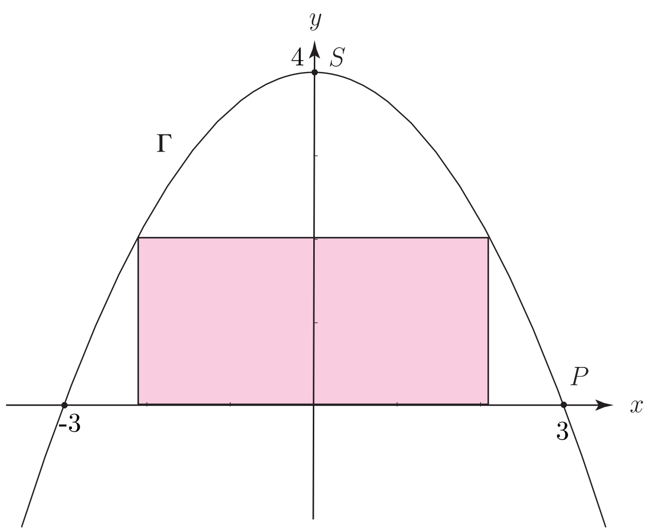


Exercice 12 En journée, lorsqu'un oiseau survole une étendue d'eau, il dépense 50% d'énergie en plus que pour un vol de même longueur au-dessus de la terre ferme. Ainsi, pour des raisons physiques (courants descendants de convexion, humidité de l'air, etc), si l'oiseau dépense c calories par kilomètre de vol au-dessus du sol, il en consommera 1,5 c en survolant l'eau.



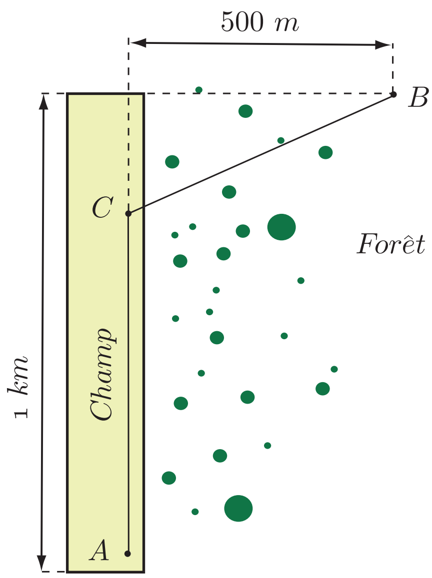
On lâche un pigeon voyageur en un point L au bord d'un lac et on observe que l'oiseau regagne son pigeonnier P en suivant une trajectoire rectiligne LBP qui passe par un point B de la rive, de telle sorte que l'énergie totale requise pour le vol est minimale. Sachant que $OL = 3$ km et que $OP = 7$ km, on cherche à déterminer la position du point B en calculant la distance OB.

Exercice 13 Soit Γ la parabole de sommet $S(0;4)$ passant par le point $P(3;0)$. Quel est, dans le premier quadrant, le rectangle d'aire maximale inscrit sous cette parabole et ayant un côté parallèle à l'axe Ox ?



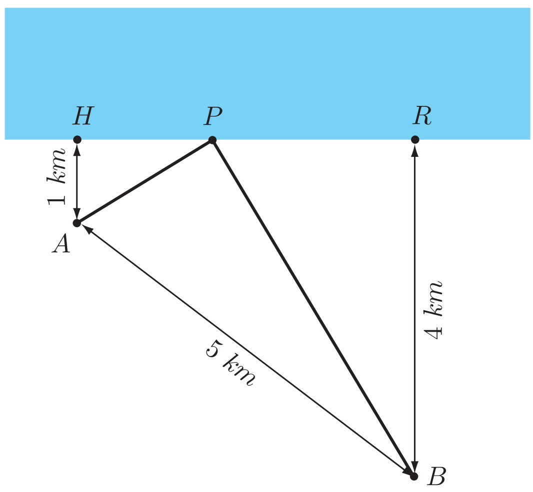
Exercice 14 La résistance d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle à la largeur et au carré de la hauteur de sa section. Quelle est la poutre de résistance maximale qui peut être taillée dans une pièce de bois de section circulaire de 20 cm de rayon ?

Exercice 15 On construit un chemin conduisant d'une maison A, située en lisière de forêt, à une cabane de bûcherons B à l'intérieur d'une forêt, comme l'indique la figure suivante. En lisière de forêt, le mètre courant de chemin revient à 300 francs alors qu'en forêt un mètre coûte 500 francs. Déterminer en quel point C il s'agit de bifurquer dans la forêt pour obtenir un tracé aux moindres coûts.



Exercice 16 Une feuille de papier doit contenir 120 centimètres carrés de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir chacune 2 centimètres et celles des côtés 1 centimètre. Déterminer les dimensions de la feuille pour lesquelles on utilise le moins de papier pour l'impression.

Exercice 17 Deux usines A et B distantes de 5 km sont situées respectivement à 1 km et 4 km d'un cours d'eau. Trouver l'emplacement d'une station de pompage P, au bord de la rivière, qui rende minimale la longueur totale $AP + PB$ des conduites desservant les deux usines.



Exercice 18 Une société fabrique des canettes cylindriques destinées à contenir différentes boissons d'une quantité de 355 ml. Le couvercle revient à 6 centimes par centimètre carré et le métal restant à 2 centimes par centimètre carré. Déterminer les dimensions de la canette qui rendent le coût de fabrication minimal.

2 Solutions

Exercice 1 La dérivée

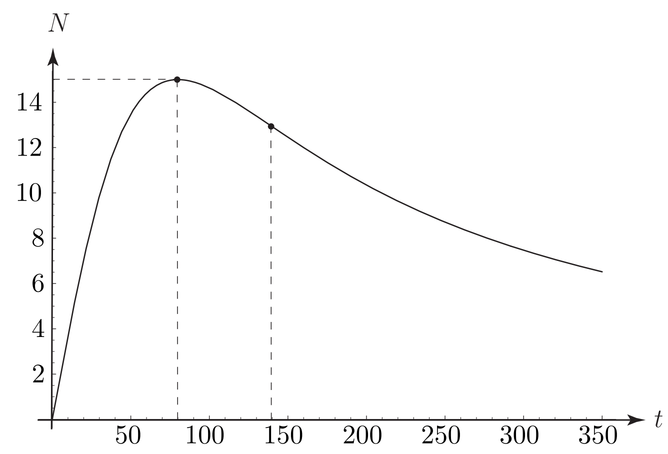
$$N'(t) = \frac{2400(t^2+6400) - 2t(2400t)}{(t^2+6400)^2} = 2400 \cdot \frac{(6400-t^2)}{(t^2+6400)^2}$$

s'annulant quand $6400 - t^2 = 0$, c'est-à-dire pour $t = 80$ (ici $t \geq 0$), on enregistre un volume de vente maximal le 80e jour. Ce jour-là, on vend un nombre d'articles égal à $N(80) = 15$ milliers. Notons que $N(t) \geq 0$, $N(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$. Comme le graphe de N possède un unique point à tangente horizontale, il ne peut s'agir que d'un maximum.

Calculons la deuxième dérivée

$$N''(t) = 2400 \cdot \frac{-2t(t^2+6400)^2 - (6400-t^2)2(t^2+6400)2t}{(t^2+6400)^4} = 2400 \cdot \frac{2t^2 - 38400t}{(t^2+6400)^3} = \frac{4800t(t^2-19200)}{(t^2+6400)^3}.$$

Elle s'annule quand $t = 0$ (sans intérêt ici) et quand $t^2 - 19200 = 0$, c'est-à-dire quand $t = \sqrt{19200} \cong 138{,}56$. La courbe des ventes s'infléchit donc entre le 138e et le 139e jour. Ceci se confirme sur le graphe de la fonction N.



Exercice 2 La fonction P est toujours positive ; elle s'annule en 0 et tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Si elle a un point a tangente horizontale, il ne peut s'agir que d'un maximum. Comme

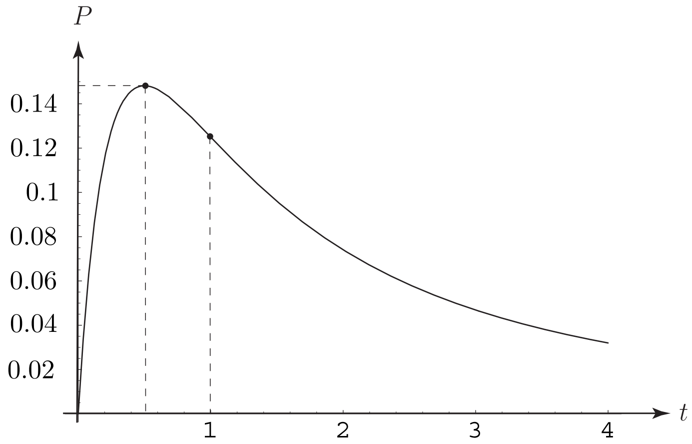
$$P'(t) = \frac{(1+t)^3 - 3t(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{1-2t}{(1+t)^4},$$

la dérivée s'annule quand $1 - 2t = 0$, c'est-à-dire pour $t = \frac{1}{2}$. Notons que $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}1481$. La part de marché atteint donc un niveau maximal de 14,81% après 6 mois.

La deuxième dérivée

$$P''(t) = \frac{-2(1+t)^4 - (1-2t)4(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{6(t-1)}{(1+t)^5}$$

s'annule pour $t = 1$, qui est l'abscisse du point d'inflexion.



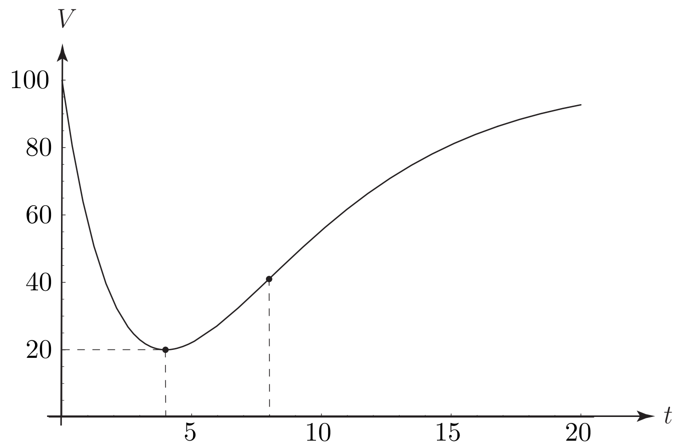
Exercice 3 Comme $20t \cdot e^{1-\frac{t}{4}} \geq 0$, il est clair que 100 euros est la valeur maximale de $V(t)$. La dérivée

$$V'(t) = -20 \cdot e^{1-\frac{t}{4}} - 20t \cdot e^{1-\frac{t}{4}} \left(-\frac{1}{4}\right) = 5(t-4) \cdot e^{1-\frac{t}{4}}$$

s'annule en $t = 4$. Il s'ensuit que $V(4) = 20$ euros est la valeur minimale de l'action. On se convainc qu'il s'agit bien d'un minimum en calculant la deuxième dérivée

$$V''(t) = 5e^{1-\frac{t}{4}} + 5(t-4) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot e^{1-\frac{t}{4}} = \frac{5}{4} \cdot e^{1-\frac{t}{4}} \cdot (8-t).$$

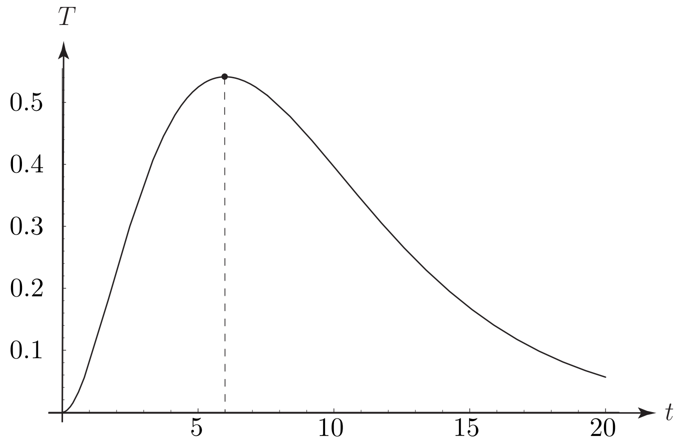
En effet, $V''(4) = 5 > 0$. La courbe est donc convexe en $t = 4$. Notons que cette courbe admet un point d'inflexion en $t = 8$.



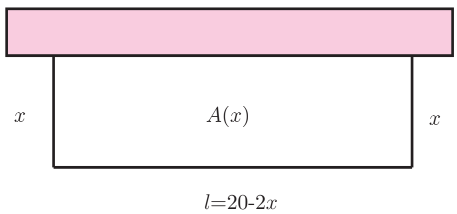
Exercice 4 Il est clair que $T(t) \geq 0$. De plus, $T(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty} T(t) = 0$. Ainsi, si T possède un extremum, cela ne peut être qu'un maximum. La dérivée

$$T'(t) = \frac{2t}{9} \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot t} + \frac{t^2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot t} = \frac{t}{27} \cdot (6-t) \cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot t}$$

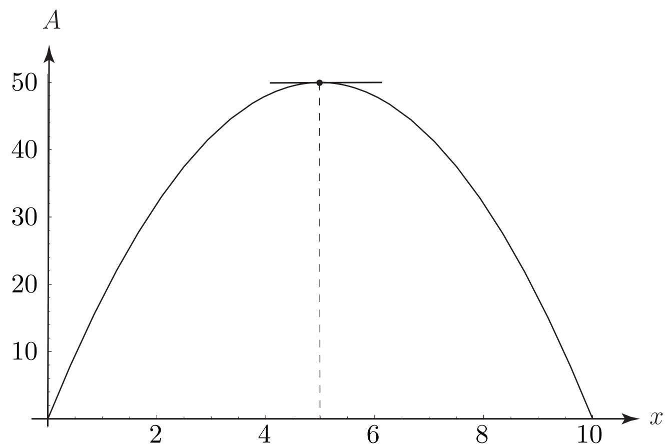
s'annule en $t = 0$ et en $t = 6$. La valeur maximale prise par T vaut donc $T(6) \cong 54{,}13\%$.



Exercice 5 Les variables x et l, décrivant la largeur et la longueur de l'enclos, sont liées par la contrainte $2x + l = 20$. Ainsi $l = 20 - 2x$.

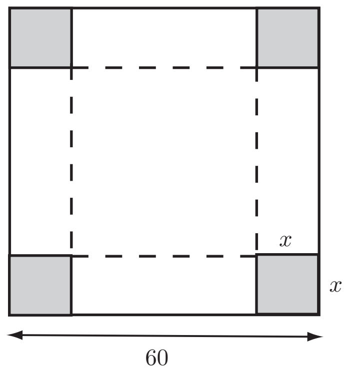


L'aire du pré $A = x \cdot l$ est alors décrite par une fonction $A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x$ définie pour $x \in [0; 10]$. Comme sa dérivée $A'(x) = -4x + 20$ s'annule en $x = 5$, et comme $A''(x) = -4 < 0$, la fonction A atteint un maximum en 5. L'enclos de dimensions 5×10 a donc une aire maximale.



Exercice 6 Si l'on pose x pour le côté des quatre carrés à détacher, le volume $V(x)$ de la boîte est donné par

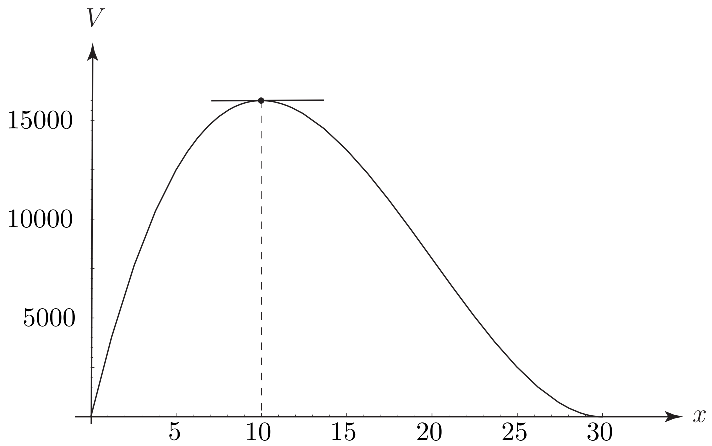
$$V(x) = x \cdot (60 - 2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x.$$



Notons que V est une fonction positive qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 30$. La dérivée

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 12(x - 10) \cdot (x - 30)$$

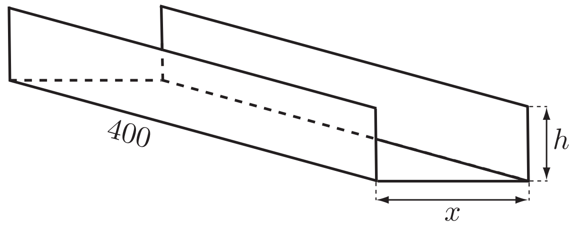
s'annule en $x = 10$ ($x = 30$ est à exclure). Ainsi la fonction V, qui n'admet dans $]0;30[$ qu'un seul point à tangente horizontale, est maximale pour $x = 10$. La boîte de volume maximal a donc pour dimensions $40 \times 40 \times 10$.



Exercice 7 Les dimensions x et h sont liées par la relation $2h + x = 40$. Ainsi $h = 20 - \frac{1}{2} \cdot x$. Le volume de la gouttière est alors donné par

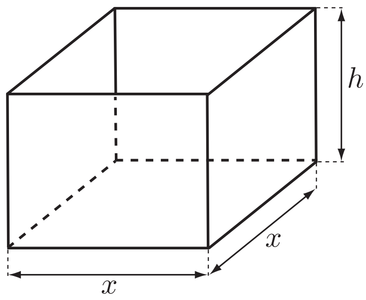
$$V(x) = 400 \cdot x \cdot h = 400 \cdot x \cdot \left(20 - \frac{1}{2} \cdot x\right) = 8000x - 200x^2.$$

Comme $V'(x) = -400x + 8000$, la dérivée s'annule pour $x = 20$. Il s'agit bien d'un maximum car la fonction volume $V(x)$ est représentée par une parabole concave. On a alors $h = 10$. La gouttière a donc pour dimensions : $20 \times 400 \times 10$ (en centimètres).

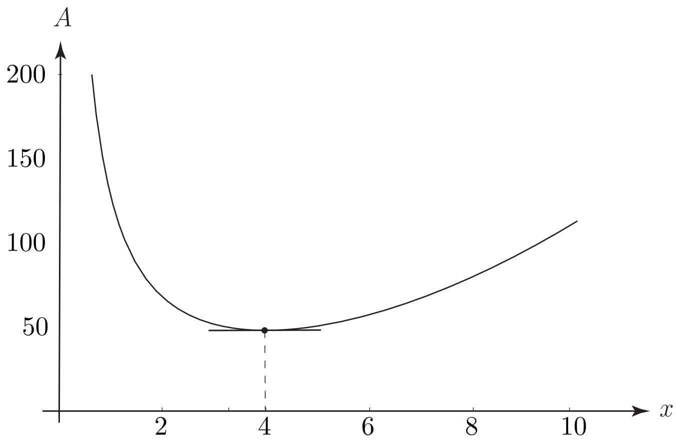


Exercice 8 Le côté x de la base et la hauteur h sont liés par la contrainte $h \cdot x^2 = 32$. Il s'ensuit que $h = \frac{32}{x^2}$. L'aire de la surface à peindre s'exprime alors

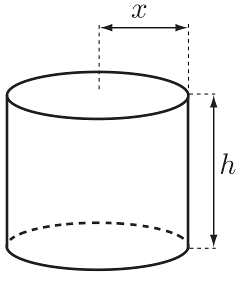
$$A(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot h = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}.$$



La dérivée $A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$ s'annule quand $2x = \frac{128}{x^2}$ ou quand $x^3 = 64$, c'est-à-dire pour $x = 4$. Comme $A''(x) = 2 + \frac{256}{x^3} > 0$, la fonction A est convexe partout. L'extremum trouvé est donc bien un minimum. Les dimensions du réservoir en décimètres sont : $4 \times 4 \times 2$.



Exercice 9 La hauteur h et le rayon x de la boîte sont liés par la relation $\pi x^2 h = 1$. Ainsi $h = \frac{1}{\pi x^2}$.



La quantité de matière $A(x)$ est l'aire de la surface totale du cylindre.

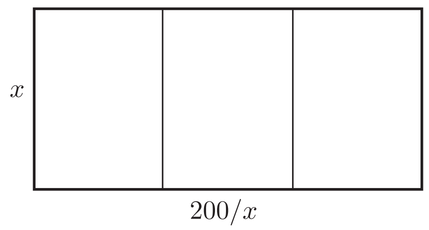
$$A(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}.$$

La dérivée

$$A'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2}$$

s'annule quand $x^3 = \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire pour $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \cong 0{,}54$ dm. On a alors $h = \frac{1}{\pi} \cdot (2\pi)^{2/3} = 2x \cong 1{,}08$ dm. Comme $A''(x) = 4\pi + \frac{4}{x^3} > 0$, la fonction A est convexe et l'extremum trouvé est bien un minimum.

Exercice 10 Soit x la largeur et $\frac{200}{x}$ la longueur de la salle.



Le coût de construction $C(x)$ est donné par

$$C(x) = 2x \cdot u + 2x \cdot 6u + 2 \cdot \frac{200}{x} \cdot 6u = u \cdot \left[14x + \frac{2400}{x}\right],$$

u étant le prix de construction d'un mètre de mur intérieur. La construction sera la moins coûteuse quand la parenthèse

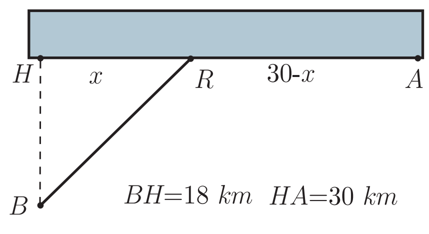
$$P(x) = 14x + \frac{2400}{x}$$

prendra une valeur minimale. Ce sera le cas quand la dérivée

$$P'(x) = 14 - \frac{2400}{x^2}$$

s'annule, donc quand $x = \sqrt{\frac{2400}{14}} \cong 13{,}1$. La salle a donc pour dimensions 13,10 m $\times$ 15,30 m. Comme $P(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 0 et $+\infty$, comme $P(x)$ est toujours positive, l'unique point à tangente horizontale ne peut être qu'un minimum.

Exercice 11 Soit x la distance de H à R. Il est clair alors que $AR = 30 - x$ et que, par Pythagore, $BR = \sqrt{18^2 + x^2} = \sqrt{324 + x^2}$.



La durée totale du parcourt s'exprime sous la forme

$$D(x) = \frac{BR}{3} + \frac{RA}{20} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{324 + x^2} + \frac{1}{20} \cdot (30 - x).$$

Calculons la dérivée

$$D'(x) = \frac{x}{3\sqrt{324 + x^2}} - \frac{1}{20}.$$

Celle-ci s'annule quand

$$\frac{x}{3\sqrt{324 + x^2}} = \frac{1}{20}$$

ou

$$20x = 3\sqrt{324 + x^2}.$$

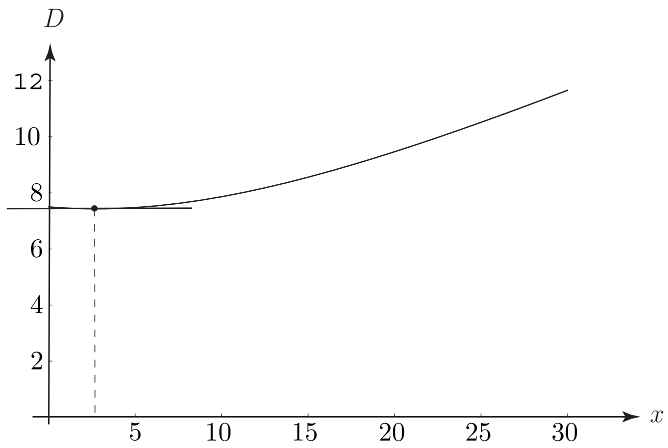
On élève au carré

$$400x^2 = 9 \cdot (324 + x^2)$$

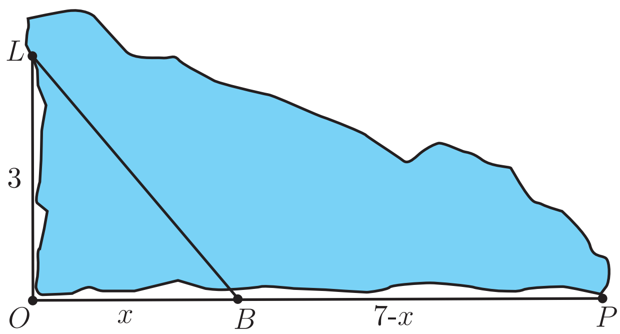
et on trouve alors $391x^2 = 2916$, d'où $x = \sqrt{\frac{2916}{391}} \cong 2{,}7309$ km. Notons que

$$D''(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{324 + x^2} - x \cdot \frac{3x}{\sqrt{324+x^2}}}{9(324 + x^2)} = \frac{3 \cdot (324 + x^2) - 3x^2}{9 \cdot (324 + x^2)^{3/2}} = \frac{108}{(324 + x^2)^{3/2}}.$$

Comme $D''(x) > 0$, la fonction D est convexe et l'extremum trouvé est donc bien un minimum.



Exercice 12 Si on pose $OB = x$, alors $LB = \sqrt{9 + x^2}$.



L'énergie dépensée s'exprime alors sous la forme

$$E(x) = 1{,}5 \cdot c \cdot \sqrt{x^2 + 9} + c \cdot (7 - x).$$

Sa dérivée

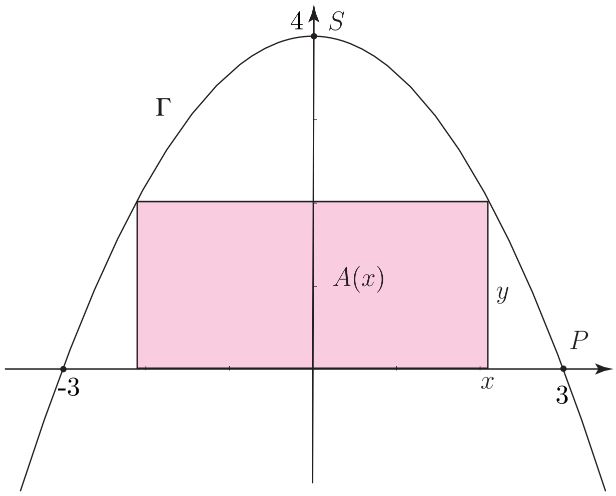
$$E'(x) = \frac{1{,}5 \cdot c \cdot x}{\sqrt{x^2 + 9}} - c$$

s'annule quand $1{,}5 \cdot \cancel{c} \cdot x = \cancel{c} \cdot \sqrt{x^2 + 9}$. En élevant au carré, on obtient $2{,}25x^2 = x^2 + 9$. D'où $\frac{5}{4}x^2 = 9$ ou $x^2 = \frac{36}{5}$ et donc $x = \frac{6}{\sqrt{5}} \cong 2{,}68$ km. On peut montrer qu'il s'agit bien d'un minimum puisque

$$E''(x) = \frac{13{,}5c}{(x^2 + 9)^{3/2}} > 0.$$

Ce qu'on établit plus facilement en constatant que E n'a qu'un extremum, que $E(2{,}68) \cong 10{,}35c$, alors que $E(0) = 11{,}5c$ et $E(7) \cong 11{,}42c$.

Exercice 13 L'équation de Γ a la forme $y = a \cdot (x-3) \cdot (x+3)$. Comme $S(0;4) \in \Gamma$, on doit avoir $4 = -9a$, d'où $y = -\frac{4}{9}$. On a donc $\Gamma : y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$.

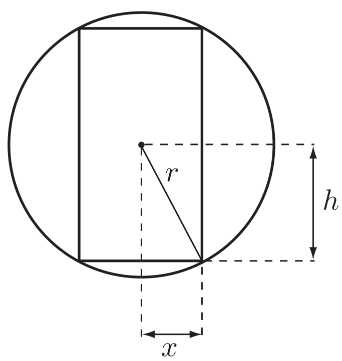


L'aire du rectangle est alors donnée par la fonction

$$A(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot \left(-\frac{4}{9} \cdot x^2 + 4\right) = -\frac{8}{9} \cdot x^3 + 8x,$$

dont la dérivée $A'(x) = -\frac{8}{3} \cdot x^2 + 8$ s'annule pour $x = \sqrt{3}$. Comme $A''(x) = -\frac{16}{3}x < 0$ pour tout $x > 0$, la fonction A est concave et l'extremum est bien un maximum.

Exercice 14 Soit r le rayon du cercle dans lequel est inscrite la section rectangulaire de la poutre de hauteur $2h$ et de base $2x$. Il est clair que $h = \sqrt{r^2 - x^2}$.

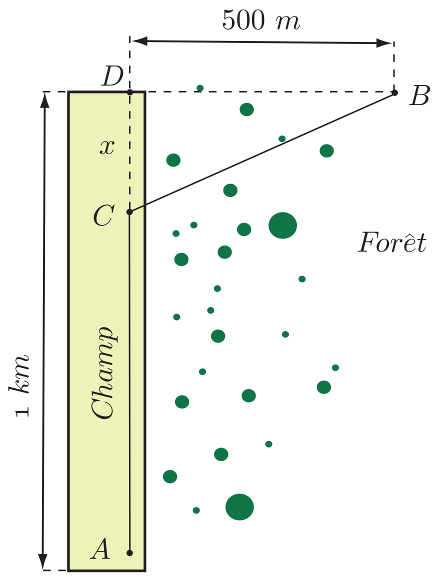


La résistance de la poutre étant proportionnelle à la largeur et au carré de la hauteur de sa section, celle-ci s'exprime par la fonction

$$R(x) = c \cdot 2x \cdot 4h^2 = c \cdot 8x \cdot (r^2 - x^2) = -8c \cdot x^3 + 8cr^2 \cdot x,$$

dont la dérivée $R'(x) = -24c \cdot x^2 + 8cr^2$ s'annule quand $x^2 = \frac{8r^2}{24} = \frac{r^2}{3}$, c'est-à-dire pour $x = \frac{r}{\sqrt{3}} \cong 0{,}577r$. Comme $R''(x) = -48cx < 0$ pour $x > 0$, l'extremum trouvé est bien un maximum. Notons que $h = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot x \cong 0{,}816r$. La section de la poutre est semblable à une feuille de format $A4$.

Exercice 15 Soit x la distance CD exprimée en km. On a alors $CB = \sqrt{x^2 + 0{,}5^2}$.



Le prix de revient du tracé correspondant s'exprime, en kF, sous la forme de la fonction

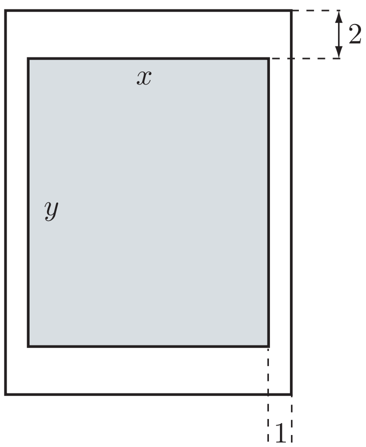
$$P(x) = 300 \cdot (1 - x) + 500 \cdot \sqrt{x^2 + 0{,}25}$$

dont la dérivée

$$P'(x) = -300 + \frac{500}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 0{,}25}} \cdot \cancel{2}x$$

s'annule quand $3\sqrt{x^2 + 0{,}25} = 5x$. En élevant au carré, on obtient $9x^2 + \frac{9}{4} = 25x^2$ ou encore $16x^2 = \frac{9}{4}$. Il s'ensuit que $x = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$. Ainsi $AC = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$ (625 m en lisière de forêt) et $CB = 0{,}625$ (625 m à l'intérieur de la forêt). Notons qu'on a bien trouvé un minimum puisque la fonction positive P n'a qu'un extremum $P(3/8) = 500$ et que $P(0) = 550$ et $P(1) \cong 559{,}02$.

Exercice 16 La largeur x et la hauteur y de la surface imprimée sont liées par la contrainte $x \cdot y = 120$. Ainsi $y = \frac{120}{x}$.

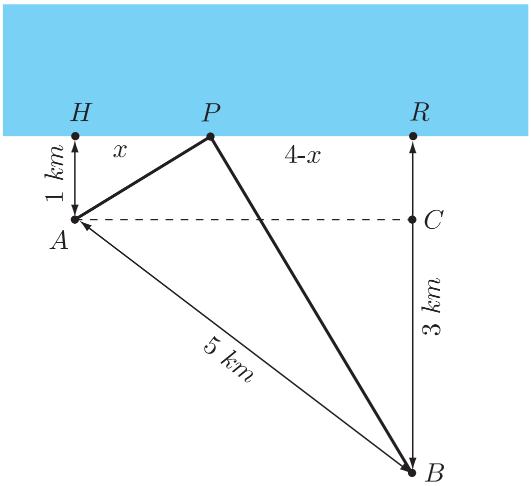


L'aire de la feuille est décrite par la fonction

$$A(x) = (x+2)\cdot(y+4) = (x+2)\cdot\left(\frac{120}{x}+4\right) = 4x + \frac{240}{x} + 128$$

dont la dérivée $A'(x) = 4 - \frac{240}{x^2}$ s'annule quand $x^2 = 60$, c'est-à-dire pour $x = \sqrt{60} \cong 7{,}75$ cm. On a alors $y = \frac{120}{\sqrt{60}} = 2\cdot\sqrt{60} \cong 15{,}5$ cm. La page a donc pour dimensions en cm : $9{,}75 \times 19{,}5$. Comme $P''(x) = \frac{480}{x^3} > 0$, l'extremum trouvé est bien un minimum.

Exercice 17 En vertu du théorème de Pythagore, on sait que $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Si l'on pose $x = HP$, alors $AP = \sqrt{x^2+1}$, $PR = 4-x$ et $PB = \sqrt{4^2 + (4-x)^2}$.



La longueur des conduites s'exprime sous la forme de la fonction

$$L(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{16+(4-x)^2}$$

dont la dérivée s'écrit

$$L'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} + \frac{\cancel{2}(4-x)}{\cancel{2}\sqrt{16+(4-x)^2}}\cdot(-1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{(4-x)}{\sqrt{16+(4-x)^2}}$$

s'annule quand

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{(4-x)}{\sqrt{16+(4-x)^2}} \\
x\cdot\sqrt{16+(4-x)^2} &= (4-x)\cdot\sqrt{x^2+1} \quad \Big|\ (...)^2 \\
x^2\cdot\left(16+(4-x)^2\right) &= (4-x)^2\cdot(x^2+1) \\
16x^2 + x^2(4-x)^2 &= (4-x)^2\cdot x^2 + (4-x)^2 \\
16x^2 &= (4-x)^2
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $4x = 4-x$ d'où $x = \frac{4}{5}$ ou que $-4x = 4-x$, d'où $x = -\frac{4}{3}$ (solution à rejeter). Il s'agit bien d'un minimum puisque la fonction n'a qu'un extremum $L(0{,}8) \cong 6{,}4$ et puisque $L(0) = 6{,}66$ et $L(4) \cong 8{,}12$.