MATHÉMATIQUES 3 : partie 3

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Maxime Zuber, Dr ès sciences

Haute École de Gestion Arc, septembre 2013

1 Introduction

Dans d'innombrables situations, une grandeur z varie en fonction non pas d'une mais de plusieurs variables indépendantes x_1, x_2, ... x_n. On note alors $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, relation dans laquelle f désigne la fonction liant z aux variables dont elle dépend.

1.1 Exemples

– La relation

$$\boxed{z = f(t; n; C) = (1 + t)^n \cdot C}$$

exprime le capital z produit par un montant initial C placé sur un compte servant un intérêt t pendant n années. Pour chaque triplet (t, n, C), la fonction f prend une valeur déterminée par la formule $(1+t)^n \cdot C$. On a, par exemple $f(0{,}05; 10; 500) = 1{,}05^{10} \cdot 500 = 814{,}4473$ ou $f(0{,}04; 6; 1000) = 1{,}04^6 \cdot 1000 = 1265{,}32$.

– L'aire z d'un triangle s'exprime en fonction de la base x et de la hauteur y par la relation

$$\boxed{z = f(x; y) = \frac{x \cdot y}{2}}$$

– La moyenne géométrique z de deux nombres positifs x et y est définie par la formule

$$\boxed{z = f(x; y) = \sqrt{x \cdot y}}$$

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude de fonctions de deux variables, tous les résultats valables dans ce cas s'étendant aux dimensions supérieures.

2 Définitions

2.1 Domaine de définition

Une fonction f de deux variables est une correspondance

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x; y) & \mapsto & f(x; y) = z \end{array}$$

Le *domaine de définition* D_f de la fonction est l'ensemble des couples de nombres $(x; y)$ pour lesquels $f(x; y)$ est bien défini (c'est-à-dire existe, est calculable).

Exemple La fonction $f(x; y) = \sqrt{x \cdot y}$ n'est définie que pour l'ensemble D_f des couples dont les deux composantes ont le même signe et donc, pour lesquels $x \cdot y \geq 0$.

Exercice 1 La quantité produite d'un certain type de bien s'exprime comme une fonction Q du capital K et de la main-d'oeuvre L à disposition. Cette fonction est définie par $Q(K, L) = 200 \cdot K^{0,6} \cdot L^{0,4}$. Déterminer la production correspondant à 500 unités de capital et 1000 travailleurs.

Exercice 2 Par temps chaud, l'humidité de l'air modifie notablement la sensation de chaleur qu'éprouvent les gens. Afin de quantifier cet effet, des météorologues canadiens ont créé *l'indice humidex* I défini par la formule

$$I(T, H) = 1{,}98T - 0{,}61 \cdot (1 - H)(1{,}8T - 26) - 14{,}2$$

dans laquelle T décrit la température ambiante en degrés Celsius et H, le degré d'humidité. Evaluer l'indice I dans chacune des conditions suivantes :

a) 28,5° et 52% d'humidité

b) 28,5° et 80% d'humidité

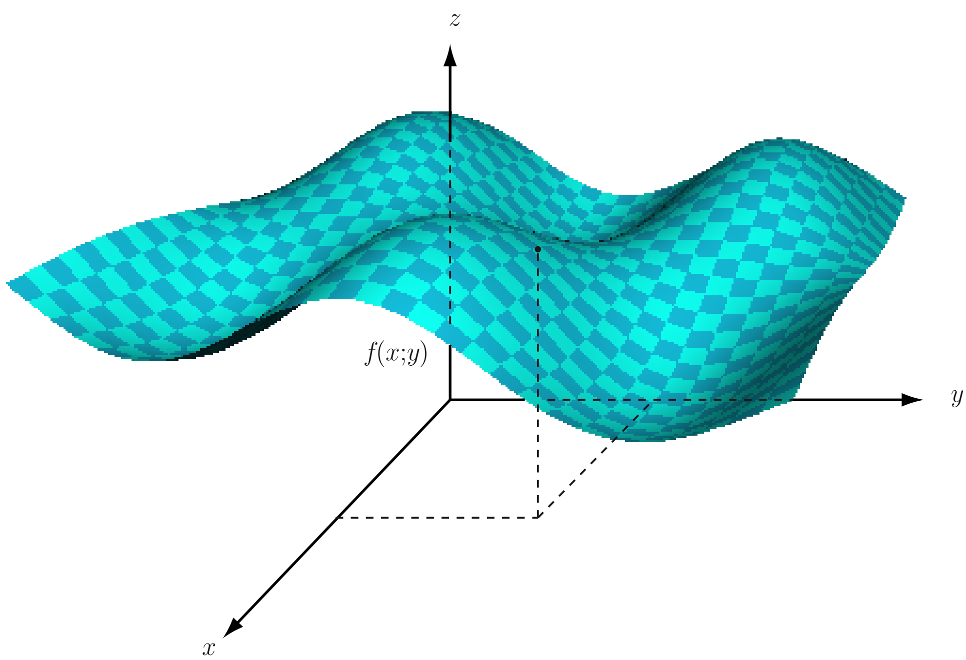
c) 33,0° et 31% d'humidité.

2.2 Graphe et représentations graphiques

Le *graphe* d'une fonction f est l'ensemble

$$G_f = \{\ (x; y; z) \mid z = f(x; y)\ \} \subset \mathbb{R}^3$$

des triplets $(x; y; f(x; y))$ dont la troisième composante est l'image par la fonction f du couple des deux premières. À tout élément $(x; y; z)$ du graphe, on peut faire correspondre le point de l'espace ayant x, y et z pour coordonnées. L'ensemble de tous ces points forme une surface constituant la *représentation graphique* de f



Courbes de niveaux Une autre méthode de visualisation du graphe consiste à représenter les *courbes de niveaux* associées. La courbe de niveau

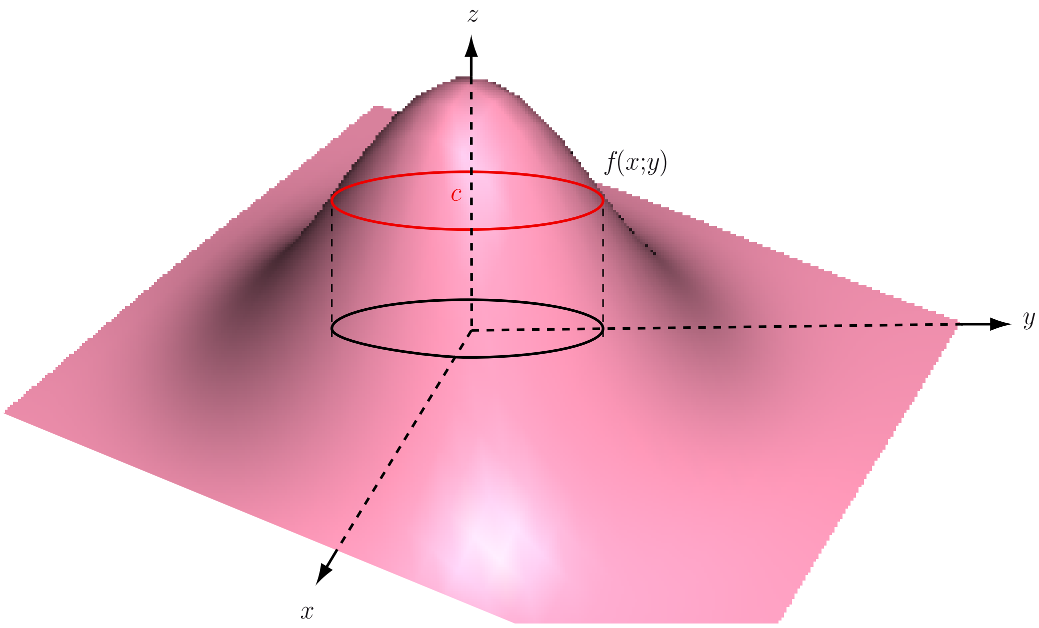
$$\mathcal{C}\ :\ f(x; y) = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

est l'ensemble des points $(x; y)$ du plan pour lesquels $f(x; y) = c$ est constant.

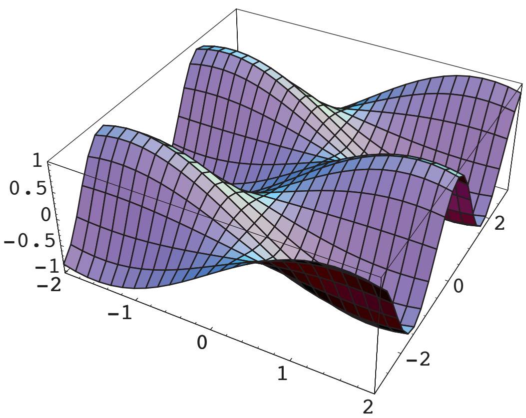
Cette notion coïncide avec celle rencontrée en topographie[1] (d'où l'origine de la terminologie). Les points $(x; y; z)$ du relief repérés dans la carte de géographie sur la courbe de niveau c sont tous à la même altitude $f(x; y) = c$. Les figures suivantes montrent la surface représentative ainsi que les courbes de niveaux de la fonction f définie par

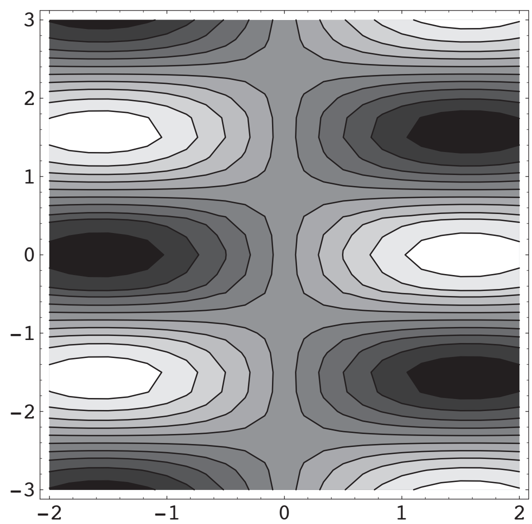
$$f(x; y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

Pour $0 < c < 1$ ces courbes sont des cercles centrés à l'origine. Pour $c = 1$, la courbe est réduite à un point (l'origine). Enfin pour $c > 1$ et $c < 1$, ces courbes n'existent pas puisque la fonction f prend des valeurs appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.



Autre exemple Les mêmes graphiques correspondant à la fonction $f(x; y) = \sin(x) \cdot \cos(2y)$.





[1] Comme dans d'autres domaines : les courbes isothermes comme ensemble des lieux où règne la même température, les lignes isobares comme ensemble des points où l'on mesure la même pression atmosphérique, les courbes isochrones comme ensemble des endroits à partir desquels la durée des trajets menant à un point fixe est le même.

Exercice 3 À quoi ressemblent les surfaces représentatives des fonctions $f(x;y)$ définies comme suit.

a) $f(x;y) = \sqrt{x \cdot y}$

b) $f(x;y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

c) $f(x;y) = x + y - 3$.

2.3 Continuité

Comme pour le cas d'une variable, on définit la propriété locale de *continuité* d'une fonction de deux variables comme suit. La fonction f est dite *continue* au point $P(a;b)$ si

- f est définie en P (c'est-à-dire si $f(a;b) = z$ existe, est calculable).
- $\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = z$.

Exemple 1 La fonction f définie par

$$f(x;y) = \frac{3+2x-y}{4+x^2+y^2}$$

est continue en $O(0;0)$. En effet, on a bien

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \frac{3}{4} = f(0;0)$$

Exemple 2 En revanche, la fonction f définie par

$$f(x;y) = \begin{cases} 2 \text{ si } (x;y) = (0;0) \\ \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \text{ sinon} \end{cases}$$

est discontinue en $O(0;0)$. En effet, sur l'axe des y, $f(x;y) = f(0;y) = \frac{0}{y^2} = 0$. Alors que, sur l'axe des x, $f(x,y) = f(x;0) = \frac{x^2}{0+x^2} = 1$. Ainsi, la limite de f quand $(x;y)$ tend vers $(0;0)$ ne saurait exister.

3 Différentiabilité

3.1 Dérivées partielles

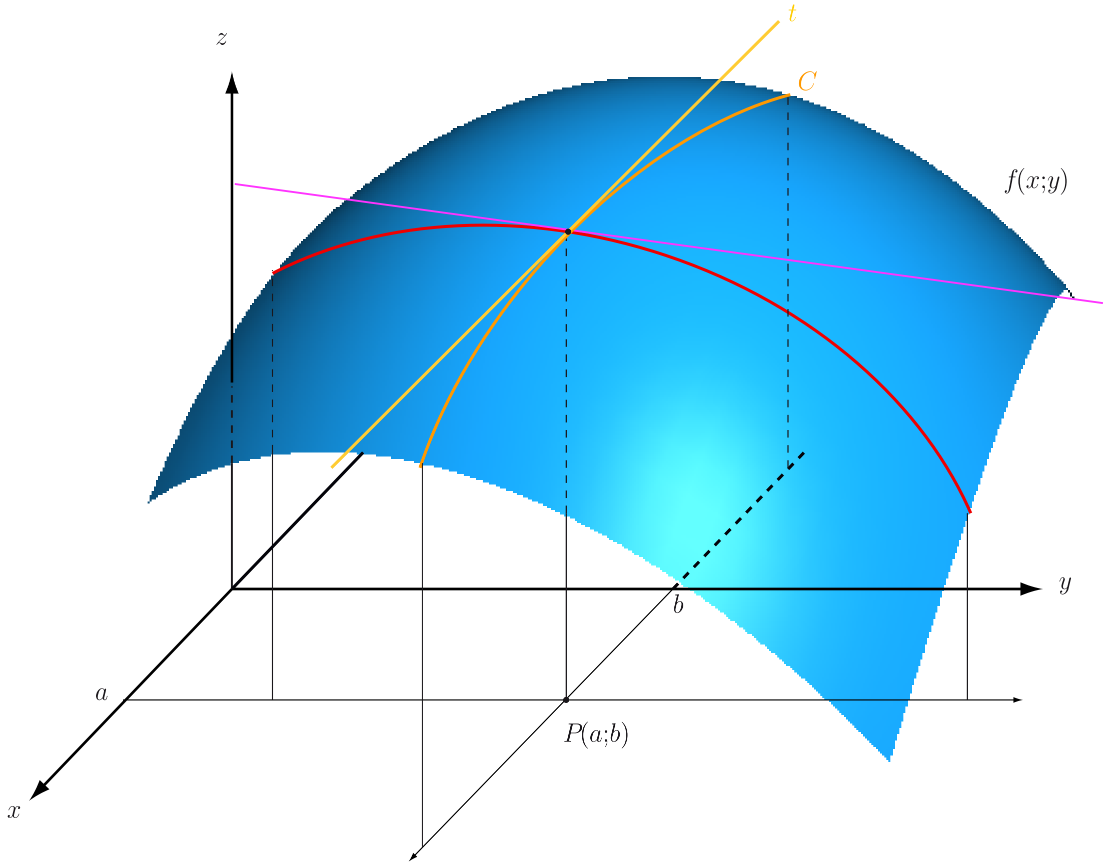
Soit une fonction f représentée par la surface $\sum\ :\ z = f(x;y)$. Considérons un point $P(a;b)$ du domaine de définition de f. L'intersection de la surface $\sum$ avec le plan vertical $y = b$ est une courbe $\mathcal{C}$. Supposons que celle-ci possède une droite tangente t de pente p au point $S(a;b;f(a;b))$. Cette pente p n'est rien d'autre que la dérivée en a de la fonction d'une variable $f(x;b)$. On l'appelle *dérivée partielle par rapport à x* en P et on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)$. Ainsi, on a

$$\boxed{p = \frac{\partial f}{\partial x}(a;b) = [f(x;b)]'\Big|_{x=a}}$$

De même, en tenant $x = a$ fixe, on définit la *dérivée partielle de f par rapport à y* en P, comme étant la pente de la droite tangente à la courbe d'intersection de $\sum$ avec le plan vertical $x = a$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(a;b) = [f(a;y)]'\Big|_{y=b}}$$

On dit qu'une fonction est *partiellement dérivable* au point $P(a;b)$ si les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)$ existent.



Notation Il est commun d'utiliser ladite notation de Leibniz $\dfrac{df}{dx} = f'$ pour désigner la dérivée d'une fonction $f(x)$ à une seule variable. La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ fait référence à la dérivée par rapport à x d'une fonction ayant d'autres variables.

3.2 Calcul des dérivées partielles

Soit la fonction f définie par $f(x;y) = 3x^2y - 5x^3y^2 + x^4 - 3y$. Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$. Pour ce faire, on considère y comme une constante et on dérive usuellement par rapport à x. On obtient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 15x^2y^2 + 4x^3$$

De même, en considérant x comme constante et en dérivant usuellement par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 10x^3y - 3$$

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction $f(x;y)$ dans chacun des cas suivants.

a) $5x^5y^3 - 7x^2y^5 + 2xy^2 - 3x^2y - 5x + 2y + 1$

b) $4x \cdot \sqrt{y^2+1}$

c) $x + y - 3$

d) $x^2 \cdot \ln(x \cdot y)$

e) $4y \cdot \mathrm{e}^{2x+y^2}$

Exercice 5 Reprenons le modèle de Cobb-Douglas décrivant la production Q comme fonction du capital K et de la main-d'oeuvre L sous la forme

$$\boxed{Q(K;L) = 8 \cdot K^{0,75} \cdot L^{0,25}}$$

a) Donner l'expression de la *productivité marginale du capital* $\frac{\partial Q}{\partial K}$.

b) Même question pour la *productivité marginale du travail* $\frac{\partial Q}{\partial L}$.

c) Évaluer les valeurs prises par ces fonctions au point $(10000; 625)$.

Exercice 6 *L'indice de masse corporelle*[2] IMC (*body mass index* en anglais) est un nombre qui décrit la corpulence d'un adulte (entre 18 et 65 ans) en fonction de son poids P et de sa taille L. Il est défini par la formule

$$\boxed{IMC = \frac{P}{L^2}}$$

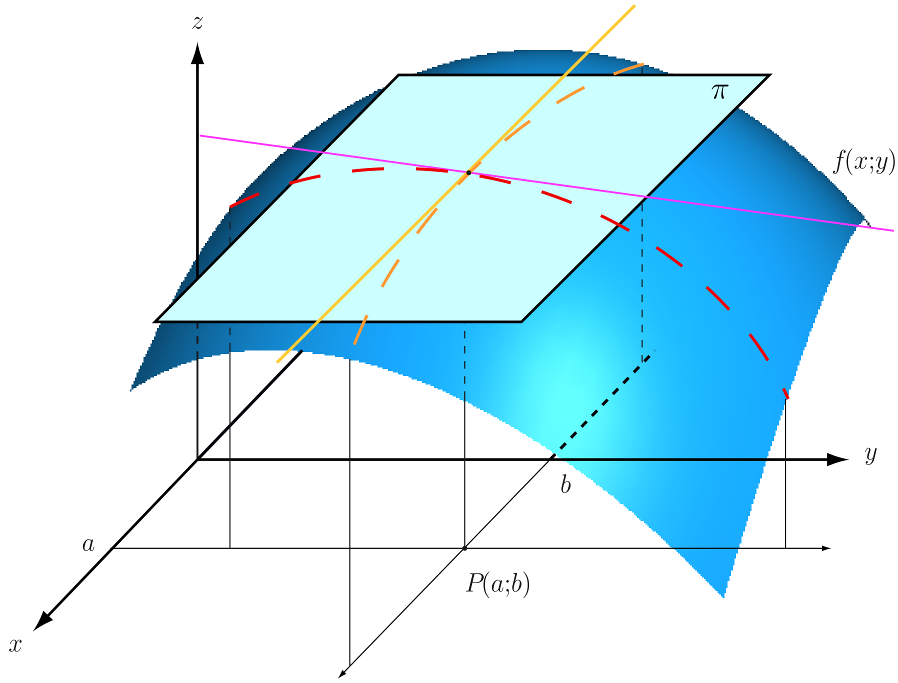
dans laquelle P désigne le poids en kilogrammes et L, la taille en mètres de l'individu[3].

a) Quelle valeur prend cet indice pour un homme pesant 80 kg et ayant pour taille 177 cm ?

b) Calculer $\frac{\partial IMC}{\partial P}$

c) Évaluer $\frac{\partial IMC}{\partial P}(80; 1{,}77)$. Autrement dit, déterminer la valeur prise en $(80; 1{,}77)$ par la dérivée partielle obtenue sous **b)**. Interpréter le résultat obtenu.

3.3 Plan tangent



Dans le cas à une variable, nous avons convenu qu'une fonction f est *dérivable* (ou *différentiable*) en a s'il est possible de tracer la droite p tangente à son graphe au point d'abscisse a, autrement dit s'il existe une fonction affine $y = p \cdot x + h$ dont la droite représentative est tangente au graphe de f. Rappelons que la pente p est la dérivée $f'(a)$ de f en a.

[2]Introduit par le mathématicien belge Adolphe Quetelet (1796-1874).

[3]Exprimé en kg/m^2, cet indice est considéré par l'Organisation mondiale de la santé (OMS) comme le standard pour évaluer les risques liés au surpoids chez l'adulte. L'OMS a défini en 1997 des intervalles standards (maigreur, indice normal, surpoids, obésité) en se basant sur la relation constatée statistiquement entre l'IMC et le taux de mortalité.

Dans le cas à deux variables, on considère qu'une fonction f est *différentiable* en $(a;b)$ s'il existe un plan tangent à sa surface représentative au point $(a;b;f(a;b))$.

Ce plan π n'est autre que la surface représentative d'une fonction affine $t(x;y) = p\cdot x + q\cdot y + h$. On peut démontrer que cette fonction s'écrit

$$\boxed{t(x;y) = f(a;b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a;b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a;b)\cdot(y-b)}$$

Exemple Considérons la fonction f définie par $f(x;y) = 2x^3y^2 - 5x^2 + 3xy + 2y - 7$. On cherche la fonction linéaire affine t qui lui ressemble le plus à f au voisinage du point $(-1;2)$, c'est-à-dire la fonction tangente. On a $f(-1;2) = -22$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 6x^2y^2 - 10x + 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 4x^3y + 3x + 2$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(-1;2) = 40$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(-1;2) = -9$. Il s'ensuit que

$$t(x;y) = -22 + 40(x+1) - 9(y-2)$$

ou encore

$$t(x;y) = 40x - 9y + 36$$

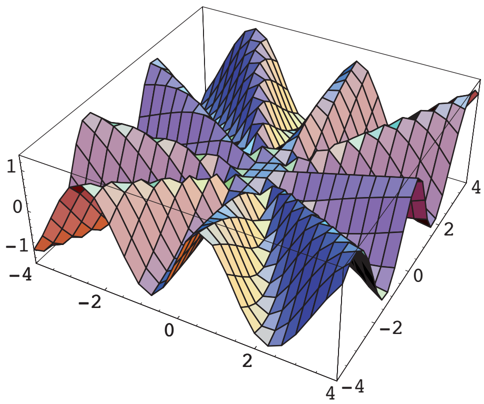
Exercice 7 Déterminer la fonction linéaire affine $t(x;y)$ tangente au graphe de la fonction $f(x;y) = 7x^5y - 3x^4y^3 + 9xy^2 - x^2y + 2x - 5y + 1$ au point de coordonnées $(-2;3)$.

Exercice 8 La puissance déployée par un oiseau durant son vol est donnée par la formule

$$P(d;v) = \frac{10}{d\cdot v} + 3\cdot d\cdot v^3$$

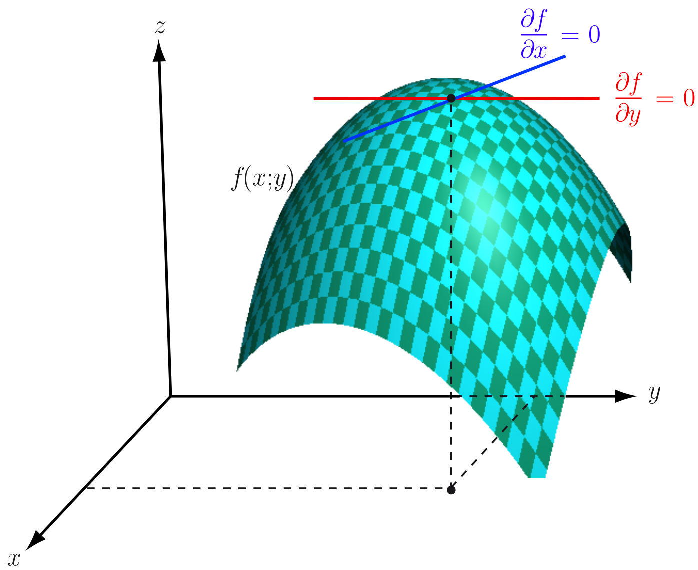
dans laquelle d désigne la densité de l'air et v, la vitesse de vol. Donner une approximation linéaire affine $f(x;y) \cong p\cdot x + q\cdot y + h$ de cette fonction lorsque $d = 0{,}45$ et $v = 5{,}4$.

Remarques Si une fonction est différentiable, c'est-à-dire si elle admet une fonction linéaire affine tangente en un point, alors f est partiellement dérivable en ce point (les dérivées partielles existent). L'inverse n'est pas vraie : une fonction peut être partiellement dérivable sans être différentiable. La figure suivante illustre le cas d'une fonction dont les dérivées partielles existent mais qui n'admet pas de plan tangent à l'origine.

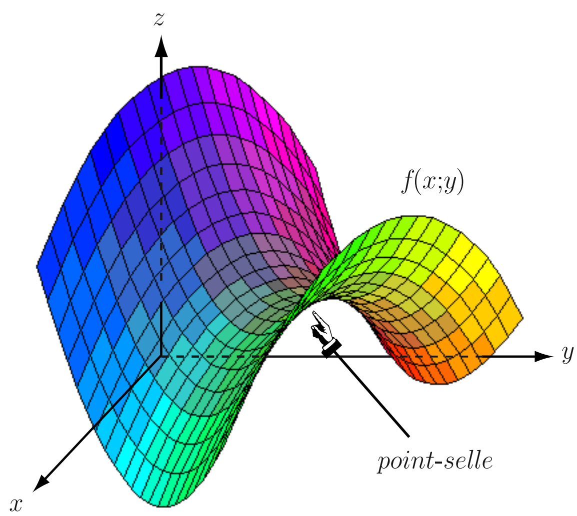


3.4 Extrema

Si une fonction différentiable possède un maximum ou un minimum au point P, alors le plan tangent à la surface représentative en ce point est horizontal. Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$.



Ainsi, pour trouver les points en lesquels la fonction f peut avoir un maximum ou un minimum, il suffit de rechercher les points en lesquels les deux dérivées partielles s'annulent. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. Le point considéré peut en effet être un col ou un point-selle.



Exercice 9 Rechercher les extrema de la fonction f définie par $f(x;y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

Exercice 10 Même question pour $f(x;y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Exercice 11 Une compagnie distributrice d'une boisson aux fruits met sur le marché un nouveau produit aux pommes dont les coûts de production sont donnés par la fonction

$$C(s,p) = 2200 + 27s^3 - 72 \cdot s \cdot p + 8p^2$$

avec s : quantité de sucre et p : quantité de pommes utilisées. Déterminer les quantités de sucre et de pommes requises pour minimiser les coûts de production. Donner la valeur du coût minimal.

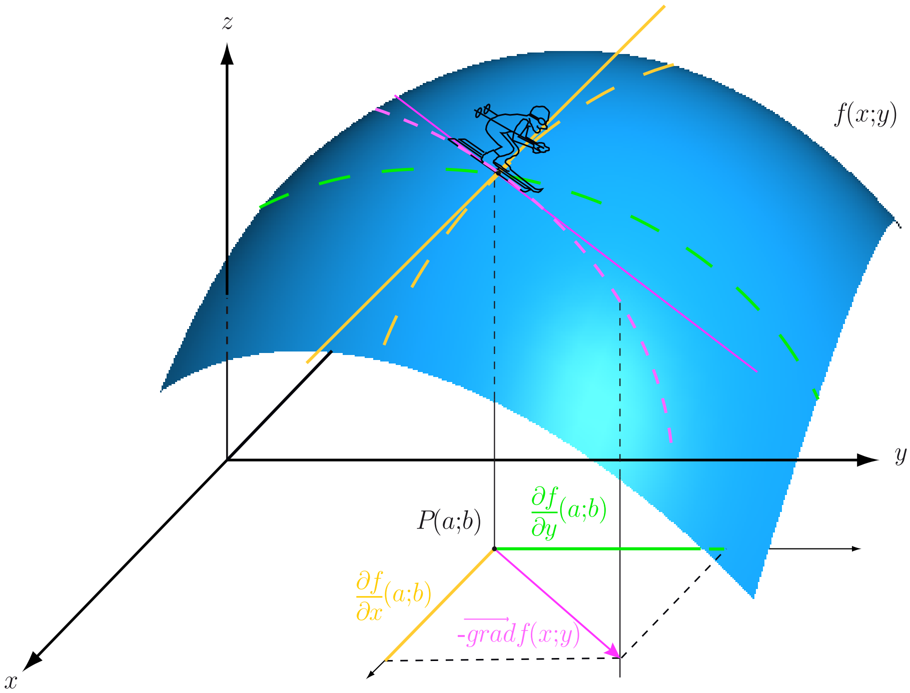
Exercice 12 Partager 120 en trois parties de telle sorte que la somme des produits pris deux à deux soit maximale.

3.5 Gradient

On appelle *gradient* d'une fonction f en un point P, le vecteur-ligne, c'est-à-dire la flèche

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P); \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)}$$

dont les composantes sont les valeurs prises en P par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.



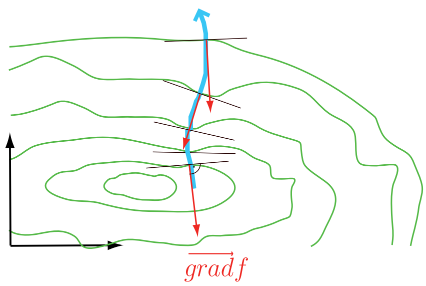
Exemple Considérons la fonction f définie par $f(x;y) = xy^2 - 3x^2y$ et le point $P(1;-1)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 6xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 3x^2$, il s'ensuit que le gradient de f en P est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(P) = (7;-5)$.

Exercice 13 Déterminer le gradient de $f(x;y) = \mathrm{e}^{2x-3y}$ au point $O(0;0)$.

Propriétés du gradient

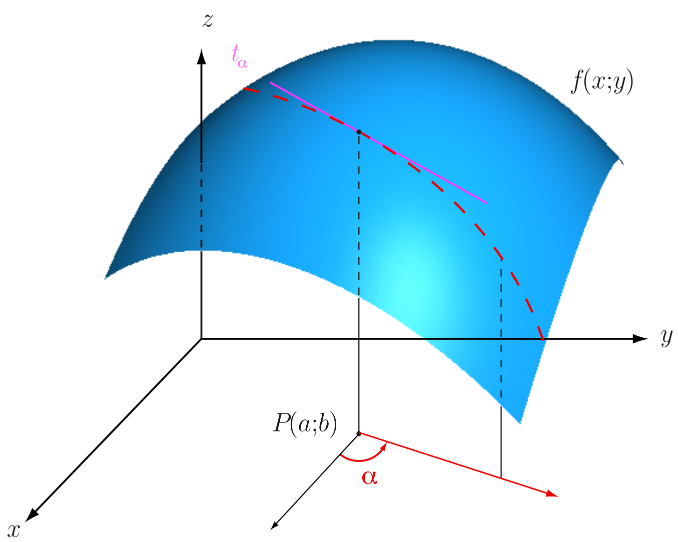
On peut démontrer que le vecteur gradient possède les propriétés remarquables suivantes.

- La direction de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ est perpendiculaire aux courbes de niveaux. Dans l'exemple d'une fonction f décrivant le relief d'un terrain, le vecteur gradient indique la direction de la plus grande pente. C'est cette direction que suivra un cours d'eau ou un skieur optant pour la trajectoire la plus rapide.



- Le sens de $\overrightarrow{\text{grad}f}$ indique celui des valeurs croissantes de f. Le cours d'eau ou le skieur se déplaceront donc dans le sens inverse de celui du gradient.
- Si on considère la direction définie par un angle α et qu'on définit la *dérivée directionnelle* $D_\alpha f(P)$ comme étant la pente de la droite tangente t_α, alors on a

$$D_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot \sin(\alpha)$$



- Dans le cas particulier où l'angle α indique le sens du gradient, alors la dérivée dans cette direction est maximale et est égale à

$$\boxed{D_{\max} = \|\overrightarrow{\text{grad}f}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)^2}}$$

Exercice 14 Trouver la direction dans laquelle la dérivée directionnelle de f est la plus grande au point P donné et calculer la valeur de cette dérivée maximale.

a) $f(x; y) = x^2 - xy + y^2$, $P(1; 2)$

b) $f(x; y) = xy^2 + (y + 1)e^x$, $P(0; 1)$

c) $f(x; y) = \sqrt{x + y}$, $P(3; 1)$.

Exercice 15 Une plaque circulaire dont le centre est situé à l'origine des axes est chauffée à chacun de ses points de sorte que la température (en °C) en un point $(x; y)$ est donnée par la formule

$$T(x; y) = \frac{100}{x^2 + y^2 + 1}$$

a) Quelle est la température au point $(-3; 2)$? Même question pour le point $(1; 1)$.

b) Sans faire appel au calcul différentiel, expliquer pourquoi la température maximale sur la plaque est de 100°.

c) Prouver le résultat précédent.

d) Une mouche se déplace sur la plaque de façon à suivre un trajet qui lui assure un refroidissement le plus rapide. Dans quelle direction doit-elle se déplacer si, au départ, elle n'est pas située à l'origine ?

Exercice 16 La densité de population $D(x; y)$ (en milliers d'habitants par km^2) d'une région urbaine au point de coordonnées $(x; y)$ est définie par

$$D(x; y) = 2x^2 + y^2 - y + 3$$

a) Déterminer la densité au point $(-1;3)$.

b) Dans quelle direction doit-on se déplacer à partir du point $(-1;3)$ pour constater la plus forte augmentation de densité ?

c) Que vaut la dérivée dans cette direction ?

d) En quel point la densité est-elle minimale ?

4 Dérivées d'ordres supérieurs

Si f est une fonction «assez régulière», les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi des fonctions de deux variables x et y dont on peut calculer les dérivées partielles. On convient alors de noter respectivement

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemple Soit la fonction f définie par $f(x;y) = x^2y^3$ et pour laquelle $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$. Les dérivées partielles d'ordre 2 s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2y^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6x^2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 6xy^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 6xy^2
\end{aligned}$$

On constate que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont égales, ce qui est toujours vrai en général quand ces deux dérivées sont continues.

Notation Par commodité, on note parfois les différentes dérivées partielles de la manière suivante :

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exercice 17 Calculer les dérivées supérieures d'ordre 2 des fonctions $f(x;y)$ définies comme suit :

a) $2x^2 - 5xy + y^2$

b) $\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$

4.1 Classification des extrema

Tout comme la deuxième dérivée $f''(x)$ permet de déterminer la nature d'un extremum d'une fonction d'une variable, les dérivées partielles d'ordre 2 interviennent dans la détermination de la nature des extrema d'une fonction $f(x;y)$ de deux variables.

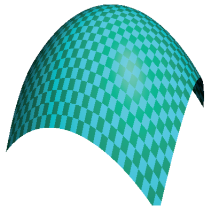
Supposons que les dérivées partielles d'ordre 1 (continues au voisinage d'un point $P(a;b)$) s'annulent, autrement dit $\frac{\partial}{\partial x}(a;b) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y}(a;b) = 0$.

Soit le *discriminant* $\Delta(a;b)$ de f en P défini comme suit

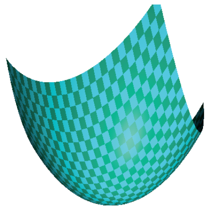
$$\boxed{\Delta(a;b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a;b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a;b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a;b)\right]^2}$$

Selon les valeurs du discriminant, on se trouve dans les situations suivantes :

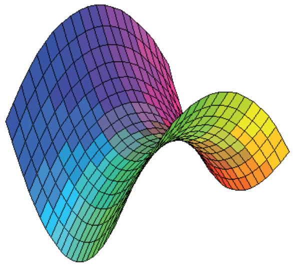
- Si $\Delta(a;b) > 0$ et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a;b) < 0$ (ou si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a;b) < 0$), alors f atteint un <u>maximum</u> relatif au point $P(a;b)$.



- Si $\Delta(a;b) > 0$ et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a;b) > 0$ (ou si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a;b) > 0$), alors f atteint un <u>minimum</u> relatif au point $P(a;b)$.



- Si $\Delta(a;b) < 0$, alors f possède un <u>point-selle</u> en P



- Si $\Delta(a;b) = 0$, on en peut rien conclure quant à la nature du point P.

Exemple Cherchons les extrema de la fonction f définie par $f(x;y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$. Il s'agit tout d'abord de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

qui s'écrit ici

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6y^2 - 6x^2 & = & 0 \mid (1) \\ 12xy - 12y^3 & = & 0 \mid (2) \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (y-x)(y+x) & = & 0 \mid (1) \\ y(x-y^2) & = & 0 \mid (2) \end{array} \right.$$

D'après (1), $y = \pm x$. De (2), on tire ou bien $y = 0$ et donc, de (1) $x = 0$, d'où le point $O(0;0)$. Ou alors $x = y^2$ et alors (1) s'écrit $y = \pm y^2$, d'où $y = \pm 1$ et $x = 1$. On en déduit les deux autres points $M(1;1)$ et $N(1;-1)$. Reste à déterminer la nature de chacun de ces trois points. Pour ce faire, nous aurons besoin des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x - 36y^2$$

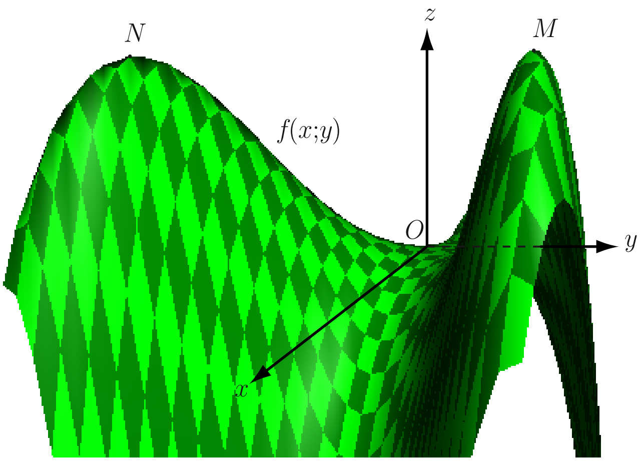
de même que du discriminant

$$\Delta(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right]^2 = -12x \cdot (12x - 36y^2) - (12y)^2 = -144x^2 + 432xy^2 - 144y^2$$

$\boxed{\text{O(0 ;0}}$ On a $\Delta(O) = 0$ et il n'est donc pas possible de déterminer la nature de ce point.

$\boxed{\text{M(1 ;1}}$ On a $\Delta(1;1) = 144 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1) = -12 < 0$, le point M est donc un maximum relatif.

$\boxed{\text{N(1 ;-1}}$ On a $\Delta(1;-11) = 144 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;-1) = -12 < 0$, le point M est donc aussi un maximum relatif.



La représentation graphique correspondante montre que le point O est en fait un point-selle.

Exercice 18 Soient une fonction f différentiable et le point $P(1;3)$ tels que $f_x(P) = 0$ et $f_y(P) = 0$. Quelle est la nature de cet extremum dans chacun des cas suivants.

a) $f_{xx}(P) = 4$, $f_{yy}(P) = 6$, $f_{yx}(P) = 5$

b) $f_{xx}(P) = -2$, $f_{yy}(P) = -8$, $f_{yx}(P) = 3$

c) $f_{xx}(P) = 8$, $f_{yy}(P) = 10$, $f_{yx}(P) = 9$

Exercice 19 Trouver les extrema et déterminer si possible leur nature pour chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x;y) = x^3 - y^3 - 3xy$

b) $f(x;y) = 4x^3 + y^2 - 12x + 4y - 5$

c) $f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 4$

5 Bibliographie

[1] Luc Amyotte, *Introduction au calcul avancé et à ses applications en sciences*, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 2004.

[2] Frank Ayres Jr, *Théorie et applications du calcul différentiel et intégral*, Série Schaum, 1984.

[3] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Third Edition, Springer, 1979.

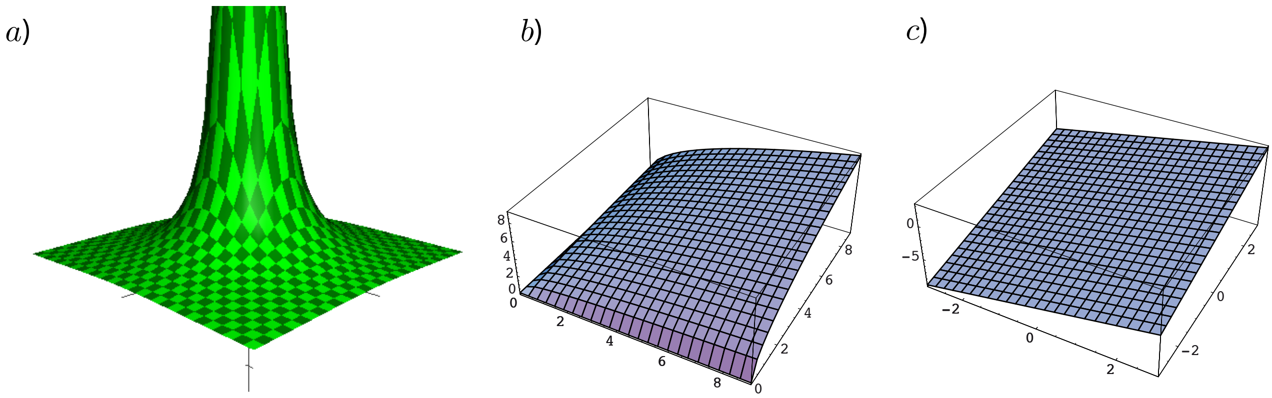
[4] A. Robert, *Advanced Calculus for Users*, North-Holland, PAN, 1989.

6 Réponses et corrigés des exercices

Exercice 1 131950,8.

Exercice 2 **a)** 34,82, **b)** 39,14, **c)** 37,69.

Exercice 3



Exercice 4

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 25x^4y^3 - 14xy^5 - 6xy + 2y^2 - 5$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 15x^5y^2 - 35x^2y^4 - 3x^2 + 4xy + 2$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4 \cdot \sqrt{y^2+1}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4xy}{\sqrt{y^2+1}}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$

Exercice 5 **a)** $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{6 \cdot L^{0,25}}{K^{0,25}}$, **b)** $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{6 \cdot K^{0,75}}{L^{0,75}}$, **c)** $\frac{\partial Q}{\partial K}(10000; 625) = 3$, $\frac{\partial Q}{\partial L}(10000; 625) = 16$.

Exercice 6 **a)** $IMC(80; 1{,}77) = 25{,}54$, **b)** $\frac{\partial IMC}{\partial P} = \frac{1}{L^2}$, **c)** $\frac{\partial IMC}{\partial P}(80; 1{,}77) = 0{,}3192$. Un homme de cette corpulence risque de voir augmenter son IMC de 0,3192 en prenant un kg.

Exercice 7 On a

$$f(x;y) = 7x^5y - 3x^4y^3 + 9xy^2 - x^2y + 2x - 5y + 1 \qquad f(-2;3) = -2160$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 35x^4y - 12x^3y^3 - 2xy + 9y^2 + 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-2;3) = 4367$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^5 - 9x^4y^2 - x^2 + 18xy - 5 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-2;3) = -1637$$

La fonction linéaire affine tangente s'écrit alors

$$\begin{aligned} t(x;y) &= -2160 + 4367 \cdot (x+2) - 1637 \cdot (y-3) \\ &= 4367x - 1637y + 11485 \end{aligned}$$

Exercice 8 On a

$$P(d;v) = \tfrac{10}{d\cdot v} + 3\cdot d\cdot v^3 \qquad P(0{,}45;5{,}4) = 228{,}65$$

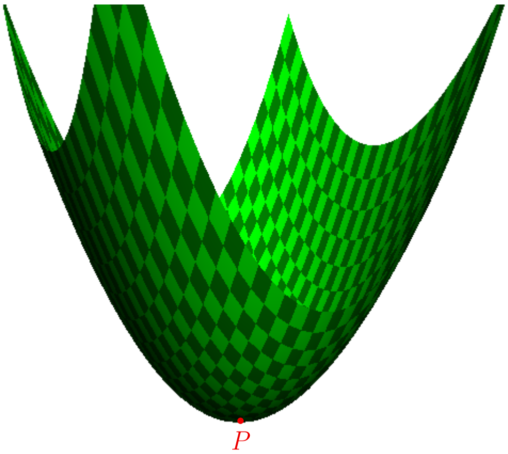
$$\frac{\partial P}{\partial d} = 3\cdot v^3 - \tfrac{10}{d^2\cdot v} \qquad \frac{\partial P}{\partial d}(0{,}45;5{,}4) = 463{,}25$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 9\cdot d\cdot v^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial v}(0{,}45;5{,}4) = 117{,}34$$

La fonction linéaire affine tangente s'écrit alors

$$\begin{aligned} t(d;y) &= 228{,}65 + 463{,}25\cdot(d-0{,}45) + 117{,}34\cdot(v-5{,}4) \\ &= 117{,}34v + 463{,}25d - 613{,}4485 \end{aligned}$$

Exercice 9 Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-4$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y+6$, ces deux dérivées partielles s'annulent pour $x=2$ et $y=-3$. Le point $P(2;-3;12)$ est donc un extremum. Il s'agit d'un minimum comme on on l'observe directement en écrivant la fonction sous la forme $f(x;y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 + 12$.



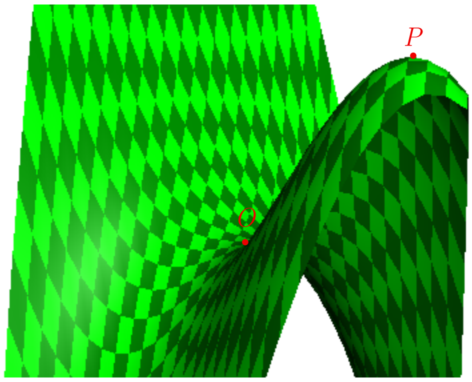
Exercice 10 Il s'agit de résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{array}\right.$$

qui s'écrit ici

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2+3y & = & 0 \mid (1) \\ 3x+3y^2 & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

De (1), on tire $y=-x^2$. L'équation (2) s'écrit alors $x+x^4=0$ ou encore $x\cdot(x^3+1)=0$. Il s'ensuite que $x=0$ et donc $y=0$ ou $x=-1$ et donc $y=-1$. Les points $O(0;0;0)$ et $P(-1;-1;1)$ sont donc des extrema de f.



On constate graphiquement que P est un maximum relatif et O un point-selle.

Exercice 11 On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial C}{\partial s} & = & 0 \\ \frac{\partial C}{\partial p} & = & 0 \end{array}\right.$$

qui s'écrit ici

$$\left\{\begin{array}{rcl} 81s^2 - 72p & = & 0 \mid (1) : 9 \\ 16p - 72s & = & 0 \mid (2) : 2 \end{array}\right.$$

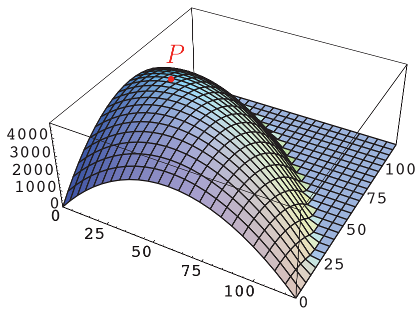
ou encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9s^2 - 8p & = & 0 \mid (1) \\ -36s + 8p & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

En additionnant (1) + (2), on obtient $9s^2 - 36s = 0$ qui s'écrit $9s \cdot (s-4) = 0$. On en tire $s = 0$ (à rejeter) ou $s = 4$, d'où $p = 18$. Le coût est minimal pour 4 quantité de sucre et 18 quantité de pommes. Ce coût optimal a un montant égale à $C(4; 18) = 1336$. Comme la fonction $C(s, p)$, qui décrit un coût, est forcément positive, qu'elle tend vers l'infini quand s ou t croissent, qu'elle n'a qu'un extremum, celui-ci ne peut être qu'un minimum.

Exercice 12 Notons x, y et $120 - x - y$ les trois parties considérées. On cherche à rendre maximale la somme

$$f(x; y) = x \cdot y + x \cdot (120 - x - y) + y \cdot (120 - x - y) = -x^2 - y^2 - xy + 120x + 120y$$



On résout alors le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y + 120 & = & 0 \mid (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y + 120 & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

De (1), on tire $y = 120 - 2x$. Dans (2) : $-x - 2(120 - 2x) + 120 = 0$, d'où $x = 40$ et donc, $y = 40$. Il faut donc diviser 120 en trois parties égales à 40. Notons qu'on est sûr qu'il s'agit bien d'un maximum puisque f est positive et n'a qu'un extremum.

Exercice 13 Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x-3y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -3 \cdot \mathrm{e}^{2x-3y}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(0; 0) = (2; -3)$.

Exercice 14

a) On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(1; 2) = (0; 3)$, d'où $\alpha = 90°$.

b) On a $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + (y+1)\mathrm{e}^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{e}^x + 2xy$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(0; 1) = (3; 1)$, d'où $\alpha = 18{,}43°$.

c) On a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+y}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+y}}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(3; 1) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, d'où $\alpha = 45°$.

Exercice 15

a) $T(-3;2) = \frac{50}{7} \cong 7{,}14$, $T(1;1) = \frac{100}{3} \cong 33{,}33$

b) En tant que quotient, $T(x;y)$ est maximale quand son dénominateur x^2+y^2+1 est minimal, c'est-à-dire quand $x^2+y^2=0$ donc pour $(x;y)=(0;0)$. Dans ce cas $T(0;0)=100$.

c) $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{200x}{(x^2+y^2+1)^2}$ et $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{200y}{(x^2+y^2+1)^2}$. Ces deux dérivées s'annulent à l'origine $(0;0)$. Comme ce point est l'unique extremum d'une fonction positive qui tend vers 0 quand x ou y tendent vers l'infini, il ne peut s'agir que d'un maximum.

d) Partant du point P, la mouche doit s'éloigner du centre O en se déplaçant sur la droite supportant le rayon OP. En effet, le gradient est parallèle au vecteur $\overrightarrow{OP}$.

Exercice 16

a) $D(-1;3) = 11$

b) Dans celle du gradient. Or, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-1$, on a $\overrightarrow{\text{grad}} f(-1;3) = (-4;5)$, d'où $\alpha = 231{,}34°$.

c) Dans cette direction, la dérivée vaut $D_{231,34°} = \sqrt{41}$.

d) La densité est minimale au point $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. On a alors $D\left(0;\frac{1}{2}\right) = 2{,}75$.

Exercice 17

a) $f_x = 4x-5y$, $f_y = 2y-5x$, $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -5$

b) $f_x = \frac{2y}{x^3} + \frac{1}{y^2}$, $f_y = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$, $f_{xx} = -\frac{6y}{x^4}$, $f_{yy} = \frac{6x}{y^4}$, $f_{xy} = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}$.

Exercice 18

a) $\Delta(P) = 1 > 0$ et $f_{xx}(P) > 0$. Le point P est donc un minimum.

b) $\Delta(P) = 7 > 0$ et $f_{xx}(P) < 0$. Le point P est donc un maximum.

c) $\Delta(P) = -1 < 0$. P est donc un point-selle.

Exercice 19

a) Il s'agit de résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_x = 3x^2-3y & = & 0 \mid (1) \\ f_y = -3y^2-3x & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

système qui s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \mid (1) \\ -y^2-x & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

(1) dans (2) conduit à $-x^4-x=0$ ou encore $x(x^3+1)=0$. On en déduit que $x=0$ ou $x=-1$. D'où les deux points $O(0;0)$ et $P(-1;1)$.

$\boxed{O(0;0)}$ Comme $f_{xx} = 6x = 0$, $f_{yy} = -6y = 0$, $f_{xy} = -3$, $\Delta(O) = -9 < 0$, le point O est donc un point-selle.

$\boxed{P(-1;1)}$ Comme $f_{xx} = 6x = -6 < 0$, $f_{yy} = -6y = -6$, $f_{xy} = -3$, $\Delta(P) = 27 > 0$, le point P est donc un maximum.

b) Il s'agit de résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_x = 12x^2-12 & = & 0 \mid (1) \\ f_y = 2y+2 & = & 0 \mid (2) \end{array}\right.$$

On en déduit que $x=-1$ ou $x=-1$ et $y=-1$. D'où les deux points $P(1;-1)$ et $Q(-1;-1)$.

$\boxed{P(1;-1)}$ Comme $f_{xx} = 24x = 24 > 0$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, $\Delta(P) = 48 > 0$, le point P est donc un minimum.

$\boxed{Q(-1;-1)}$ Comme $f_{xx} = 24x = -24 < 0$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, $\Delta(Q) = -48 < 0$, le point P est donc un point-selle.

c) Il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y &= 0 \mid (1) \\ f_y = 4y^3 - 4x &= 0 \mid (2) \end{cases}$$

système qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} y &= x^3 \mid (1) \\ y^3 - x &= 0 \mid (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) conduit à $x^9 - x = 0$ ou encore $x(x^8 - 1) = 0$. On en déduit que $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$. D'où les deux points $O(0;0)$, $P(1;1)$ et $Q(-1;1)$.

$\boxed{O(0;0)}$ Comme $f_{xx} = 12x^2 = 0$, $f_{yy} = 12y^2 = 0$, $f_{xy} = -4$, $\Delta(O) = -16 < 0$, le point O est donc un point-selle.

$\boxed{P(1;1)}$ Comme $f_{xx} = 12x^2 = 12 > 0$, $f_{yy} = 12y^2 = 12 > 0$, $f_{xy} = -4$, $\Delta(P) = 128 > 0$, le point P est donc un minimum.

$\boxed{Q(-1;1)}$ Comme $f_{xx} = 12x^2 = 12 > 0$, $f_{yy} = 12y^2 = 12 > 0$, $f_{xy} = -4$, $\Delta(Q) = 128 > 0$, le point Q est donc un minimum.