LOGIQUE

Operateurs logiques

- $\neg$ "not" (negation)
- $\wedge$ "and" (conjunction)
- $\vee$ "or" (disjunction)
- $\oplus$ "xor" (exclusive or)
- $\rightarrow$ "implies" (conditional, implication)
- $\leftrightarrow$ "iff" (biconditional)

Preuves

- Directe : $p \rightarrow q$
- Contraposition : $\neg q \rightarrow \neg p$
- Contre-exemple : $\neg(p \rightarrow \neg q)$
- Absurde : $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$
- Vacuous : $F \rightarrow q \equiv T$
- Trivial : $p \rightarrow T \equiv T$
- Disjonction des cas : $p \vee \neg p \equiv T$

Formules

$$\boxed{\begin{array}{c}\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \\ p \vee (q \wedge r) \equiv p \vee q \wedge p \vee r \\ p \wedge (q \vee r) \equiv p \wedge q \vee p \wedge r \\ (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (p \wedge r) \\ (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (p \vee r) \\ (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r \\ (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r\end{array}}$$

Les implications

- $p \rightarrow q$: «p seulement si q », « p est suffisant pour q »
- $p \leftarrow q$: « p si q », « p est nécessaire pour q »
- $p \leftrightarrow q \equiv p \leftarrow q \wedge p \rightarrow q$: « p si et seulement q »

Définitions

Tautologie

Proposition qui est toujours vraie. Sa table de vérité est remplie de 1

Contradiction

Proposition qui est toujours fausse : sa table de vérité est remplie de 0

Contingence

Proposition qui est parfois vraie parfois fausse.

Quantificateurs

Universel

$\forall x \in D, F(x)$: Pour tout x dans le domaine D tel que $F(x)$ est vrai

Existentiel

$\exists x \in D, F(x)$: Il existe un x dans le domaine D tel que $F(x)$ est vrai.

$\exists! x \in D, F(x)$: Il existe un unique x dans le domaine D tel que $F(x)$ est vrai.

Formules

$$\boxed{\begin{array}{c}\neg\exists x, F(x) \equiv \forall x, \neg F(x) \\ \neg\forall x, F(x) \equiv \exists x, \neg F(x)\end{array}}$$

Règles d'inférences

Logiques

$p \rightarrow q$ p $\therefore q$	Modus ponens	p q $\therefore p \wedge q$	Conjonction
$p \rightarrow q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Modus tollens	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	Syllogisme hypothétique
p $\therefore p \vee q$	Addition	p q $\therefore p$	Simplification
$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$	Syllogisme déductif	$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	Résolution

Instanciations et généralisations

$\forall x P(x) \therefore d \in D \rightarrow P(d)$	Instanciation universelle
$P(d)$ for every $d \in D$ $\therefore \forall x P(x)$	Généralisation universelle
$\exists x P(x) \therefore P(d)$ for some $d \in D$	Instanciation universelle
$P(d)$ for some $d \in D$ $\therefore \exists x P(x)$	Généralisation universelle

ENSEMBLES

Définition

Un ensemble est une collection non ordonnée d'objets.

Construire un ensemble

$S = \{x | P(x)\}$ est l'ensemble des x pour lesquels $P(x)$ est vrai.

Cardinalité

Définition

La cardinalité d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il contient, on le note $\#D$ ou $|D|$.

Egalités

$$\boxed{\begin{array}{c}|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \infty = \aleph_0 \\ |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = \infty = \aleph_1 \\ |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|\end{array}}$$

Termes

Ensemble vide

L'ensemble vide est un ensemble qui ne contient aucuns éléments. On a : Pour tous ensemble S: $\emptyset \subseteq S \wedge S \subseteq S$

Singleton

Un singleton est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

Egalité entre deux ensembles

$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Sous ensemble

A est un sous ensemble de B si et seulement si on a : $\forall x, (x \in A \rightarrow x \in b)$. On note $A \subseteq B$

Sous ensemble propre

A est un sous ensemble propre si et seulement si $A \subseteq B \wedge A \neq B$

Ensemble des parties d'un ensemble (powerset)

$P(A)$ est l'ensembles des sous-ensembles de A.

Produit cartésien

Le produit cartésien $A \times B$ de A et de B, est l'ensembles des paires ordonnées (a, b) telles que : $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Opérations sur les ensembles

Complément

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$$

Union

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Différence

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Différence symétrique

$$A \oplus B = A \Delta B = \{x | x \in A \oplus x \in B\}$$

Propriétés

$$\boxed{\begin{array}{c}A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C \\ A \cup (B \cap C) = A \cup B \cap A \cup C \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\end{array}}$$

FONCTIONS

Définition

Une fonction $F: A \rightarrow B$ est une relation de A à B telle que $\forall a \in A \exists! b \in b, (a, b) \in f$. b est appelé l'image de a par f et a est appelé un antécédent de b par f.

Opérations

$$\boxed{\begin{array}{c}(f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)f(g) \\ (g \circ f)(x) = g(f(x))\end{array}}$$

Propriétés

Injectivité

Une fonction f est injective si et seulement si $\forall (a_1, a_2) \in A^2, f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$

Surjectivité

Une fonction f est surjective si et seulement si $\forall b \in B, \exists a \in a, f(a) = b$

Bijectivité

Une fonction f est bijective si et seulement si $\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b$

Inversible

Une fonction f^{-1} est l'inverse d'une fonction f bijective alors : $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$

Fonctions spéciales

Notations

Arrondi	$\lfloor x \rceil$
Arrondi inférieur	$\lfloor x \rfloor$
Arrondi supérieur	$\lceil x \rceil$
Partie entière	$[x]$

Propriétés

$$\boxed{\begin{array}{c}\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor \\ \lceil 3x \rceil = \lceil x \rceil + \left\lceil x - \frac{1}{3} \right\rceil + \left\lceil x - \frac{2}{3} \right\rceil\end{array}}$$

SÉRIES ET SOMMES

Suite arithmétique

Expression générale

$$a_n = a_n + nr$$

Somme de termes consécutifs

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \frac{1}{2}(b - a + 1)(u_b + u_a)}$$

Suite géométrique

Expression générale

$$u_n = u_p \times r^{n-p}$$

Somme de termes consécutifs

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a \times \frac{1 - r^{b-a+1}}{a - r}}$$

ALGORITHMIQUE

Algorithmes de tri

Bubble sort

Pour i allant de n à 2:

Pour k allant de 1 à $i - 1$:

Si $a_k > a_{k+1}$ on inverse a_k et a_{k+1}

Selection sort

Pour i allant de 1 à $n - 1$

On prend le minimum de $(a_i, \ldots, a_n)$ et on le place à la i ème position de notre liste.

Insertion sort

Pour i allant de 2 à n

On insère a_i à la bonne place dans la liste déjà triée : $(a_1, \ldots, a_{i-1})$

Quick sort

Si la taille de la liste est 1 alors on la renvoie, sinon on prend le premier terme de la liste on fabrique ensuite deux autre listes une contient tous les éléments plus grands que ce terme les autre les plus petits. Ensuite on trie ces deux listes via un appel récursif. Pour finir on revoie la liste fusionnée : Liste des plus petits, le premier terme, liste des plus grands.

Comparaison de complexités

Pour comparer les complexités d'algorithmes on utilise 3 notions :

Big-O

Définition

$f(x)$ est $O(g(x))$ si et seulement si : il existe deux constantes C et k telles que : $\forall x > k, |f(x)| \leq C|g(x)|$

Echelle des big-O

$$\boxed{\begin{gathered} O(1), O(\log(n)^t), O(n^a), O(n\log(n)), O(n^b), \\ e^{dn^a \log(n)^{1-a}} O(b^n), O(b!), O(n^n) \\ \overline{t \in \mathbb{R}_+, a \in]0,1], b \in]1, \infty[} \end{gathered}}$$

Quelques cas particuliers

$\sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ est $O(n^d)$

$\sum_{i=0}^{n} i$ est $O(n^2)$

$\sum_{i=0}^{n} a_i i^d$ est $O(n^{d+1})$

Pour toutes les constantes $u > v$: n^v est $O(n^u)$ mais pas le contraire.

Pour toutes les constantes $a > 0, b > 0, u > b$ $\log_b(n^v)$ est $O(\log_a(n^u))$ et inversement. Les deux sont également $O(\log(n))$.

Mais attention avec les constantes $a > b > 0$ et $c > 0$ on a $c^{\log_a(n)}$ est $c^{\log_b(n)}$ mais pas le contraire

$\log(n!)$ est $O(n \log n)$ et inversement.

Opérations sur les big-O

On considère les fonctions telles que $f_i(x)$ est $O(g_i(x))$

$(f_1 + f_2)(x)$ est $O(\max(g_1(x), g_2(x)))$

$(f_1 f_2)(x)$ is $O(g_1(x) g_2(x))$

Big-Omega

$$f(x) \text{ est } \Omega(g(x)) \leftrightarrow g(x) \text{ est } O(f(x))$$

Attentions deux fonctions ne sont pas forcément big-O big-Omega l'une de l'autre.

Big-Theta

$$f(x)\ est\ \Theta(g(x)) \leftrightarrow f(x)\ est\ O(g(x)) \wedge g\ est\ O(f(x))$$

On dit alors que f et g sont de même ordre.

Arithmétique

Egalités sur les modulos

On suppose que $a \equiv c \bmod m$, $b \equiv d \bmod m$

$$\boxed{\begin{gathered} a + b \equiv c + d \bmod m \\ (a+b) \bmod m \equiv (a \bmod m) + (b \bmod m) \\ ab \bmod m \equiv (a \bmod m)(b \bmod m) \end{gathered}}$$

Calculer facilement une puissance modulaire

Ceci est très simple, voici un exemple modulo 7

$$\boxed{3^{12} = (3^2)^6 = 9^6 \equiv 2^6 = (2^3)^2 = 8^2 \equiv 1^2 = 1}$$

Nombres premiers

Evaluation du nombre des nombres premiers

On nomme π la fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui donne le nombre de nombres premiers entre 1 et l'argument de la fonction. On a comme valeur approximative :

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}$$

Gcd et Lcm

$$\boxed{\begin{gathered} ab = \gcd(a)\, lcm(a) \\ \gcd(a,b) = \gcd(b,a) \\ gcd(a,b) = gcd\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ [si } a \text{ et } b \text{ sont pairs]} \\ \gcd(a,b) = \gcd\left(\frac{a}{2}, b\right) \text{ [si } a \text{ est pair et } b \text{ impair]} \\ \gcd(a,b) = gcd\left(\frac{a-b}{2}, b\right) \text{ [si } a \text{ et } b \text{ impairs]} \\ \gcd(a,a) = a \end{gathered}}$$

Combinatoire

Règles de combinaisons

Si on doit faire une tâche A puis une tache B, il y $n_A \times n_B$ possibilités de faire le tout, n_k représente ici le nombre de possibilités de faire la tâche A.

Si on doit faire une tâche A ou une tache B alors on a $n_a + n_b$ possibilités de faire le tout.

Fonctions de références

Permutations sans répétitions

Cela représente une liste ordonnée avec tous les éléments distincts. Elle se note $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemple : donner les médailles à une compétition.

Permutations avec répétition

Cela représente une liste ordonnée avec des éléments éventuellement redondants. On ne donne pas de nom à cette fonction mais on a $(k,n) = n^k$. Exemple : choisir les délégués de classe.

Combinaisons sans répétitions

Cela représente une liste non ordonnée d'éléments distincts elle se note $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple choisir deux objet parmi 5.

Combinaisons avec répétition

Cela représente une liste non ordonnée d'éléments éventuellement redondants. On ne donne pas de nom à cette fonction mais on a $f(n,k) = \binom{n+k-1}{n}$. Exemple : Choisir une glace 3 boules.

Théorèmes

Pascal

$$\boxed{\begin{gathered} (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ 2^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ \binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} \\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \end{gathered}}$$

Probabilités

Formules

On note E un évènement, S l'univers

$$\boxed{\begin{gathered} p(E) = \frac{|E|}{|S|} \\ p(\overline{E}) = 1 - p(E) \\ p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) \\ \sum_{s \in S} p(s) = 1 \\ p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} \\ p(E \cap F) = p(E)p(F) [\Leftrightarrow E, F\ indep] \\ p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A) + p(B|\overline{A})p(\overline{A})} \\ p(x = r) = \sum_{s \in S : X(s) = r} p(s) \\ E(X) = \sum_{r = X(S)} r\, p(X = r) = \sum_{s} X(s) p(s) \\ E(X+Y) = E(X) + E(Y) \\ p(X = x \wedge Y = y) = p(X = x) p(Y = y) \Leftrightarrow indep \\ V(X) = \sum_{s \in S} p(s) \big(X(s) - E(X)\big)^2 \\ \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \\ V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ ind. \rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \wedge V(X+Y) = V(X) + V(Y) \end{gathered}}$$

Expérience de Bernoulli

La probabilité d'avoir exactement k succès en n essais.

$$\boxed{\begin{gathered} p(k) = C(n,k) p^k (1-p)^{n-k} \\ V(X) = npq \end{gathered}}$$

Equations de récurrence

Equations linéaires de degré 1

$$a_n = c_1 a_{n-1} \Leftrightarrow a_n = c_1^n a_0$$

Equations de degré 2 homogènes

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

On essaie r^n comme solution on a alors :

$r^n - c_1 r^{n-1} c_2 r^{n-2}$

$\Leftrightarrow r^2 - c_1 r - c_2$ (changement de variable)

On a alors une équation de degré 2 on a alors :

$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ ou $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_2^n$ si $r_1 = r_2$. On détermine ensuite les α avec les premiers termes de la suite.

Même protocole pour les degrés supérieurs.

Equations non homogènes

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_k a_{n-k} + F(n)$$

En premier on résout l'équation homogène. Si F est de la forme $(polynome)s^n$ avec s quelconque. On regarde ensuite la multiplicité de s dans l'équation caractéristique. On la note n. On a alors comme solution particulière : $n^m (polynome) s^n$ On remplace la solution particulière dans l'équation pour trouver le polynôme.

Fonctions génératrices

Développements utiles

$$\boxed{\begin{gathered} (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \\ \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \\ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \\ \frac{1}{1-rx} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k x^k \\ \frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} krx^k \end{gathered}}$$

Applications aux fonctions génératrices

Dénombrement du nombre de solutions dans une équation

$$e_1 + \cdots + e_n = \theta$$

On considère pour chaque variable la fonction génératrice de chaque possibilité de valeurs. Puis on fait le produit de chaque fonctions puis on récupère ce que génère la fonction (le coefficient de x^k). Ceci est le nombre de solutions.

Dans la cas où on a aucunes contraintes sur les variables on a pour chaque variable la fonction génératrice $\frac{1}{1-x}$. Donc on a comme produit $\frac{1}{(1-x)^k}$ où k est le nombre de variables. Ce qui nous donne comme solution : $\binom{k+\theta-1}{\theta}$.

Si on a la place d'une égalité on a une inégalité large alors on ajoute une variable supplémentaire qui représente la différence avec le maximum. Dans le cas où on a pas de contrainte sur les variables on a alors $k+1$ variables ce qui nous donne $\binom{k+\theta}{\theta}$

Résoudre des équations de récurrences

On considère la fonction génératrice de notre suite. On extrait de la somme les termes du début de la suite. Puis on remplace ce qu'il y a à l'intérieur de la suite. On simplifie jusqu'à retrouver la fonction génératrice de départ. On peut alors l'isoler et lui donner une valeur. On a alors une valeur explicite de la fonction génératrice de la suite. On peut alors trouver la suite en trouvant les coefficients de la fonction génératrice.

LES RELATIONS

Définition

Une relation de A vers B est un sous sous-ensemble de $A \times B$. Avec $a \in A, b \in B$. On dit aRb ou $(a,b) \in R$

Termes

Relations réflexive :

$$R \text{ est reflexive} \Leftrightarrow \forall a \in A, (a,a) \in R$$

Relation symétrique

$$R \text{ est symétrique} \Leftrightarrow (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

Relation transitive

$$R \text{ est transitive} \Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$$

Relation antisymétrique

$$R \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$$

Relation équivalente

R est une relation d'équivalence si et seulement si R est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Toute relation équivalente partage A en partitions.

Composition de relations

Définition

La composition $S \circ R$ est la relation :

$$\{(a,c) : \exists b \in B, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$$

Fermeture transitive

Définition

La fermeture transitive R^* de R est la plus petite relation transitive qui contient R

Théorèmes

$$\boxed{\begin{gathered} R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i \\ (a,b) \in R^{k+1} \equiv \bigvee_{c \in A} \left((a,b) \in R \wedge (c,b) \in R^k\right) \end{gathered}}$$

Calculer la fermeture transitive

La première chose à faire est de déterminer la matrice qui représente la relation R. $M(R)$ est une matrice $n \times n$ avec $\forall (i,j) \in A, M_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i,j) \in R$. Par défaut la matrice est remplie de 0.

On peut calculer $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S), M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S), M(R^{k+1}) = M(R) \times M(R^k)$

Algorithme 1

Soit $M_1 = M(R)$.

Pour k allant de 2 à n : $M_k = (M(R) \times M_{k-1}) \vee M_{k-1}$

Le résultat est alors M_n. La complexité de cet algorithme est en $\theta(n^4)$.

Algorithme 2 : Warshall

On définit : $(m_{ij}) = M(R)$

Pour k allant de 1 à n :

Pour i allant de 1 à n :

Pour j allant de 1 à n : $m_{ij} = m_{ij} \vee (m_{ik} \wedge m_{kj})$

Le résultat est alors m_{ij}. La complexité de cet algorithme est en $\theta(n^3)$.

Fermeture réflexive

Définition

La fermeture réflexive d'une relation R est la plus petite relation contenant R et étant réflexive.

Calculer la fermeture réflexive

$$= M(R) \vee I_n$$

Fermeture symétrique

Définition

La fermeture symétrique d'une relation R est la plus petite relation contenant R et qui soit symétrique.

Calcul de la fermeture symétrique

$$= M(R) \vee (M(R))^T$$

GRAPHES

Définition

Un graphe est une paire (V, E) de deux ensembles. V est un ensemble non vide de sommets. E est un sous ensemble de V de cardinalité 1 ou 2. Chaque élément de E représente un sommet du graphe : un lien entre deux sommets. Si un élément de E est cardinalité 1 alors il s'agit d'une boucle dans la mesure où un sommet est lié à lui-même.

Types de graphs

Multigraphes

G est un multigraphe si E n'est pas un ensemble mais continent des éléments plusieurs fois.

Graphes orientés

G est un graph orienté si les éléments de E sont tous de cardinalité E. Les liens entre les sommets sont alors unidirectionnels dans l'arête (u,v) on va du sommet u au sommet v. Les boucles sont alors représentés par (u,u).

Sous graphe

Soit $G = (V,E)$, tout $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$. Soit $F' = F \cap (W \cap W^2)$. Alors (W, F') est un sous graphe de G.

Graphe biparti

$$G = (V_1 \cup V_2, \subseteq V_1 \times V_2 \vee \subseteq V_2 \times V_2)$$

Graphe complet

Un graphe est complet si tous les sommets sont reliés deux à deux. On note K_n et on a $|V| = n, |E| = \frac{n}{2}(n-1)$

Graphe biparti complet

On le note $K_{n,m}$ et on a $|V| = n + m, |E| = nm$

Graph pondéré

Un graphe est pondéré si on a associé à chaque arrête un « coût pour la traverser ».

Graphe homéomorphique

Un graphe est un graphe homéomorphique de G si il peut être obtenu à partir d'une suite de subdivisions élémentaires de G.

Graphe planaire

Un graphe est planaire si il peut être dessiné sans que les arrêtes ne se coupent. Un graphe est planaire ↔ il n'a pas de graphes homéomorphies à K_5 ou $K_{3,3}$

Arbre

Un arbre est un graphe qui ne contient aucun circuits.

Arbre couvrant

Un arbre couvrant est un arbre qui contient tous les sommets de G. Un graphe admet un arbre couvrant si et seulement si il est connecté.

Trouver un arbre couvrant dans un graphe non pondéré

Il existe deux façons de le faire :

- Deep first : On part de la racine et on continue dans le graphe tant que l'on peut (en privilégiant l'ordre alphabétique). Quand on ne peut plus continuer on remonte
- Breadth first : on explore tous les voisins de la racine puis on fait de même récursivement pour ces voisins.

Trouver un arbre couvrant minimal dans un graphe pondéré

On peut utiliser deux algorithmes

- Prim : On prend l'arrête la moins coûteuse. Puis on choisit les arrête les moins couteuses tout en gardant un graphe connecté
- Kruska : On prend les arrêtes les moins coûteuses tant que le graphe n'est pas totalement couvert. Peu importe si elles sont connectées.

Degré d'un sommet

Cas d'un graph non dirigé

$$\deg(u) = |\{\{u,v\} \in E\}| + 2|\{\{u\} \in E\}|$$

Cas d'un graph dirigé

$$\deg^+(u) = |\{(u,v) \in E\}|$$
$$\deg^-(u) = |\{(v,u) \in E\}|$$
$$\deg(u) = \deg^+(u) + \deg^-(u)$$

Termes

Si le degré d'un sommet est nul alors on dit que ce sommet est isolé. Si il est égal à 1 alors on dit qu'il est « en suspens ».

Si tous les degrés sont les mêmes alors on dit que le graph est régulier.

Théorèmes

$$\boxed{|E| = \sum_{u \in V} \deg^+(u) = \sum_{u \in V} \deg^-(u)}$$

$$\boxed{\begin{gathered} 2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) \\ 2|E| = \sum_{regions\ s} \deg(s) \end{gathered}}$$

Circuit

Un circuit est un chemin dont l'arrivée est les point de départ. Dans un graphe orienté on le nomme un cycle. Un circuit ou chemin est dit simple lorsqu'il ne repasse jamais par une arrête.

Graphe connecté

Un graphe est connecté si il est formé d'un seul composant. C'est-à-dire que l'on peut toujours trouver un chemin entre deux sommets, dans un sens ou dans l'autre. On dit qu'un graphe est fortement connecté si il existe un chemin entre deux sommets dans les deux sens et cela pour tous les sommets du graphe.

Subdivision élémentaire

Une subdivision élémentaire d'un graphe est un graphe obtenu en remplacement une arrête (u, v) par deux (u, w) et (w, v) où w est un nouveau sommet.

Chemins spéciaux

Chemin d'Euler

Un chemin est dit d'Euler s'il passe par chaque arrête et chaque sommet. Il peut cependant passer plusieurs fois à chaque sommet. Cette propriété est aussi applicable aux circuits.

Un graphe G admet un circuit d'Euler si et seulement si tous les degrés sont pairs (autant de départ que d'arrivées é un sommet).

Chemin de Hamilton

Un chemin est dit de Hamilton si il passe par chaque sommet une fois mais peut passer autant d'arrêtes qu'il veut. Cette propriété est aussi applicable à un circuit.

Il est très compliqué de savoir si un graph est Hamiltonien, cependant il existe une condition suffisante : $\deg(V) \geq \frac{|V|}{2}$

Formule d'Euler

Dans un graphe connecté et planaire : on a

$$\boxed{|R| = |E| - |V| + 2}$$

Dans un graphe avec c composantes interconnectées on a :

$$\boxed{|R| = |E| - |V| + c + 1}$$