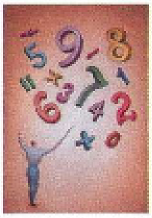
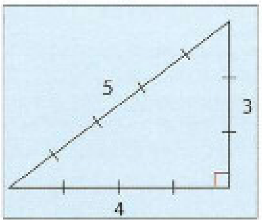
Mathématiques et mathématiciens

LES ORIGINES, LE CALCUL

Les mathématiques sont apparues avec la nécessité de compter. Les premiers objets mathématiques sont donc les ***nombres*** et plus



particulièrement, leur représentation : leur abstraction. Ensuite, la manipulation de ces nombres a fait apparaître les opérations : l'addition, la multiplication, la soustraction et la division. Ces opérations forment l'arithmétique à laquelle se résumaient principalement les mathématiques égyptiennes (autour de 3 000 avant J.-C.). Il s'agissait en effet de mathématiques pratiques. La géométrie était elle aussi très succincte et servait uniquement aux travaux des arpenteurs. Ils utilisaient par exemple la ***règle du 3-4-5*** pour



construire des angles droits mais ils ignoraient la règle générale des triangles rectangles. Il semble que les Égyptiens connaissaient également une valeur approchée de π.

Vers le VIIe siècle avant J.-C., les Babyloniens ajoutent à cette arithmétique et cette géométrie de base des notions d'algèbre. Ils arrivent alors à résoudre des équations du 1er, 2e, voire 3e degré. En géométrie, leurs travaux leur permettaient de calculer des surfaces ou des volumes simples allant jusqu'à la pyramide, le cylindre ou le cône. Leur estimation de π était cependant moins précise que celle des Égyptiens.

LES GRECS : L'INVENTION DES MATHÉMATIQUES

LES PREMIERS MATHÉMATICIENS GRECS

Les mathématiciens grecs sont sans doute les premiers à réellement considérer cette discipline comme une science. En effet, même si les mathématiques sont liées à la philosophie et à l'astronomie, les Grecs sont les premiers à énoncer des résultats généraux.

• Le premier d'entre eux est Thalès de Milet (624-546 av. J.-C.), à la fois philosophe et mathématicien. On peut considérer ***Thalès*** comme le

fondateur de la géométrie. Il invente en particulier la notion d'angle dont il fait la quatrième grandeur géométrique avec la longueur, la surface et le volume.

• Ensuite, Pythagore (570-500 av. J.-C.) est le fondateur de l'arithmétique. À la fois chef religieux mystique et mathématicien, il fut à la tête d'une confrérie sectaire et eut une influence considérable sur les développements scientifiques à venir. Les pythagoriciens font trois observations fondamentales :

- tout d'abord le rapport entre la longueur d'une corde et la note qu'elle produit lorsqu'elle vibre leur fait découvrir des proportions harmoniques ;
- ensuite, ils découvrent le fameux théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés ;
- enfin, ils remarquent la périodicité de l'apparition des lunes dans le ciel des corps célestes.

De ces trois observations, ils déduisent que « tout est nombre ». Cette mystique apportera de concepts mathématiques comme les nombres parfaits, amiables, les polygones réguliers, etc. Pour eux, une ligne droite est une succession de points et un segment a un nombre donné de ces points. Cependant, cette vision se heurte à l'irrationalité de la plupart des nombres (il ne peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers). Ce problème apparaît avec un triangle rectangle dont deux côtés sont de longueur égale à 1. L'hypoténuse est alors $\sqrt{2}$ qui est irrationnel.

PROBLÈMES ET PARADOXES

Infinis dénombrable et continu

Ce problème d'incommensurabilité est souligné par Zénon d'Élée (490-430 av. J.-C.). Il formule en effet de célèbres paradoxes, mettant en lumière la contradiction entre une vision discrète et une vision continue

du monde. Ce problème ne sera réellement résolu qu'au XIXe siècle par Dedekind et surtout ***Cantor*** qui formalisa les différents infinis : dénombrable et continu. Elève de Platon, Eudoxe de Cnide (408-355 av. J.-C.) reprit le problème d'incommensurabilité soulevé par les pythagoriciens. Il développa ainsi la méthode d'exhaustion pour calculer des volumes. Cette méthode s'apparente à ce qu'on appellera plus tard le calcul intégral découvert par Newton et Leibniz.

Paradoxe d'Achille et de la tortue

Si une tortue a de l'avance au départ sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper quelle que soit sa rapidité. En effet, pendant qu'il court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance. Ainsi, lorsqu'il a atteint le point de départ de la tortue, celle-ci a toujours de l'avance sur lui. En recommençant le même raisonnement, on conclut qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue.

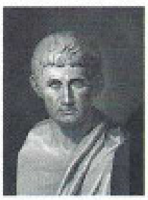
Quadrature du cercle, duplication du cube et trisection de l'angle

À la même époque (450 av. J.-C.) vivait Hippocrate de Chio (à ne pas confondre avec son contemporain Hippocrate de Cos, spécialiste de médecine). Celui-ci fonda une école de mathématiques à Athènes. Il obtint des résultats importants sur la quadrature des lunules (croissants), qui firent sa réputation. Il tentait avec cet outil de résoudre le premier des trois problèmes principaux des mathématiciens grecs de cette époque : la quadrature du cercle. Cela consiste à construire à la règle et au compas un carré de même surface qu'un cercle donné.

Les deux autres problèmes considérés alors étaient la duplication du cube et la trisection de l'angle. Le premier pose le problème de la construction d'un cube dont le volume est le double d'un cube donné ; le second consiste à partager un angle en trois angles égaux.

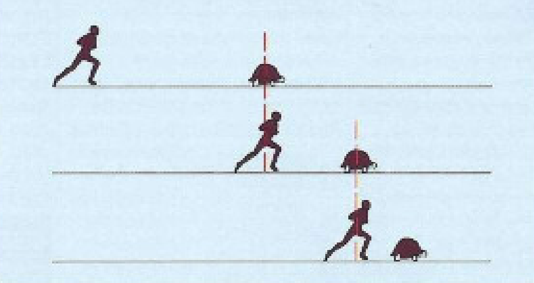
Ces problèmes occupèrent les mathématiciens pendant plusieurs siècles et ce n'est qu'en 1837 que Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) établit que les deux derniers sont impossibles. Il fallut attendre Ferdinand Lindemann (1852-1939) en 1882 pour montrer que la quadrature du cercle est elle aussi impossible.

Aristote (384-322 av. J.-C.) n'apportera pas de résultat très important aux mathématiques, mais



ce fut le premier à poser les lois du raisonnement : propositions, sophismes, systèmes déductifs. Prémisses de la logique, ces lois sont la base des démonstrations mathématiques sans lesquelles cette science ne serait que du calcul.

Paradoxe d'Achille et de la tortue



L'ÉCOLE D'ALEXANDRIE

À partir de la fin du IVe siècle av. J.-C., la science se fait au Musée et à la Bibliothèque d'Alexandrie. Un des personnages les plus importants est alors Euclide (330-260 av. J.-C.), auteur des *Éléments*. Cet ouvrage est une synthèse de la géométrie grecque, qui servit de base à la géométrie pendant plusieurs siècles, et qui est encore la base de l'enseignement de cette discipline aujourd'hui. Il y définit entre autres les concepts de point, droite, cercle et énonce les postulats de la géométrie.

Les 5 Postulats d'Euclide

Euclide renonçait à les démontrer. Ils posent la base de la géométrie euclidienne (géométrie plane) :

1 - étant donnés deux points A et B, il existe une droite passant par A et B ;

2 - tout segment [AB] est prolongeable en une droite passant par A et par B ;

3 - pour tout point A et tout point B distinct de A, on peut décrire un cercle de centre A et passant par B ;

4 - tous les angles droits sont égaux entre eux ;

5 - par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite. Euclide lui-même émit des doutes à propos de ce postulat. Sa remise en question permit au XIXe siècle l'élaboration des géométries dites non-euclidiennes.

Apollonius de Perge

Apollonius de Perge (262-180 av. J.-C.) était un autre membre célèbre de l'école alexandrine. Il a réuni ses études dans un ouvrage intitulé *Sur les coniques*. Il y décrit les courbes obtenues par la section d'un cône par un plan : paraboles, hyperboles et ellipses.

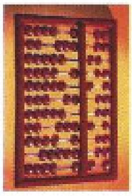
Archimède

C'est également au IIIe siècle av. J.-C. qu'***Archimède*** (287-212 av. J.-C.) effectua un encadrement de π avec une préci-sion jamais atteinte auparavant, entre 3,1408 et 3,1429 et qu'Ératosthène (276-196 av. J.-C.) fut

le premier à calculer la longueur d'un méridien terrestre. Il l'évalue à 40 000 km soit une erreur de 3 %, ce qui est remarquable.

LES MATHÉMATIQUES EXTRÊME-ORIENTALES

Les mathématiques grecques étaient principalement composées par la géométrie. Les mathématiques extrême-orientales sont pour leur part essentiellement la science des



nombres. On doit par exemple aux Chinois l'invention des carrés magiques ou du ***boulier***. Le Chinois Liu Hui (vers 250) estimait la valeur de π à 3,14159, ce qui est tout de même assez précis !

Les Hindous concurent le système de numération positionnelle au IVe siècle après J.-C., système que les arabes ont repris et transmis aux Européens. On trouve notamment pour la première fois l'utilisation du zéro ou de nombres négatifs dans les ouvrages de Brahmagupta (598-660).

Cependant, ces mathématiques sont utilitaires et servent à résoudre des problèmes précis. Les Chinois et les Hindous n'avaient pas de théorie mathématique générale. Cela ne les empêcha pas de résoudre des problèmes très complexes, comme par exemple des équations de degré élevé (jusqu'à 9).

LES ARABES : LE RETOUR DES MATHÉMATIQUES

À partir du IXe siècle, les mathématiciens arabes ont redécouvert et enrichi les travaux

Avant la renaissance

Thalès de Milet
(624-546 av. J.-C.)

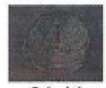
Fondateur de la géométrie.

Pythagore
(570-500 av J.-C.)
Fondateur de l'arithmétique.

Euclide
(330-260 av. J.-C.)
Ses 5 postulats sont à la base de la géométrie plane.

Archimède
(287-212 av. J.-C.)
Approximation de π entre 3,1408 et 3,1429.

Ératosthène
(276-196 av. J.-C.)



Calcul du méridien terrestre évalué à 40 000 km.

Brahmagupta
(598-660)
Introduction du 0 et des nombres négatifs.

Al Bathani
(858 - 929)
Introduction des notions de sinus et cosinus.

Al-Kashi
(XIVe siècle)
Valeur approchée de π à 16 décimales.

L'estimation de π la plus précise

En 2002

π

1 241,1 milliards de décimales

des mathématiciens grecs. Ils inventèrent également les chiffres arabes, qui proviennent des chiffres indiens et que nous utilisons toujours aujourd'hui.
Le mathématicien Thabit ben Q'ra (836 - 901) fut le premier à traduire les travaux d'Archimède, l'étude d'Apollonius sur les sections coniques, ainsi que la géométrie d'Euclide.
Il élargit l'usage de la théorie des nombres aux rapports entre les grandeurs géométriques. Ensuite, Al Bathani (858-929) introduisit la notion de sinus et de cosinus, remplaçant la corde des angles utilisée par les grecs. Il fut ainsi l'inventeur de la trigonométrie. Mais le mathématicien le plus important du IXe siècle est sans doute Muhammad Al-Khwarizmi (780 - 850). Celui-ci écrivit un traité de mathématiques pratiques pour montrer « ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique » dans lequel il explique les fondements de l'algèbre. Il y explique les procédés qu'il utilise pour résoudre des équations et qui se nomment al-jabr et al-muqabala.

Au Xe siècle, les travaux se portent sur l'élaboration de table de valeurs de sinus et sur une systématisation de l'algèbre. Abu Kamil (850 -930) étudie par exemple les équations du 4e degré et les nombres irrationnels comme π.

Le XIe siècle fut moins productif, et c'est au XIIe siècle qu'Omar Al-Khayyam (1050 - 1123) étudia la géométrie d'Euclide et l'algèbre. Il traita, et à sa suite Al-Tusi (1201-1274), de l'extraction de racines 4e, 5e, voire d'ordres supérieurs.
Enfin, Al-Kashi à la fin du XIVe siècle, calcula, entre autres travaux, une valeur approchée de π à 16 décimales. Il montra également une généralisation du théorème de Pythagore pour un triangle quelconque.

LA RENAISSANCE

C'est avec la parution des traductions des Éléments d'Euclide en Italie à la fin du xve siècle que les mathématiques reprennent de l'essor en Europe. Les artistes comme Paolo Uccello (1397 - 1475) ou Piero della Francesca (1416 - 1492) exploitent ces connaissances

pour inventer la ***perspective***. Les cartographes tirent également profit de cette renaissance mathématique avec en particulier Gerhard Mercator (1512 - 1594) au xvie siècle.

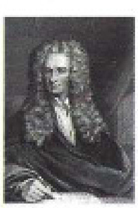
C'est également au XVe siècle que renaît la trigonométrie grâce à ***Regiomontanus*** (1436 - 1476) qui explique comment calculer le sinus et les cordes des angles et qui publie des tables de sinus.

L'algèbre avait été abordée au début du XIIe siècle par ***Leonardo Fibonacci de Pise*** (1170 - 1250), mais c'est réellement au XVIe siècle que cette science des équations prend de l'importance.

En particulier, le problème de la résolution des équations du 3e degré (avec x^3) occupa de nombreux mathématiciens. Scipione del Ferro (1465 - 1526) résolut un cas particulier de ces équations, celles qui ne contiennent pas de second degré (pas de x^2), mais ne publia pas ce résultat. ***Niccolo Tartaglia*** (1500 - 1557) trouva indépendamment le même résultat qu'il compléta par la résolution des équations qui ne contienne pas de premier degré (pas de x). Il refusa également de rendre publiques ses découvertes mais les révéla à Jérôme Cardan (1501 - 1576) qui les publia en 1545 dans son *Ars Magna*, le premier grand traité d'algèbre européen. Cet ouvrage présente une véritable théorie des équations algébriques. Pour ces travaux, Cardan est le premier à utiliser les « nombres imaginaires » en utilisant la racine carrée de *-1*.

Cette époque voit également l'apparition des signes mathématiques que nous utilisons aujourd'hui. Auparavant, on écrivait les équations et les calculs en texte et il est probable que ceci ait ralenti l'avancée de la science mathématique.
Le symbole « + » était une abréviation du « et » latin et le symbole « = » fut introduit en 1537 par l'anglais Robert Recorde (1510 - 1558). L'introduction de lettres pour désigner les inconnues (aujourd'hui x, y, z, etc) est faite par l'allemand Michael Stifel (1486 - 1567). Le français François Viète (1540 - 1603) contribua également à cette entreprise en introduisant non seulement des symboles pour les grandeurs algébriques (les inconnues), mais également pour les opérations (multiplication, division, etc). Il appliqua également ces méthodes à la trigonométrie.
Ces travaux et leur usage par les mathématiciens des XVIe et XVIIe siècles simplifièrent l'algèbre et la trigonométrie et permirent des avancées plus rapides.

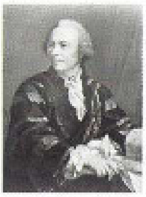
LES XVIIe ET XVIIIe SIÈCLES : L'INVENTION DE L'ANALYSE



Au XVIIe siècle apparaît le calcul infinitésimal découvert indépendamment par ***Isaac Newton*** (1642 - 1727) et Gottfried Leibniz (1646 - 1716). Ce calcul consiste à considérer des quantités infiniment petites. Il deviendra plus tard le calcul différentiel et intégral ou le calcul des variations.
Cette découverte est engendrée par l'invention de la géométrie analytique en particulier par ***René Descartes*** (1596 - 1650) et Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Le premier, dans sa *Géométrie* publié en appendice de son *Discours de la méthode* en 1637, associe par cette méthode les droites ou les courbes à des équations algébriques. Le second découvrit comment résoudre les problèmes d'extremum en y associant la résolution d'équations algébriques.
Les logarithmes apparurent à la même époque, découverts par John Napier (1550 - 1617) et Henry Briggs (1561 - 1630).
Le calcul des probabilités fut également théorisé au XVIIe siècle en grande partie par ***Blaise Pascal*** (1623 - 1662).

On lui doit également de nombreux travaux dans tous les domaines et en particulier sur le triangle binomial qui, bien que découvert dès l'antiquité, porte son nom.
La résolution des problèmes posés par Leibniz et Newton de quadrature de surfaces courbes ou d'intégration des équations différentielles fait du XVIIIe siècle le siècle de l'analyse.
Les principaux mathématiciens qui y contribuent sont Bernouilli, Joseph Lagrange (1736 - 1813), Adrien Legendre (1752 - 1833), Jean D'Alembert (1717 - 1783)…



Leonhard Euler (1707 - 1783) dégagea le calcul infinitésimal de la géométrie qui le rendait très difficile à appréhender. Il rattacha également, avec Pierre Laplace (1749 - 1827), la trigonométrie à l'algèbre.
C'est à cette époque que les conjonctures de Christian GoldBach (1690 - 1764) sont posées : tout entier pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers et tout entier impair supérieur ou égal à 9 est somme de trois nombres premiers. Malgré des progrès dus à Vinogradov (1937), Chen (1973) et Vaughan (1975), ces conjectures demeurent aujourd'hui encore des problèmes non résolus.

LE XIXe SIÈCLE : NOUVEAU FORMALISME ET NOUVELLES DISCIPLINES

On voit apparaître peu à peu un nouveau formalisme et une nouvelle rigueur, par exemple dans la construction des nombres réels ou l'axiomatisation des nouvelles structures algébriques tels les groupes, ou les espaces vectoriels.

Au début du XIXe siècle, ***Augustin-Louis Cauchy*** (1789 - 1857) met en évidence à travers ses nombreux travaux en analyse l'insuffisance de l'intuition géométrique et la nécessité de la rigueur mathématique. L'analyse est alors principalement composée de la théorie des fonctions à variable complexe abordée également par Georg Riemann (1826 - 1866).
L'algèbre simplifiée par le nouveau formalisme progresse considérablement grâce à Niels H. Abel (1802 - 1829), ***Evariste Galois*** (1811 - 1832), Carl Jacobi (1804 - 1851), Ernst Kummer (1810 - 1893), George Boole (1815 - 1864), Marius Lie (1842 - 1899). Ces deux derniers donnent d'ailleurs leur nom à des structures algébriques nouvelles.

Une révolution importante en géométrie est l'invention des géométries non-euclidiennes où l'on remplace le postulat d'Euclide par un autre. Ce sont les géométries hyperboliques et elliptiques dues respectivement à Nikolaï Lobatchevski (1793 - 1856) et à Riemann (1826 - 1866). Les géométries projectives sont ensuite étudiées par Michel Chasles (1793 -1880), Jean Poncelet (1788 - 1867), Felix Klein (1849 - 1925).
Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apporta des résultats dans tous ces domaines et contribua de plus à l'élaboration de la théorie statistique. On lui doit par exemple la distribution normale (également appelée courbe de Gauss). Il poursuivait les travaux de Denis Poisson (1781 - 1840) et Lambert Quételet (1796 - 1874).

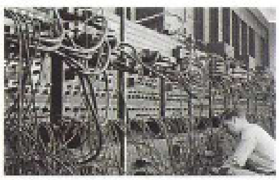
On voit également apparaître la théorie des ensembles introduite par Georg Cantor (1845 - 1918) et Richard Dedekind (1831 - 1916) qui permet en particulier de différencier l'infini des entiers, dénombrable, et l'infini des réels, continu, qui est « plus grand », réfutant enfin de façon convaincante les paradoxes de Zénon d'Élée, 2 300 ans après leur formulation !

LES MATHÉMATIQUES MODERNES

La fin du XIXe siècle voit la naissance des mathématiques modernes. À Paris, en 1900, David Hilbert (1862 - 1943) énonce une liste de 23 problèmes sur des domaines très variés qui engendreront de nombreuses recherches, encore aujourd'hui.

Hilbert et ***Henri Poincaré*** (1854 - 1912) sont considérés comme les plus grands mathématiciens de cette époque, et sans doute les derniers à connaître toute la mathématique de leur temps.
Les mathématiciens du XXe siècle poursuivent l'œuvre de formalisation entamée au siècle précédent, l'élargissant à tous les domaines des mathématiques. L'axiomatisation est poussée à son paroxysme avec le groupe de mathématiciens Bourbaki (1939) qui publie depuis sa création les *Eléments de Mathématique* dont on dénombre à ce jour une quarantaine de volumes. On assiste également à une généralisation de certains résultats. Ainsi, Henri Lebesgue (1875-1941), s'appuyant sur les travaux d'Emile Borel (1871-1956), généralise la théorie de l'intégration. En algèbre, Stefan Banach (1892-1945) définit de nouvelles structures.
Les ensembles découverts par Gaston Julia (1893 - 1978) permirent à ***Benoît Mandelbrot*** d'inventer les fractales dans les années 1970. Elles ont des applications dans de nombreux domaines où la théorie du chaos s'applique, c'est-à-dire où d'infimes variations des conditions de départ entraînent des variations immenses à l'arrivée (biologie, économie, climatologie, mécanique des fluides).

Dans les années 1930, Kurt Gödel (1906 - 1978) montre que les mathématiques sont « incomplètes » : il existe au moins une proposition indécidable, c'est-à-dire dont on ne peut prouver qu'elle est vraie ou fausse ! On peut cependant montrer que cette science n'est pas contradictoire…
La deuxième moitié du XXe siècle voit l'apparition des ***ordinateurs*** et de



l'informatique dont Johannes Von Neumann (1903 - 1957) et Alan Turing (1912 - 1954) sont considérés comme les inventeurs. Depuis, ces outils et leur puissance de calcul ont considérablement facilité certaines tâches des mathématiciens, mais il n'existe pas encore de machine capable de réaliser une démonstration mathématique complexe sur un sujet donné.
Ce n'est qu'en 1995 qu'***Andrew Wiles*** résout le célèbre théorème de Fermat, énoncé en 1641, en utilisant un rapprochement des formes modulaires et des courbes elliptiques. L'énoncé du théorème de Fermat-Wiles (1995) est le suivant : il n'existe pas de solution autre que x=0, y=0, z=0 à l'équation $x^n+y^n=z^n$ dès que n est supérieur à 2.

Certains problèmes sont d'ailleurs toujours ouverts comme par exemple les « 7 problèmes du millénaire » posés en 2000 par le *Clay Mathematics Institute*, dotés chacun d'un prix d'un million de Dollars.