Les **matrices**

L'HISTOIRE DES MATRICES

Si l'on remonte très loin dans le temps, on retrouve les carrés magiques des civilisations arabes et chinoises qui sont une approche des matrices. Cependant, les premiers travaux traitant de ce sujet sont ceux du mathématicien allemand ***Leibniz***, datant de la fin du XVII[e] siècle, alors qu'il travaille sur la résolution de systèmes d'équations. Ses travaux seront ensuite exploités par Cramer,

toujours dans l'optique de résoudre des systèmes d'équations, ce dernier mettant au point un moyen de déterminer l'existence ou non de solutions à un système. Puis ***Laplace***, Lagrange, Gauss et Cauchy, le premier à introduire les tableaux en 1815,

s'intéresseront au problème à leur tour, chacun l'investiguant d'un point de vue différent.

La notion de matrice à proprement parler date de 1858 : le concept a été mis au point par les mathématiciens anglais Sylvester et Cayley, et le terme introduit par Sylvester en 1850 pour désigner un tableau rectangulaire de nombres. Les matrices constituent un outil mathématique performant pour aider à la résolution d'équations. Elles sont utilisées dans des domaines aussi variés que la résolution de systèmes d'équations bien sûr, en physique pour des équations mais également en recherche opérationnelle qui consiste en l'optimisation d'une solution : par exemple le cas du voyageur qui doit passer une fois et une seule par *n* villes réparties dans l'espace et ce dans le temps le plus court, ou en empruntant le trajet le plus court. Les matrices se retrouvent également dans notre vie quotidienne : les données sont cryptées numériquement grâce à des matrices, ce qui

oblige les ***téléphones portables*** et les ordinateurs à être truffés de calculs matriciels. Les graphismes des jeux vidéo ou des films sont également calculés à partir de matrices. Sans le savoir, nous les côtoyons chaque jour.

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations qui dépendent les unes des autres. À l'origine, on résolvait les systèmes d'équations à la main, mais l'invention des matrices a grandement simplifié les calculs par la capacité d'abstraction qu'elles apportent. Afin de mieux mesurer certains de ces avantages, considérons un exemple où nous appliquerons en parallèle la méthode classique et la méthode matricielle. Connaissant les montants de trois factures établies sur les achats, en quantités différentes, de trois produits distincts, on cherche à retrouver les prix par article de chacun de ces produits. On sait que :

- 3 packs d'eau, 2 paquets de céréales et 19 t-shirts ont été achetés pour un montant de 100 euros.
- 4 packs d'eau, 31 paquets de céréales et 4 t-shirts ont été achetés pour un montant de 78 euros.
- la moitié d'un pack d'eau, 6 paquets de céréales et 7 t-shirts ont été achetés pour un montant de 56 euros.

On commence tout d'abord par mettre le problème en équation, c'est-à-dire le traduire en termes mathématiques. De manière générale, on écrit les systèmes de la façon suivante pour clarifier les calculs : on aligne sur une même colonne chaque valeur inconnue x, y ou z, à gauche du signe d'égalité ; à droite du signe d'égalité se trouvent les coefficients qui ne concernent pas les données indéterminées.

Pour ce qui nous concerne, cela revient à appeler x le prix d'un pack d'eau, y celui d'un paquet de céréales et z celui d'un t-shirt. Les coefficients qui ne concernent pas les données indéterminées sont ici le prix total payé pour chacune des trois factures.

$$\begin{cases}3x+2y+19z=100\\4x+31y+4z=78\\\frac{1}{2}x+6y+7z=56\end{cases}$$

Pour passer à la notation matricielle, il suffit de recopier les données que nous avons soigneusement organisées en colonnes et qui forment presque un tableau que nous allons matérialiser. La première colonne est celle des coefficients de x, la seconde celle des coefficients de y, la troisième celle des coefficients de z. Enfin, la dernière est celle représentant les valeurs sans données inconnues. On inscrit ainsi les données dans un tableau, en respectant le même ordre que dans le système et en supprimant simplement après chaque coefficient la valeur à laquelle il se rapporte. Toutes les opérations que l'on fera ensuite (additions, multiplications) auront lieu sur les lignes en entier : on agira donc en parallèle sur les lignes du système, et sur les lignes de la matrice – ce qui correspond à ne pas mélanger les x, les y, les z et les coefficients sans données inconnues (c'est-à-dire à ne pas confondre les packs d'eau, les paquets de céréales et les t-shirt), ce qui se produirait si jamais on procédait à des manipulations sur les colonnes. L'exemple est détaillé dans l'encadré ci-contre. Dans la colonne de gauche se trouve la méthode classique alors que la méthode matricielle se trouve dans la colonne de droite.

L'avantage des matrices est d'effectuer les mêmes calculs que dans le système mais dans un tableau, avec les données alignées les unes sous les autres selon leur nature. De plus, on y retrouve mieux la présence des zéros qui correspond à la disparition de certaines données inconnues. Cependant, l'utilisation de matrices repose sur des conventions : le choix de ce que représentent les colonnes, et le fait de n'effectuer les opérations que sur des lignes toutes entières. C'est pourtant grâce à de tels avantages qu'on utilisa au départ les matrices, avant de découvrir bien d'autres propriétés pratiques tant pour la résolution des systèmes que pour rendre compte de situations complexes comme on peut en trouver en physique et en mécanique plus particulièrement.

DÉFINITION ET NOTATIONS

Une matrice est un tableau d'éléments, qui sont généralement des nombres. On parle de matrice à n lignes et p colonnes et on écrit :

$$M=\underbrace{\begin{pmatrix}m_{11}&\cdots&m_{1p}\\\vdots&\ddots&\vdots\\m_{n1}&\cdots&m_{np}\end{pmatrix}}_{p}\left.\vphantom{\begin{pmatrix}m\\m\\m\end{pmatrix}}\right\}n=\left(m_{ij}\right)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$$

où chaque élément m_{ij} est en fait une case du tableau. Plus précisément, m_{ij} représente l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j du tableau. On note $M_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&17&8\\3&-3&4&1{,}5\\4&5&6&-7\end{pmatrix}$$

Exemple d'application

$$\begin{cases}3x+2y+19z=100\\4x+31y+4z=78\\\frac{1}{2}x+6y+7z=56\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}3&2&19&100\\4&31&4&78\\\frac{1}{2}&6&7&56\end{pmatrix}$$

On multiplie par 2 tous les coefficients de la dernière ligne, pour faire apparaître un coefficient 1 sur le x, c'est-à-dire un coefficient 1 dans la première case de la dernière ligne de la matrice.

$$\begin{cases}3x+2y+19z=100\\4x+31y+4z=78\\x+12y+14z=112\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}3&2&19&100\\4&31&4&78\\1&12&14&112\end{pmatrix}$$

La dernière ligne devient dorénavant la première ligne, celle qui va nous permettre de continuer la résolution, et de trouver enfin la valeur de x une fois tous les calculs menés à bien.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\3x+2y+19z=100\\4x+31y+4z=78\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&12&14&112\\3&2&19&100\\4&31&4&78\end{pmatrix}$$

Cette fois, nous allons faire disparaître les x des deux dernières lignes du système, pour ne plus avoir que deux équations à deux inconnues qui seront y et z sur lesdites lignes. Pour ce faire, on effectue les opérations suivantes :

deuxième ligne - (3 x première ligne)

troisième ligne - (4 x première ligne).

On procède de même dans la matrice, ce qui fera apparaître deux zéros sur les deux dernières lignes de la première colonne.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\-34y-23z=-206\\-17y-52z=-346\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&12&14&112\\0&-34&-23&-206\\0&-17&-52&-346\end{pmatrix}$$

Pour continuer les calculs, on inverse la deuxième et la troisième ligne : cela fait passer tout en bas la ligne avec le plus grand coefficient en y, et permet des calculs moins compliqués.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\-17y-52z=-346\\-34y-23z=-206\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&12&14&112\\0&-17&-52&-346\\0&-34&-23&-206\end{pmatrix}$$

On fait à présent disparaître y de la dernière ligne, pour qu'il n'y reste plus que z. On ne revient pas tout de suite à un coefficient 1 pour y sur la deuxième ligne parce que les coefficients en y de la deuxième et de la troisième ligne sont multiples l'un de l'autre. On effectue donc cette fois l'opération suivante :

troisième ligne - (2 x deuxième ligne).

Comme pour x, on fait apparaître un zéro dans la matrice dans la deuxième case de la dernière ligne.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\-17y-52z=-346\\81z=486\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&12&14&112\\0&-17&-52&-346\\0&0&81&486\end{pmatrix}$$

Nous obtenons maintenant facilement la valeur de z, ce qui revient en réalité à faire apparaître un coefficient 1 devant z sur la dernière ligne, c'est-à-dire un 1 dans la troisième colonne sur la dernière ligne de la matrice.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\y+\frac{52}{17}z=\frac{346}{17}\\z=6\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}1&12&14&112\\0&1&\frac{52}{17}&\frac{346}{17}\\0&0&1&6\end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à finir la résolution du système, en remplaçant z par sa valeur, nous obtenons la valeur de y dans un premier temps, puis celle de x aussitôt après.

$$\begin{cases}x+12y+14z=112\\y=\frac{346-52\times6}{17}=\frac{34}{17}=2\\z=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=106-12\times2-14\times6=4\\y=2\\z=6\end{cases}$$

Pères des matrices

Laplace
(1749 - 1827)
Savant français, il énonce la théorie générale sur les déterminants des systèmes d'équations linéaires.

Gauss
(1777 - 1855)
Mathématicien allemand, il est l'auteur de la méthode du pivot consistant à trianguler une matrice.

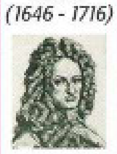
Cauchy
(1789 - 1857)
Mathématicien français, il propose en 1815 une notation du déterminant sous forme de tableau.

Eisenstein
(1823 - 1812)
Mathématicien allemand, il introduit la notion d'inverse de matrice.

Sylvester
(1814 - 1897)
Mathématicien anglais, il introduit le terme de matrice en 1850.

Les travaux **les plus anciens**

Leibniz
(1646 - 1716)



il aborde le sujet des matrices dans ses travaux sur la résolution d'équations.

A est une matrice à n = 3 lignes et p = 4 colonnes, c'est-à-dire que $A \in M_{3,4}$. De plus, $a_{23} = 4$; $a_{32} = 5$.

Opérations élémentaires

On peut bien sûr définir plusieurs opérations sur les matrices, à commencer par les opérations classiques : addition et multiplication.

Addition

Il faut pour additionner les matrices qu'elles aient le même nombre de lignes et de colonnes. Ensuite on les additionne case par case. Dans le cas de deux matrices A et B de $M_{n,p}$ (à n ligne et p colonnes), on procède de la façon suivante :

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

$$=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$$

Le résultat est une matrice $C = (A+B) = (c_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$ de $M_{n,p}$ également, dont les coefficients c_{ij} sont définis par $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$.

Multiplication

On pourrait penser à une multiplication terme à terme également, mais ce n'est pas de la sorte que se définit la multiplication de deux matrices. Concernant les dimensions, on ne peut pas multiplier n'importe quelle matrice. Il faut que le nombre de lignes de la première soit égal au nombre de colonnes de la seconde.

Dans le cas de deux matrices $A \in M_{n,k}$ et $B \in M_{k,p}$ on pose le calcul et on obtient une matrice $C = (c_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p} \in M_{n,p}$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$$

c'est-à-dire que chaque terme c_{ij} de la matrice résultante est égal à la somme des produits terme à terme des éléments a_{il} de la ligne i de la matrice A avec les éléments b_{lj} de la colonne j de la matrice B. Un exemple de multiplication de matrices est donné dans l'encadré ci-dessous.

Dans le cas de deux matrices D et E telles que n = p, les produits DE et ED ne sont pas égaux de manière générale (on dit que le produit n'est pas commutatif). Une telle matrice, ayant autant de lignes que de colonnes, est dite carrée. On note $D \in M$

Exemple :

$$\begin{array}{cc} & E\left\{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\right. \\ \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}} & \underset{DE}{\begin{pmatrix} 2-45 & -7+27 \\ -20 & -12 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} -43 & 20 \\ -20 & -12 \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cc} & D\left\{\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right. \\ \underset{E}{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} & \underset{ED}{\begin{pmatrix} 2 & 18+28 \\ 5 & 45-12 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 2 & 46 \\ 5 & 33 \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminant

Opération qui n'existe que pour les matrices carrées, ayant autant de colonnes que de lignes à savoir n = p, le déterminant d'une matrice est un nombre. Son expression sur des matrices ayant plus de trois colonnes est complexe, mais il s'exprime bien pour des dimensions inférieures : les applications en physiques (tenseurs en mécanique par exemple) s'attachent à des matrices de dimensions n = 2 ou 3.

n=1 :

matrice réduite à un seul élément, $\det(A) = \det(a_{11}) = a_{11}$

le déterminant est égal à cet élément.

n=2 :

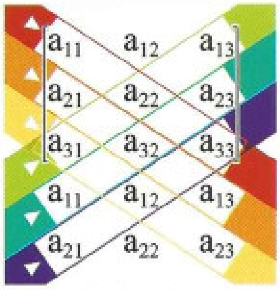
$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}\times a_{22}-a_{21}\times a_{12}$$

Le déterminant est égal aux produit des termes diagonaux (termes de diagonale descendante) moins le produit des termes non diagonaux (termes de diagonale montante)

n=3 :

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice de $M_{3,3}$ on recopie d'abord les deux premières lignes sous la matrice puis on effectue des produits sur les diagonales descendantes et montantes



Somme sur les diagonales descendantes :

$$dd(A)=\boxed{a_{11}\times a_{22}\times a_{33}}+\boxed{a_{21}\times a_{32}\times a_{13}}+\boxed{a_{31}\times a_{12}\times a_{23}}$$

Somme sur les diagonales montantes :

$$dm(A)=\boxed{a_{31}\times a_{22}\times a_{13}}+\boxed{a_{11}\times a_{32}\times a_{23}}+\boxed{a_{21}\times a_{12}\times a_{33}}$$

Finalement on trouve

$\det(A) = dd(A) - dm(A)$

cette méthode est appelée la règle de Sarrus.

Exemples :

Calcul pour une matrice à 2 lignes et 2 colonnes :

$$\det(D)=\det\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=1\times(-4)-0\times 9=-4$$

Calcul pour une matrice à 3 lignes et 3 colonnes

$$\det(F)=\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \end{matrix}$$

$dd(F) = 2x(-3)x1 + 0x7x5 + 6x(-1)x4$
$= -30$

$dm(F) = 0x(-1)x1 + 2x7x4 + 6x(-3)x5$
$= -44$

$\det(F) = dd(F) - dm(F)$
$= -30 - (-44)$
$= 14$

Trace

On peut tirer d'autres nombres intéressants d'une matrice, en considérant cette fois uniquement ses coefficients diagonaux : la trace ne s'applique de nouveau qu'aux matrices carrées et permet de calculer la somme de tous les termes diagonaux.

Pour tout élément A de $M_{n,n}$ on définit la trace par :

$$tr(A)=tr\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Exemple : calcul pour une matrice à 2 lignes et 2 colonnes

$$tr(D)=tr\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=1+(-4)=-3$$

Calcul pour une matrice à 3 lignes et 3 colonnes

$$tr(F)=tr\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}=2+(-3)+1=0$$

Lien avec les applications linéaires

Applications linéaires

En réalité, chaque matrice peut s'interpréter comme un tableau de nombres, ou comme la définition d'une « fonction ». En effet, en reliant les matrices aux espaces vectoriels, les matrices représentent les applications linéaires : en physique, les torseurs décrivent les déplacements d'un objet et ils sont en fait une expression de la fonction qui permet de déplacer l'objet de sa position initiale à sa position actuelle. Par exemple, dans le domaine de la physique, plus précisément de la mécanique, pour représenter la rotation d'un mobile, on peut écrire les équations de changement de ses coordonnées x et y par

$$\begin{cases} x(t)=x(0)\times\cos t-y(0)\times\sin t \\ y(t)=x(0)\times\sin t+y(0)\times\cos t \end{cases}$$

Ou bien on peut décomposer ce système en trois matrices : deux vecteurs (matrices colonnes, telles que p = 1) et une matrice. Ici, les deux vecteurs colonnes sont les vecteurs coordonnées et ont tous deux même longueur n = 2, donc la matrice est carrée de $M_{2,2}$. On écrit :

$$M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$
$$=R(t)M(0)$$

où $M(t)$ est le vecteur position du point M à l'instant t, M(0) est le vecteur position à l'instant initial, lorsqu'on débute l'expérience), et R(t) est la matrice de rotation à l'instant t.

On peut étendre cela à une « fonction » f allant d'un espace de dimension p à un espace de dimension n : on écrira alors Y = MX où $Y \in M_{1,n}$, $M \in M_{n,p}$ et $X \in M_{1,p}$ pour l'habituel y = f(x), où y est dans l'espace d'arrivée F de dimension n, et x dans l'espace de départ E de dimension p.

Ces « fonctions » f sont en fait des applications linéaires ou morphismes, c'est-à-dire qui sont définies dans un espace vectoriel E (dont les éléments sont des vecteurs et se représentent avec des matrices colonnes) et à valeurs dans un autre espace vectoriel F (qui peut être égal à E comme on l'a vu avec la rotation) et vérifient les propriétés suivantes :

- pour tous a et b dans E, f(a)+f(b)
- pour tous $\lambda \in K$ et $a \in E$, $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

(K est un corps sur lequel est défini l'espace vectoriel E, usuellement le corps des nombres réels R)

Dans le cas où E = F, on dit que f est un endomorphisme.

Matrices de passage

En fait lorsque l'on écrit la matrice $M \in M_{n,p}$ correspondant à une application linéaire f, cela se fait toujours d'un espace E avec une certaine base $B_E = (e_j)_{1\le j\le p}$ vers un espace F avec une certaine base $B_F = (f_i)_{1\le i\le n}$

Ainsi la matrice de l'application identité Id, telle que pour tout x on ait Id(x) = x et F = E de dimension n, n'est pas la matrice identité

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(il n'y a de 1 que sur la diagonale, tous les autres coefficients sont nuls) si les bases B_E et $B'_E = B_F$ ne sont pas confondues : on décompose alors chaque vecteur f_j de la base B'_E selon les vecteurs e_i de la base B_E, ce qui revient à les projeter comme on le ferait en physique pour décomposer un vecteur v suivant le repère (O, ex, ey, ez) en v = vxex+vyey+vzez où l'on a en fait vx = v.ex, vy = v.ey et vz = v.ez par projection. La matrice de passage de la base $B_E = (e_j)_{1\le j\le p}$ à la base $B_F = (f_i)_{1\le i\le n}$ s'écrit donc :

$$P_{B_E}^{B'_E}=\begin{pmatrix} f_1.e_1 & \cdots & f_n.e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1.e_n & \cdots & f_n.e_n \end{pmatrix}\in M_{n,n}$$

On utilise ensuite ces matrices pour exprimer un même vecteur dans deux bases différentes : si X désigne le vecteur écrit dans la base B_E et X' le même vecteur écrit dans la base B'_E alors on les relie par la relation

$$X=P_{B_E}^{B'_E}X'$$

Exemple : en physique on a souvent besoin d'exprimer un vecteur :

$$v=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

exprimé dans un repère cartésien suivant des coordonnées dites cylindriques :

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix}$$

On doit passer de (O, e_x, e_y, e_z) à (O, e_r, e_θ, e_z). La matrice de passage s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car il s'agit en effet d'une rotation dans le plan (O, e_x, e_y) et le vecteur vertical ez reste inchangé. Par ailleurs, on a

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

et on retrouve les formules de rotation.

Interprétation des opérations matricielles en termes d'applications linéaires

L'addition des matrices correspond à l'addition des morphismes : on comprend mieux pourquoi il faut que les dimensions soient les mêmes, dans la mesure où pour des applications linéaires il faut que les espaces de départ et d'arrivée soient identiques pour les deux fonctions.

La multiplication des matrices correspond à la composition. Là encore les dimensions se justifient :

- si f va de E vers G, avec E de dimension p et G de dimension k
- si g va de G vers F, avec F de dimension n

alors $g \circ f$ va de E vers F

- si $M \in M_{k,p}$ est la matrice de f et $N \in M_{n,k}$ celle de g, alors $NM \in M_{n,p}$ est la matrice de $g \circ f$.

Exemple de multiplication de matrices

En pratique, on pose le calcul comme suit :

$$A\in M_{3,4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 17 & 8 \\ 3 & -3 & 4 & 1{,}5 \\ 4 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B\in M_{4,2}\begin{pmatrix} 1/2 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB=C\in M_{3,2}\begin{pmatrix} 1/2\times1+2\times2+3\times17+(-1)\times8 & 4\times1+1\times2+(-2)\times17+5\times8 \\ 1/2\times3+2\times(-3)+3\times4+(-1)\times1{,}5 & 4\times3+1\times(-3)+(-2)\times4+5\times1{,}5 \\ 1/2\times4+2\times5+3\times6+(-1)\times(-7) & 4\times4+1\times5+(-2)\times6+5\times(-7) \end{pmatrix}$$

Et on obtient :

$$C=\begin{pmatrix} 47{,}5 & 12 \\ 6 & 8{,}5 \\ 37 & -26 \end{pmatrix}\in M_{3,2}$$