



MA PHYSIQUE

TROISIEME EDITION

Giorgio
Margaritondo

Volume 1:

Partie I - MECANIQUE

Partie II - THERMODYNAMIQUE

MA PHYSIQUE

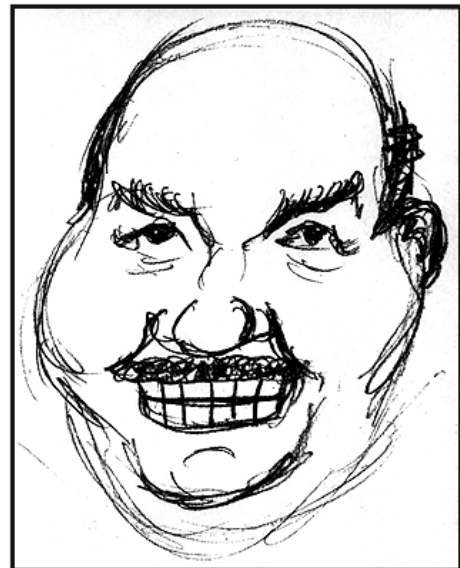
(troisième édition)

Giorgio Margaritondo

professeur ordinaire de physique
à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne



(Vu par lui-même)



(Vu par les étudiants)

Préface: pourquoi la physique?

“Au fond, l’objectif d’une éducation universitaire est d’arriver à gagner plus d’argent qu’un éducateur universitaire.”

[Auteur inconnu]

Toutes les universités et les écoles polytechniques du monde basent leur préparation propédeutique sur des matières fondamentales, telles que les mathématiques, la physique et la chimie. L’utilité de cette préparation de base est cependant critiquée par la plupart des élèves. Un jeune homme ou une jeune femme qui brûle d’envie de commencer à pratiquer une branche spécifique de l’ingénierie ne comprend pas la raison de se casser la tête et de perdre son temps avec une quantité d’idées obscures et de formules compliquées. Pourquoi - se demande notre jeune aspirant/e - ne pas commencer tout de suite par l’enseignement direct de la branche qui m’intéresse?

Si j’étais un philosophe, je répondrais par des arguments d’ordre culturel, tels que l’importance et le plaisir pour un être *humain* - donc condamné à la rationalité et au goût de la découverte - d’explorer dans sa jeunesse les mécanismes de l’univers avant la plongée irréversible dans les paperasses et les problèmes d’argent: bref, dans la réalité du travail professionnel.

Mais, *yankee* que je suis, et donc enclin au réalisme brutal, j’hésite à croire à l’efficacité de ces arguments. Par conséquent, je préfère confier le futur de l’enseignement de base - y compris celui de la physique - à des raisons plus conformes au matérialisme de notre époque.

Donc, posant ma main droite sur l’épaule de mon élève imaginaire, j’argumenterai de la manière suivante: vous avez, bien sûr, envie de commencer à travailler dans votre domaine sans attendre. Et vous trouvez que la voie la plus directe serait une éducation très ciblée, voire spécialisée dans ce même domaine. Mais permettez-moi de vous proposer une analyse concrète de votre situation future, disons d’ici dix ans, ou mieux d’ici trente ans, à environ quinze ans de votre retraite.

Voici une méthode réaliste pour concrétiser cette analyse: celle qui consiste à observer la situation actuelle dans votre domaine du point de vue de son état d’il y a trente ans. Si vous réfléchissez aux conditions technologiques de l’année 1966, vous constaterez des différences étonnantes, presque incroyables, par rapport à la technologie actuelle. Les ordinateurs étaient presque inconnus, puisqu’ils étaient de grandes dimensions, peu disponibles et difficiles d’accès (on ne travaillait pas avec les moniteurs et les claviers, mais avec des petites pièces de carton qui formaient de véritables montagnes, toujours sur le point de tomber par terre en se mélangeant les unes aux autres). Pas de microélectronique en général: les contrôles mécaniques dominaient presque partout (les circuits intégrés venaient d’être inventés, et personne ne les connaissait). La plupart des matériaux d’avant-garde n’existaient pas, par exemple les céramiques modernes, les semiconducteurs avancés, les couches ultra-minces, les structures graphitiques, une bonne partie des polymères, etc.

Imaginez donc un/e jeune aspirant/e ingénieur, brûlant comme vous d’envie de se lancer dans son activité professionnelle; et admettons que l’école de notre jeune homme

ou jeune femme est à même de lui donner une éducation "ciblée" telle que celle que vous souhaitez.

Dix ou trente ans après, notre ami/e se retrouve au milieu d'une véritable explosion technologique. Ses patrons demandent l'utilisation des moyens et des matériaux les plus avancés, puisque ceux-ci sont indispensables pour augmenter la marge de profit et battre la concurrence. Mais qu'est-ce que notre (plus si jeune) homme ou femme peut faire avec son éducation "ciblée"? Il/elle peut bien constater que la compréhension des nouvelles technologies se base sur une quantité de notions fondamentales de physique, de chimie et de mathématiques; celles-ci, hélas, tombaient en dehors des limites bien limitées et limitantes de son éducation. Peut-il/elle reprendre à grand-peine des livres universitaires et chercher dans l'étude un antidote à son ignorance?

Bien sûr qu'il/elle le peut, mais à quel prix? Il/elle doit perdre beaucoup de temps à retrouver toutes les idées qui lui sont indispensables pour commencer son étude, idées dispensées avec beaucoup d'efficacité par une éducation plus propédeutique et moins "ciblée". Et il/elle peut facilement constater que ses collègues plus jeunes - ces terribles jeunes qui semblent toujours si préparés et menaçants - sont beaucoup plus à l'aise que lui/qu'elle avec les nouvelles technologies.

Moralité: notre ami/e se trouve de plus en plus en retard par rapport à l'évolution technologique impitoyable de notre époque. Moralité plus générale: il faut réaliser que les barrières actuelles entre matières et domaines divers de la technologie se révèlent de plus en plus artificielles et ont tendance à tomber sous la pression de l'évolution de l'industrie. Nous ne sommes pas en mesure de prévoir cette évolution: on peut à peine envisager la situation d'ici trois ans, celle d'ici dix ou trente ans est absolument obscure. A l'exception des points suivants: elle sera rapide, elle sera accélérée, elle sera de plus en plus multidisciplinaire, et sa compréhension exigera de plus en plus de notions de base de domaines touchés par l'éducation propédeutique.

Voilà donc pourquoi une école *polytechnique* (le mot même le dit) ne doit pas céder aux séductions faciles de l'éducation ciblée, inaugurant la production de masse d'ingénieurs *shake-and-bake*, c'est à dire à utiliser une seule fois et à jeter ensuite. Elle doit, au contraire, remplir sa tâche et donner aux jeunes gens qui lui confient leur avenir tant les notions spécifiques à leur domaine que celles de base en physique, chimie, mathématiques etc., qui leur fournissent les instruments indispensables pour survivre et prospérer dans une situation d'évolution et de compétition, pleine de risques comme d'opportunités.

Cela dit, permettez-moi d'abandonner quelques instants mon réalisme brutal, et de vous rappeler que la culture *yankee* ne comprend pas seulement les inventeurs du Coca Cola et du Big Mac, mais aussi des philosophes tels que Jefferson (moins connu peut-être que Karl Marx, mais toujours vivant dans la société actuelle tandis que Marx...). Et, fort de cette culture, d'argumenter que, même si une préparation scientifique de base est pleinement justifiable sur la base de la réalité que nous venons d'évoquer, on ne peut pas complètement oublier une autre justification: la satisfaction spirituelle de comprendre quelque peu les mécanismes de notre univers et de pénétrer la finesse, même esthétique, des moyens théoriques que la physique nous fournit pour les comprendre. Puisque, d'après Dante Alighieri:

*Fatti non foste a viver come bruti
ma per seguir virtute e conoscenza*

Special for Internet users -- some recommended sites concerning physics. They also contain huge lists of other physics-related homepages, and can be used as good starting points for surfing:

http://www.sps.ch/sps/	(Swiss Physical Society)
http://epswww.epfl.ch/	(European Physical Society)
http://www.iop.org/	(American Institute of Physics)
http://www.aps.org/	(American Physical Society)
http://www.avv.org	(American Vacuum Society)
http://www.iop.org/	(UK Institute of Physics)
http://physicsweb.org/TIPTOP/	(Internet pilot to physics)
http://www.cern.ch	(CERN)

**“Ma Physique”
Première partie:**

Mécanique

Table des matières

	Page
I. La physique: de quoi s'agit-il (ou mon propre discours sur la méthode)?	7
II. Vivisection d'une loi physique élémentaire	13
II.1. Dimensions et unités de mesure	13
II.1.1. Unités de mesure	15
II.2. Les causes et leurs effets	16
II.3. La masse, c'est quoi?	17
II.4. De une à trois dimensions: les vecteurs	19
II.5. Mouvement sur un cercle: accélération centripète, vitesse angulaire	23
II.6. Mouvement sur une trajectoire curviligne quelconque	25
II.7. Mouvement d'un poids: quelle est la direction du temps?	26
II.8. Les oscillations	29
II.9. Un <i>test</i> de l'équivalence des masses de gravité et d'inertie	31
III. Quantité de mouvement, moment cinétique	35
III.1. Le moment cinétique	35
IV. Travail et énergie: première des lois de conservation	40
IV.1. Conditions générales de conservation de l'énergie mécanique	41
IV.2. Formules du travail et de l'énergie en trois dimensions	43
IV.3. Question du zéro de l'énergie	45
IV.4. Et si l'énergie mécanique ne se conserve pas? Les forces de frottement	46
IV.4.1. Forces de frottement dans les fluides	48
IV.5. Puissance	48
IV.6. Energie potentielle et équilibre	49
IV.7. Energie potentielle d'une molécule	50
V. Changements de référentiel	53
V.1. Forces apparentes créées par la rotation	55
V.1.1 Force de Coriolis	56
V.1.2. Généralisation des équations	57
V.1.3. Force de Coriolis - exemples	58
V.2. Beauté de la relativité d'Einstein	60
V.2.1. Relativité et vitesses	65
V.2.2. Etonnantes prévisions de M. Einstein	65
V.2.3. Mécanique à la Einstein	68
V.2.4. Transformation de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement	70
VI. Systèmes de masses ponctuelles: autres lois de conservation	72
VI.1. Forces internes et forces externes: conservation de la quantité de mouvement	72
VI.2. Centre de gravité et ses propriétés	74
VI.3. Moment cinétique et sa loi de conservation	75
VI.4. Phénomènes du type "choc"	78
VII. Solides: équilibre et mouvement	81
VII.1. Distributions continues de masses	83
VII.2. Problèmes de statique	84
VII.3. Mouvement d'un solide	85
VII.3.1. Moment d'inertie	85
VII.3.2. Théorème de Huygens et Steiner	88
VII.3.3. Dynamique de la rotation d'un solide	90
VII.3.4. Gyroscopes et toupies.	90
VII.4. Energie mécanique d'un solide	92
VIII. Statique et mouvement des fluides	95
VIII.1. Relation entre profondeur et pression	96
VIII.2. Le "principe de Pascal" et ses applications pratiques	97
VIII.3. Dynamique des fluides: mouvements stationnaires, loi de continuité	99
VIII.4. Théorèmes de Bernoulli et de Torricelli	100
VIII.5. Mouvement laminaire et turbulence	102

I. La physique: de quoi s'agit-il (ou mon propre discours sur la méthode)?

Mais assez bavardé sur la philosophie, le réalisme et Dieu sait quoi. Peu importe la raison, nous allons commencer notre voyage dans la physique. Attachez vos ceintures, éteignez vos cigarettes, ouvrez vos oreilles et surtout votre matière grise.

Parce qu'avant le départ, nous avons besoin d'un avion, c'est-à-dire des moyens pour nous aventurer dans le *hic sunt leones* de la physique de base. Nous avons besoin des idées fondamentales de la *méthode* de la physique, qui est aussi la méthode générale de la science moderne. Une méthode qu'on peut résumer de la manière suivante:

La physique ne s'occupe que de mesures, en utilisant les mathématiques pour décrire les relations des résultats de chaque mesure avec ceux d'autres mesures.

Voilà, chers/chères étudiants/es, une phrase bien riche d'idées et pleine de conséquences pratiques! Afin d'en comprendre les secrets, je mentionnerai une des erreurs les plus fréquentes chez les débutants/es en physique: la tendance à essayer d'imaginer ce que les quantités physiques "sont vraiment".

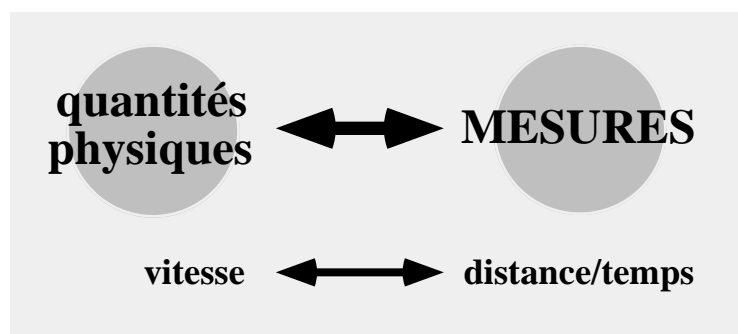


Fig. 1: La physique ne s'occupe que de mesures; par exemple, la définition de la vitesse est la manière de mesurer cette quantité.

Prenons donc les quantités physiques qu'on utilise pour analyser l'un des phénomènes les plus simples: le mouvement d'une particule qu'on suppose infiniment petite et dotée de masse (nous verrons de quoi il s'agit) sur une trajectoire droite -- voir la Fig. 2.

Le mouvement de la particule, qu'on appelle une "masse ponctuelle", est décrit par le changement de sa position x sur la trajectoire (par rapport au point de référence, l'origine O) en fonction du temps t .

La fonction $x(t)$ étant donnée, on peut aussi prendre en considération la rapidité de son changement par rapport au temps, ce qu'on appelle la *vitesse* de la particule:

$$v = \frac{dx}{dt} ; \quad (1)$$

par exemple, la masse ponctuelle peut se déplacer à la vitesse $v = 140$ km/h, soit 38,9 m/s. Par ailleurs, la vitesse peut elle aussi changer par rapport au temps (pensez à une Ferrari qui passe de 0 à 100 km/h en 4,5 s!); dans ce cas, on peut aussi prendre en considération la rapidité du changement de vitesse, qu'on appelle l'accélération:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (2)$$

La vitesse et l'accélération correspondent à des expériences de la vie de tous les jours, et donc nous semblent faciles à comprendre. Mais est-ce que nous comprenons réellement les équations (1) et (2) qui nous en donnent la définition en physique?

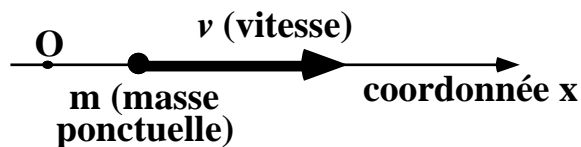


Fig. 2: Mouvement d'une particule sur une trajectoire droite.

Le point le plus important est que chacune de ces équations est essentiellement une description concise de la manière de *mesurer* la quantité physique correspondante; la première nous dit que ce qu'on appelle vitesse en physique est le résultat de la mesure qu'on effectue en déterminant les coordonnées dans l'espace de la masse pour une série d'instant à la suite les uns des autres, puis en prenant le rapport des changements des coordonnées et des changements de temps. A leur tour, les coordonnées sont des nombres, les résultats de mesures qu'on effectue avec des instruments appropriés.



Galileo Galilei, fondateur de la méthode scientifique se basant sur les mesures.

Ce qui est assez difficile à comprendre pour un/e débutant/e en physique n'est pas tant la définition ci-dessus que le fait que la vitesse en physique est *seulement* le résultat des mesures décrites par l'Eq. 1. Voilà ce qu'un sceptique tend à penser: les formules sont jolies, mais enfin je sais bien, moi, ce qu'est la vitesse. Et de quoi s'agit-il, selon notre sceptique imaginaire?

Il s'agit à peu près d'un ensemble de sensations (ce qu'on appelle aux USA les *feelings*), telles que le vent sur le visage lors d'un déplacement à grand vitesse sur une Harley-Davidson (pas de *look-alike* oriental, SVP!), le mouvement des cheveux d'une jolie fille causé par ce même vent, l'ivresse cérébrale que procure une vitesse imprudente (ou, il faut l'espérer, la crainte de ses conséquences).

Tout cet ensemble de *feelings* donne à notre sceptique imaginaire une idée de la vitesse qui lui paraît assez précise. Mais passons maintenant à l'accélération. Encore une fois, la formule (Eq. 2) nous donne simplement la manière de la mesurer, puisqu'en physique il n'y a rien au delà des mesures. Mais le même sceptique susmentionné essaiera encore une fois d'imaginer ce qu'est réellement l'accélération; et il manipulera un deuxième

ensemble de sensations, dérivées de ses expériences personnelles avec les motos, les voitures et les avions. Il se heurtera cependant à quelques difficultés, par exemple une certaine confusion entre les *feelings* liés à l'accélération et ceux liés à la vitesse.

Mais cette manière de mélanger physique et *feelings* mène à une crise inexorable si on essaie de l'étendre au delà de l'accélération. Quelles sont, par exemple, les sensations liées à la dérivée de l'accélération par rapport au temps? Ou celles liées à la dérivée de la dérivée?



De la simple règle et du chronographe Swatch jusqu'aux grands laboratoires internationaux tels que la source de lumière synchrotron Elettra à Trieste, les instruments de mesure forment la base de la physique et de la science en général.

La crise était bien sûr déjà là, bien qu'invisible pour notre sceptique aveugle, avant d'arriver aux quantités physiques pour lesquelles il n'est pas facile d'identifier des sensations. La cause profonde de cette crise est en relation avec le problème au coeur de la science et de la technologie: l'exigence de communiquer avec les autres sans ambiguïté. Cela est très facile tant qu'on reste dans les limites de la physique: il est suffisant de communiquer des formules et les résultats numériques de mesures. Par contre, la communication des sensations individuelles est inexorablement condamnée à l'ambiguïté: la vitesse, par exemple, peut donner des sensations de plaisir à certaines personnes, et de peur à d'autres; elle peut aussi procurer des sensations différentes à la même personne selon la situation.

On se trouve donc devant la nécessité, absolue et inéluctable, d'éliminer les sensations individuelles de la méthode scientifique, et surtout de la physique. Le grand secret pour comprendre la physique est tout simplement de ne pas mélanger les entités de la physique avec celles qui n'en font pas partie, de ne pas mélanger les mesures et les *feelings*.

Ce grand petit secret adopté, on est aussi en mesure de mieux comprendre toute une série d'idées fondamentales des mathématiques. Par exemple, le fait que les formules

mathématiques sont en physique une langue concise et efficace pour décrire les mesures. Prenez l'Eq. 1: elle nous donne d'une manière concise la façon de mesurer la vitesse.

Grâce à la correspondance entre quantités physiques et mesures, on peut aussi mieux comprendre l'idée de dérivée. Les mathématiciens nous disent qu'une formule telle que l'Eq. 1 correspond à la limite d'un rapport lorsque le dénominateur (l'intervalle de temps) devient infiniment petit. Mais que veut dire *infiniment petit*?

Admettons, par exemple, que vous mesurez la vitesse sur la base d'une seconde: êtes-vous à la limite? La réponse est: ça dépend de la précision que vous voulez atteindre. Parce qu'il faut d'abord réaliser qu'on n'a jamais en physique une mesure infiniment précise, et donc la précision est une partie importante de la mesure. La précision peut être communiquée explicitement: par exemple, on peut dire que la vitesse mesurée est de $(11,0 \pm 0,2)$ m/s, donc que sa valeur est plus de 10,8 et moins de 11,2 m/s, sans pourtant pouvoir préciser si elle est 11,1 ou 11,2 m/s. On peut aussi donner la précision implicitement: si on écrit que la vitesse est de 11,2 m/s, on veut dire qu'elle est de plus de 11,15 et moins de 11,25 m/s, donc que la précision de sa mesure est de $\pm 0,05$ m/s.¹

Admettons donc que vous voulez mesurer une vitesse prévue de 11,0 m/s avec une précision de $\pm 0,2$ m/s; admettons aussi que le point se déplace avec une accélération constante de 1 m/s². Si vous mesurez la vitesse sur la base d'une seconde, la vitesse change de 1 m/s pendant la mesure, donc la précision ne peut pas atteindre le niveau souhaité. Par contre, si la mesure est conduite sur la base de 0,2 s, le changement de la vitesse est limité à 0,2 m/s et donc il peut permettre une précision du même ordre de grandeur.

Voilà donc une manière très pratique de concevoir l'idée mathématique d'un intervalle de temps "infiniment petit". Pour atteindre une précision de l'ordre de 0,2 m/s dans les conditions que nous avons spécifiées, un intervalle de 1 s n'est pas "infiniment petit", alors que 0,2 s commence à être suffisamment court pour correspondre pratiquement à cette définition. L'idée "infiniment petit", et par conséquent celle de dérivée, n'est plus une abstraction, mais quelque chose de très pratique, lié aux conditions réelles de la mesure, et qu'on peut adapter à ce qu'on veut spécifiquement faire avec la mesure.

Ceci nous conduit à des considérations encore plus pratiques et matérialistes. Pour augmenter la précision, on doit utiliser des instruments de meilleure qualité, ce qui veut dire presque toujours des instruments coûteux. La physique détruit donc l'idée raréfiée et philosophique de la dérivée mathématique, pour arriver brutalement à des questions

¹ Notons en passant que, trop souvent, les étudiants utilisent imprudemment cette arme formidable pour donner implicitement la précision d'une mesure. Par exemple, on peut voir fréquemment les résultats d'un problème spécifiés par un véritable déluge de chiffres tel que: 10,23473822 m/s. Ce n'est que très rarement que les données d'un problème sont assez bien connues pour arriver à un résultat d'une telle précision. Le déluge de chiffres est souvent causé par ce qu'on pourrait appeler le syndrome de la calculatrice de poche: ce merveilleux instrument de notre époque nous permet de manipuler rapidement une grande quantité de chiffres, et d'arriver par voie mathématique à des résultats qui auraient exigé auparavant des heures de travail ennuyeux. Mais le grand nombre de chiffres qu'on peut lire sur le *display* ne correspondent en général pas à la précision de ce qu'on mesure. Par exemple, si vous mesurez un déplacement de 11 mètres en 1,2 secondes, le calculateur montre un rapport de 9,166666666 entre ces deux quantités. Mais le résultat réel est de (9 ± 1) m/s, parce que "11 mètres" veut dire $11 \pm 0,5$, donc une précision de $0,5/11 \approx 5\%$; en outre, "1,2 secondes" correspond à une précision de l'ordre de 5%, et donc la précision du rapport est de l'ordre de 10%. Nous sommes en mesure de dire que la vitesse est 9 m/s avec une précision de l'ordre de $9,2/10 \approx 1$ m/s. A la limite, le résultat écrit sous la forme "9 m/s" est plus ou moins acceptable (même si la précision implicite de $\pm 0,5$ dépasse d'un facteur 2 celle permise par les données). Mais la forme 9,166 ne serait pas acceptable, et "9,166666666" est franchement ridicule, puisqu'elle indique que la calculatrice domine la femme ou l'homme, au lieu d'être maîtrisé par eux.

pécuniaires. Si vous voulez augmenter la précision en diminuant la base de temps, vous devez mettre plus d'argent dans l'achat de l'instrument de mesure du temps (par exemple passer du plastique japonais à une formidable Swatch). Ce qui veut dire que, si vous travaillez pour une compagnie privée, vous devez diminuer la marge de profit de l'opération qui exige la mesure de la vitesse. Règle générale: à éviter si ce n'est pas nécessaire, sinon le patron va vous faciliter très vite l'entrée au chômage. Et donc, l'"infinitement petit" de la vie pratique veut dire "assez petit pour atteindre la précision réellement nécessaire, sans pourtant dépasser ce niveau et augmenter inutilement la complication et le prix de la mesure". Fin de la philosophie, et vive la pratique.

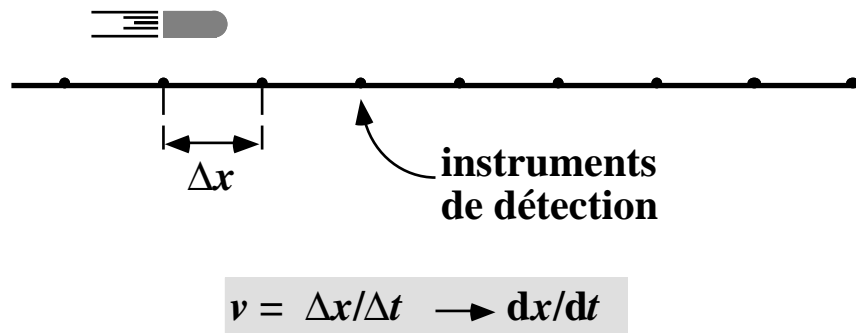


Fig. 3: Mesure de la vitesse d'une balle, à l'aide d'une série de détecteurs de sa position. La précision de la mesure est déterminée par la distance entre les détecteurs. Spécifiquement, cette distance Δx et l'intervalle correspondant de temps Δt nous donnent sur le plan pratique la dérivée dx/dt avec la précision souhaitée.

Tout cela risque de donner à mes chers lecteurs l'impression inexacte que je suis un matérialiste, incapable de penser plus loin que les sous. Mes amis, bien au courant de ma finesse artistique, savent au contraire que je considère les *feelings* comme des composantes très importantes de la vie, tout en les excluant de la physique. Les couleurs des poissons des mers tropicales, les sensations que procure un concert pour piano et orchestre de Mozart, le charme d'une jolie femme: comment pourrait-on communiquer tout cela à l'aide des mesures de la physique? Et il s'agit de choses tellement importantes!



La lagune de Bora-Bora, une peinture de Francisco Goya, le paysage du château de Chillon: peut-on "mesurer" leur beauté? Non: ce type de connaissance ne se situe pas dans le domaine de la physique.

Donc, le secret de la physique ne veut pas dire que nous pouvons tout comprendre et tout communiquer à l'aide de mesures. Il se limite à nous dire que lorsqu'on fait de la physique (et en général de la science et de la technologie), on doit s'occuper seulement de mesures, et ne pas y mélanger les *feelings* qui sont toutefois si importants pour nous, êtres humains.

Le Coin Yankee:

<i>Physique</i>	<i>Physics</i>
<i>Mesure</i>	<i>Measurement</i>
<i>Grandeur</i>	<i>Magnitude</i>
<i>Ordre de grandeur</i>	<i>Order of magnitude</i>
<i>Vitesse</i> <i>(grandeur)</i>	<i>Speed</i>
<i>Accélération</i>	<i>Acceleration</i>
<i>Coordonnée</i>	<i>Coordinate</i>
<i>Précision</i>	<i>Accuracy</i>
<i>Masse</i>	<i>Mass</i>
<i>Temps</i>	<i>Time</i>
<i>Dérivée</i>	<i>Derivative</i>

“Physics is only concerned with measurements, using mathematics to express the relations between the results of each measurement and those of other measurements.”

II. Vivisection d'une loi physique élémentaire

A ce point, un cours de physique à l'ancienne commencerait à amuser (!) les étudiants/es avec toute une série de formules visant à décrire le mouvement. Ayant trouvé cela très ennuyeux au temps de mes études universitaires (qui ne se situent pas, je tiens à le souligner, avant la guerre d'indépendance américaine ni même avant la deuxième guerre mondiale), je vous éviterai cette désagréable expérience qu'on appelle la "cinématique". On introduira les définitions de la cinématique quand on en aura besoin, pas avant.

Passons dès lors directement à la partie la plus intéressante de l'étude des mouvements: la relation entre les causes des ceux-ci et leurs effets -- ce qu'on appelle la "dynamique". La dynamique nous offrira l'opportunité d'effectuer une belle séance de critique et de vivisection. Nous découvrirons plusieurs secrets cachés dans une des formules les plus élémentaires et mieux connues de la physique: la loi de Newton de la force et de l'accélération.

Prenons le mouvement de la masse ponctuelle de la Fig. 2, et posons la question suivante: qu'est-ce qui cause le mouvement? Dans la vie de tous les jours, on a l'impression qu'un état de mouvement, même à vitesse constante, a toujours besoin d'une cause, que nous appellerons "force". Par exemple, on a besoin de la force d'un moteur pour déplacer une voiture à vitesse constante sur l'autoroute entre Morges et Rolle.

Mais cette impression est erronée: la force du moteur ne fait que compenser d'autres forces dites "de frottement": le frottement des roues sur l'asphalte, celui causé par l'atmosphère etc. Si on analyse des phénomènes avec très peu de frottement, par exemple un objet qui glisse sur la glace, on se rend compte qu'à la limite, le mouvement à vitesse constante a lieu sans faire intervenir aucune force. Donc, sans forces la vitesse est constante, et sa dérivée est nulle: $a = 0 \text{ m/s}^2$.

Par contre, si on fait intervenir une force quelconque, la vitesse n'est plus constante et l'accélération n'est plus nulle. La relation entre force et accélération est spécifiée par la célèbre loi de Newton:

$$f = ma \quad , \quad (3)$$

où f est la force qui agit sur la masse ponctuelle m .

II.1. Dimensions et unités de mesure

Cette loi est apparemment très simple, mais en réalité elle a des profondeurs inattendues: comme toutes les lois de la physique, elle doit concerner des relations entre les résultats de mesures. En effet, elle nous dit que, si nous mesurons à un instant donné (1) la masse avec une balance, (2) l'accélération avec un instrument de mesure des longueurs et une montre, et (3) la force avec un dynamomètre, les trois résultats doivent être en accord avec l'Eq. 3.

Notez que l'accord numérique concerne des quantités physiques. Donc, la quantité à gauche de l'Eq. 3 (f) doit être du même type que celle à droite (ma). En effet, dire que le résultat d'une mesure est égal au résultat d'une autre mesure équivaut à dire que le premier n'est ni plus grand, ni plus petit que deuxième. Mais afin d'affirmer cela, on doit pouvoir comparer un résultat à l'autre: or, nous ne pouvons comparer que des résultats de mesures du même type.

Par exemple, on peut dire qu'une distance donnée est plus grande ou plus petite qu'une autre distance, mais on ne peut pas la comparer à un volume, à un temps ou à une vitesse. L'Eq. 3 exige donc que le produit ma soit une quantité physique équivalente à une force.



Isaac Newton, fondateur de la mécanique, qui découvrit la célèbre équation $f = ma$.

On peut généraliser cette conclusion à n'importe quelle loi de la physique, et s'en servir pour contrôler rapidement la solution formelle d'un problème, avant d'utiliser celle-ci pour des calculs numériques, qui pourraient ensuite se révéler basés sur une formule erronée. Cette stratégie astucieuse, appelée *analyse dimensionnelle*, se fait en vérifiant que toutes les quantités qu'une équation prévoit égales sont du même type. De plus, puisqu'on ne peut pas ajouter ni soustraire des quantités de type différent (par exemple, un temps et un volume, ou une distance et une accélération), on doit vérifier que tous les éléments de chaque somme algébrique sont des quantités du même type.

La troisième vérification concerne des fonctions du type $\cos(\theta)$; les mathématiques nous disent qu'elle peut être exprimée avec la "série de McLaurin": $\sin(\theta) = \theta + \theta^3/6 + \dots$, ce qui implique que l'argument θ , son cube θ^3 , etc. sont des quantités du même type, puisqu'on doit pouvoir les additionner. Mais cela n'est pas possible si θ est une distance, un temps ou une autre quantité physique, parce que, par exemple, on ne peut pas additionner le carré d'une distance (qui est une aire) à une distance. La seule possibilité est alors que θ soit une quantité numérique pure, ce qu'on appelle une quantité sans dimensions.

On peut arriver à la même conclusion de la manière suivante: θ est un angle, et par définition un angle est le rapport d'un arc et d'un rayon, donc le rapport de deux longueurs, ce qui donne effectivement un nombre pur. Il faut alors vérifier que les arguments de fonctions telles que le sinus, le cosinus etc., sont des nombres purs. La même vérification doit être effectuée pour toutes les autres fonctions trigonométriques, ainsi que pour les fonctions exponentielles, logarithmiques, hyperboliques etc.

Voyons maintenant un exemple d'analyse dimensionnelle. J'ai lu, dans une revue consacrée aux horloges, que la période d'un pendule est $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, L étant sa longueur et g l'accélération de gravité. Mais cela ne peut pas être correct: sans résoudre explicitement le problème du mouvement du pendule, l'analyse dimensionnelle nous dit que quelque chose cloche. Effectivement, g est une accélération, c'est-à-dire une vitesse divisée par un temps, soit une distance divisée par un temps carré; donc, $\sqrt{L/g}$ équivaut à un temps carré divisé par la racine carrée d'une distance. La multiplication

par un nombre pur tel que 2π ne change pas le type de quantité. Donc, la solution proposée par la revue impliquerait l'égalité d'un temps (T) et d'un temps carré divisé par la racine carrée d'une distance ($2\pi\sqrt{L/g}$) -- ce qui est impossible.

On peut aussi pousser plus loin l'analyse en essayant de trouver quel est le résultat correct. La manière la plus simple d'obtenir un temps à partir d'une distance et d'une accélération est d'en calculer le rapport, en obtenant un temps carré, et ensuite de prendre la racine carrée de celui-ci. Nous pouvons en déduire que la formule correcte est du type $T = \text{constante} \times \sqrt{L/g}$. En effet, elle est: $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

II.1.1. Unités de mesure

Si une équation prévoit l'égalité de deux quantités, alors celles-ci ne doivent pas seulement être du même type, mais aussi exprimées avec les mêmes unités de mesure. Par exemple, en comparant deux longueurs, on ne peut pas mesurer la première en mètres et la deuxième en millimètres: il faut utiliser la même unité de mesure, tant pour la première longueur que pour la deuxième.

En ce qui concerne l'Eq. 3, tant f que ma sont des quantités du type "force", donc on doit exprimer les deux quantités avec la même unité de force, par exemple en Newton (N).

Avant de commencer à chercher la solution d'un problème, il faut alors adopter un système cohérent d'unités de mesure. En ce qui concerne la mécanique, le système de préférence s'appelle "MKS": ses unités de base sont le mètre, le kilogramme (masse) et la seconde. Le système MKS n'utilise que trois unités de base pour la mécanique, parce que toutes les autres unités peuvent en être dérivées. Cette propriété est une conséquence de l'Eq. 3: par exemple, on n'a pas besoin d'une unité de base pour la force, parce que l'unité de force est implicitement définie par l'Eq. 3. En effet, si la masse est de 1 kg et l'accélération de 1 m/s^2 , la grandeur de la force doit être unitaire dans le système MKS. On appelle cette unité de force le "Newton" (N).

Comment changer le système MKS si l'on dépasse les limites de la mécanique, pour arriver à l'électromagnétisme et à l'optique? Pas de problème: grâce aux lois fondamentales des autres branches de la physique, on n'a besoin que d'une quatrième unité de base: celle de charge électrique ou coulomb (C). On obtient ainsi le système MKSC ou système international (SI).

En principe, le système SI peut être appliqué à n'importe quel problème de physique. Malheureusement, cette stratégie crée parfois des complications: certaines unités de mesure SI peuvent se révéler peu pratiques. Prenez par exemple la physique des atomes: la grandeur typique de ceux-ci est $0,0000000001 \text{ m} = 10^{-10} \text{ m}$. Les spécialistes n'aiment pas écrire continuellement le facteur 10^{-10} . Ils préfèrent une unité de longueur qui n'appartient pas au système SI: l'angström (Å), qui équivaut à 10^{-10} m . Cela simplifie les formules de la physique atomique; le prix, malheureusement, en est la complication des conversions des unités de mesure.

Soyons pourtant honnêtes, avant de maudire les spécialistes de physique des atomes. Quand on essaie d'apprécier la puissance d'une belle voiture sportive, on n'utilise pas la simple unité du système SI (le watt ou W): on préfère plutôt le "cheval-vapeur", unité hybride par excellence qui mélange sans pitié les hommes et les bêtes et crée des complications de conversion épouvantables. Mais, d'autre part, pourrait-on condamner une Ferrari ou une Jaguar à voir sa puissance exprimée comme celle d'une vulgaire lampe électrique? Alors: péché commun et pas de malédictions permises!

II.2. Les causes et leurs effets

Reprenons maintenant notre malheureuse Eq. 3, et continuons sa vivisection, cette fois d'un point de vue mathématique. Il s'agit d'une équation différentielle, c'est-à-dire d'une équation qui contient des dérivées. Voyons quelles sont ses propriétés.

En utilisant l'Eq. 2, on peut écrire l'Eq. 3 de la manière suivante:

$$f = m \frac{dv}{dt} . \quad (4)$$

Tout d'abord, nous simplifierons l'analyse, en supposant que la force est une constante, qui ne change ni avec le temps ni avec la position x . On peut alors facilement résoudre l'Eq. 1, en obtenant:

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{f}{m}\right)t . \quad (5)$$

Il faut noter que si $t = 0$ alors $v(0) = v_0$. Donc, v_0 est simplement la vitesse initiale du mouvement.

Utilisons maintenant encore une fois l'Eq. 2, pour transformer ainsi l'Eq. 5:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \left(\frac{f}{m}\right)t . \quad (6)$$

La solution est de nouveau facile à trouver:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{f}{m}\right)t^2 , \quad (7)$$

où la constante x_0 correspond évidemment à la valeur initiale $x(0)$ de la fonction $x(t)$.

L'Eq. 7 contient tous les éléments pour prévoir le mouvement d'une masse ponctuelle soumise à une force constante, ou pour le justifier *a posteriori*. Un bel exemple en est le mouvement causé par la force (constante) de gravité. L'Eq. 7 nous donne, par exemple, la progression d'une plongée, si nous pouvons négliger la différence (hélas) entre notre corps et une masse ponctuelle.

Passons maintenant à l'analyse des conséquences un peu plus fondamentales de l'Eq. 7: celle-ci signifie que, étant donné (1) la position de la masse ponctuelle au temps initial, (2) sa vitesse au même temps, (3) les forces agissant sur la masse pendant le mouvement, on peut prévoir la fonction $x(t)$, c'est-à-dire toutes les informations sur le mouvement futur de la masse: position, vitesse, accélération, etc. Cette constatation est très rassurante, parce qu'elle correspond à notre intuition: par exemple, si on "jette" un objet, c'est-à-dire si on établit sa vitesse et sa position initiales, on peut imaginer son mouvement futur; quelle surprise si, au lieu de "tomber", l'objet prenait son vol en s'éloignant vers le ciel!

Ce pouvoir absolu de prévoir le futur est une conséquence du "principe des causes et de leurs effets". Dans ce cas, les "causes" sont les forces et les "effets" sont les caractéristiques du mouvement, décrites par la fonction $x(t)$. Le principe en question affirme que les causes d'un phénomène ne peuvent influencer celui-ci que pendant la période *suivant* le début de leur action. De plus, il affirme que, avec des informations

suffisantes sur l'état initial du système (dans notre exemple, la position et la vitesse initiales), il est possible de prévoir ses états futurs.

Le principe des causes et des effets est à la base de toute la physique et des autres sciences.

Maintenant, nous éliminerons l'hypothèse de force constante afin de généraliser l'analyse de l'Eq. 3; écrivons celle-ci comme suit:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - f(x,t) = 0. \quad (8)$$

La solution de cette équation, c'est-à-dire la fonction $x(t)$, fournit une description complète du mouvement, $x(t)$. Mais peut-on garantir que cette solution existe? L'Eq. 8 est une équation différentielle du deuxième ordre, dont les propriétés ont été analysées depuis des siècles. On peut démontrer qu'avec suffisamment d'informations (par exemple les valeurs initiales de $x(t)$ et de sa dérivée (la vitesse)), la solution $x(t)$ de l'équation existe et est unique.

Savoir que la solution existe n'équivaut pas à pouvoir la trouver. L'analyse d'équations de ce type a pourtant fourni des solutions pour une série de cas intéressants, avec des forces $f(x,t)$ qui correspondent à des phénomènes réels.

Enfin, il faut mentionner une généralisation supplémentaire de l'Eq. 3; l'Eq. 8 se base sur l'hypothèse de forces qui dépendent de la position et du temps. Mais les forces peuvent aussi dépendre de la vitesse de l'objet qui se déplace (pensez, par exemple, à un bateau et aux forces de frottement causées par l'eau). On doit alors écrire en général:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - f(x,t, (dx/dt)) = 0.$$

La solution est évidemment plus compliquée que pour l'Eq. 8; on la discutera plus tard, dans la section consacrée aux forces de frottement des fluides.

II.3. La masse, c'est quoi?

Ayant discuté les implications de l'Eq. 3 en ce qui concerne le principe des causes et des effets, passons maintenant à discuter un autre aspect important de celle-ci: la notion de "masse". Notre premier commentaire sur l'Eq. 3 était le suivant: " f est la force qui agit sur la masse ponctuelle m ". Mais qu'est-ce qui se cache derrière le mot "masse"? Pour essayer de donner une réponse à cette question, les règles du jeu sont celles de base en physique: on donne la définition de n'importe quelle grandeur - masse comprise - en décrivant avec des formules la manière de la mesurer.

On peut alors interpréter l'Eq. 3 comme suit: étant donné une force et un corps de volume négligeable, on constate que le corps se déplace avec une accélération proportionnelle à la force. On appelle "masse" du corps la constante de proportionnalité; donc, l'Eq. 3 fournit implicitement la définition de la masse: on mesure celle-ci en mesurant la force (avec des instruments qu'on appelle dynamomètres) et l'accélération, et en calculant le rapport des deux résultats.

Cependant, les mesures pratiques de masses ne sont presque jamais effectuées par cette procédure. Plus simplement, on met le corps sur le plateau d'une balance, et on mesure avec celle-ci le nombre de kilogrammes. Mais attention: cette procédure cache un des

secrets les plus fondamentaux de la physique! Il s'agit d'un secret si compliqué et profond que seule la branche "générale" de la relativité d'Einstein peut le clarifier.

Que fait-on, en réalité, avec la balance? On mesure le "poids" du corps, c'est-à-dire une force, la force de gravitation entre le corps et la Terre. Mais comment peut-on alors parler de masse si ce qu'on mesure est la force "poids"?

Afin de répondre à cette question, analysons la nature de la force "poids", provoquée par la gravitation. Isaac Newton fut le premier à réaliser (en considérant le mouvement de la lune; l'affaire de la pomme qui tombe est pur *folklore*, modèle feuilleton) que deux corps de masse m et M causent l'un sur l'autre une force d'attraction dont la grandeur est donnée par:

$$F = G \frac{mM}{R^2} , \quad (9)$$

où R est la distance entre les "centres de gravité" de deux corps (nous verrons plus tard la définition du centre de gravité d'un corps) et G est une constante dite constante de gravitation ou de Newton. Dans le système SI, la valeur de G est $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Prenons maintenant un corps sur la surface de la Terre, soit à la distance R du centre de celle-ci, où $R \approx 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ est le rayon de la Terre. Si $M \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ est la masse de la Terre toute entière, l'Eq. 9 implique que la grandeur de la force "poids" est:

$$F = m (GM/R^2) = mg , \quad (10)$$

où la constante g est égale à $GM/R^2 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

L'Eq. 10 montre qu'effectivement, une mesure du poids F équivaut à une mesure de la masse m , parce que F coïncide avec la masse, sauf pour un facteur de multiplication.

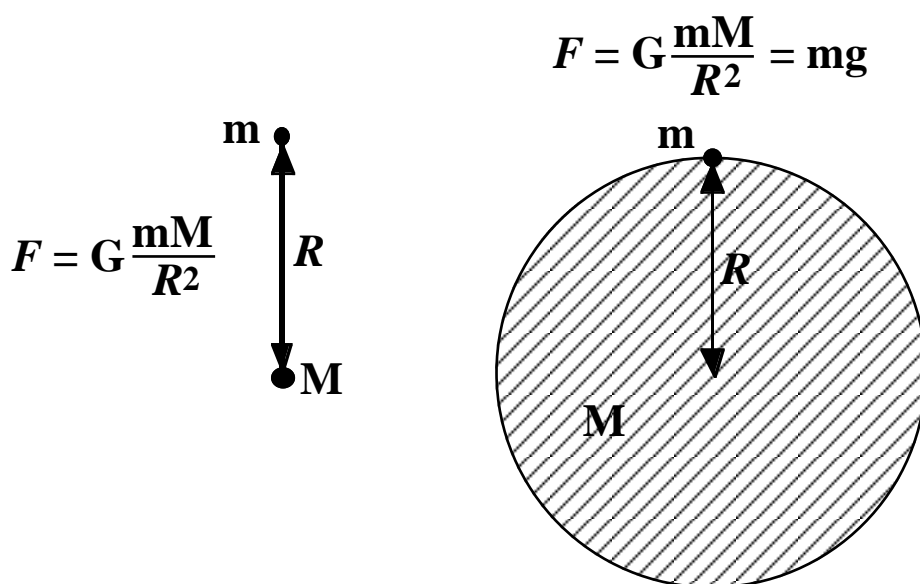


Fig. 4: Relation entre le poids d'un corps sur la Terre et la force de gravité.

Mais attention, attention, attention! Nous jouons avec les mots, Mesdames et Messieurs! La "masse" m de l'Eq. 10 est la masse définie par l'Eq. 9, soit la constante qui caractérise le comportement d'un corps en ce qui concerne le phénomène spécifique "gravitation".

Par contre, la "masse" de l'Eq. 3 est la constante qui caractérise l'accélération du corps causée par une certaine force.

Ces deux "masses" concernent donc deux propriétés tout-à-fait différentes de notre corps: mis à part le nom, il ne devrait exister aucune relation entre les deux. Afin de souligner ce point, on peut appeler l'une "masse de gravitation" du corps et l'autre "masse d'inertie".

D'autre part, après avoir mesuré les deux masses d'un corps en utilisant leurs définitions (les équations 3 et 10), on constate une propriété étonnante: les deux résultats sont égaux! Étonnante parce que, comme nous l'avons vu, les deux constantes concernent deux propriétés tout-à-fait différentes du corps.

Avant de poursuivre, il faut exclure une éventualité qui réduirait le fait étonnant qu'on a découvert à une trivialité: celle que les deux quantités soient "presque" égales, à cause d'une banale coïncidence sans implications profondes. Il faut donc contrôler jusqu'à quel niveau de précision la masse de gravitation et la masse d'inertie sont égales.

Tous les tests de ce point effectués à partir du siècle passé (par exemple par la procédure discutée plus loin dans ce chapitre) ont donné le même résultat: aucune différence de valeur entre les deux masses n'a été révélée.

Ce fait extraordinaire ne peut pas être une coïncidence. La nécessité de le justifier a suggéré à Einstein la théorie de la gravitation dite "relativité générale". On ne peut pas traiter celle-ci dans un cours élémentaire. Limitons nous dès lors à affirmer que la force de gravité est réellement la manifestation d'une "courbure" de l'espace autour des masses. Cette courbure change la géométrie de l'espace, un peu comme la géométrie de la surface (sphérique) de la Terre n'est pas la même que celle d'une surface plate. Le mouvement d'un corps soumis à ce qu'on appelle une force de gravitation est justifié par la courbure de l'espace. La théorie d'Einstein identifie la masse de gravitation avec la masse d'inertie, justifiant leur étonnante égalité.

En résumé, masse d'inertie et masse de gravitation sont effectivement une seule et même chose, et on ne parlera dorénavant que de "masse".

II.4. De une à trois dimensions: les vecteurs

La prochaine étape de la vivisection de l'Eq. 3 est sa généralisation du cas monodimensionnel discuté plus haut au monde normal à trois dimensions. Cela exige l'utilisation de quantités qu'on appelle les *vecteurs*, c'est-à-dire des quantités physiques définies par leurs trois composantes dans un référentiel cartésien.

Prenons, par exemple, la position d'une masse ponctuelle dans l'espace. Elle est donnée par l'ensemble de trois quantités numériques, les trois coordonnées x , y et z . Cet ensemble (x,y,z) constitue une *quantité vectorielle*, le "vecteur position". Nous utiliserons dorénavant des symboles en gras pour identifier les quantités vectorielles, et des symboles normaux pour les quantités non-vectorielles, qu'on appelle aussi quantités *scalaires*. Par exemple, le vecteur position peut être indiqué par le symbole \mathbf{r} , tandis que pour les coordonnées (x,y,z) , qui sont individuellement des quantités scalaires, on n'utilise pas de symboles en gras.

On peut visualiser le vecteur position à l'aide de la flèche qui part de l'origine O du référentiel et arrive jusqu'à la position (x,y,z) -- voir la Fig. 5 (gauche). Cette représentation nous permet de réaliser qu'un vecteur est caractérisé par sa *grandeur* et

par sa *direction*. La grandeur r du vecteur \mathbf{r} correspond à la longueur de la “flèche” correspondante, soit:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \quad (11)$$

Nous devons maintenant discuter les opérations possibles entre des vecteurs. Dans le cas des quantités scalaires, il existe deux opérations de base: somme (algébrique) et produit (la division équivaut au produit par le réciproque du dénominateur). Mais quelles sont les opérations correspondantes pour les vecteurs? Nous verrons que l’opération “produit” ne correspond pas à une seule opération vectorielle, mais à plusieurs, qui sont utiles pour traiter les phénomènes de la physique.

L’équation 11 fournit le premier exemple d’opération vectorielle: le calcul de la grandeur. La partie centrale de la Fig. 5 illustre un deuxième type d’opération: la somme vectorielle, plus spécifiquement la somme des vecteurs \mathbf{r} et $\Delta\mathbf{r}$. Le résultat, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, peut être défini de deux manières. Tout d’abord, la somme de deux vecteurs étant un vecteur elle-même, on peut la définir en donnant ses composantes. Si (x,y,z) et $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ sont les composantes des vecteurs \mathbf{r} et $\Delta\mathbf{r}$, alors les composantes du vecteur somme $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ sont $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. D’autre part, on peut visualiser le vecteur somme en combinant les deux flèches qui représentent les vecteurs \mathbf{r} et $\Delta\mathbf{r}$, comme illustré par la partie centrale de la Fig. 5.

La partie à droite de la même figure nous montre que la liaison entre un vecteur et ses composantes est équivalente à une opération de somme vectorielle. Chaque composante peut être associée à un vecteur dont la grandeur est donnée par la composante, et la direction est celle de l’axe cartésien correspondant. On obtient de cette façon les trois vecteurs x , y et z de la Fig. 5, dont la somme vectorielle équivaut au vecteur \mathbf{r} .

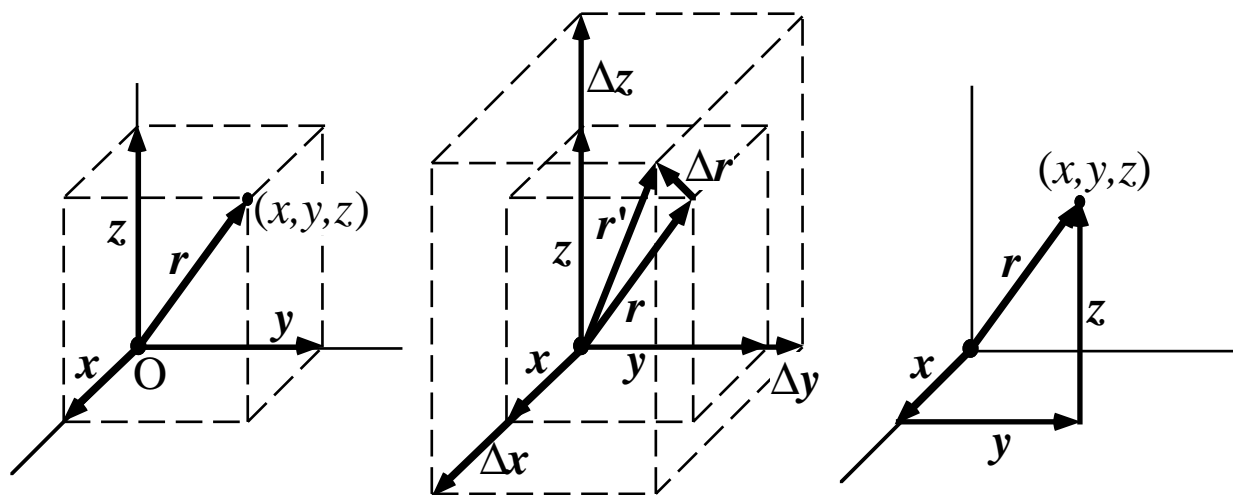


Fig. 5: Vecteur position \mathbf{r} (à gauche); exemple de somme vectorielle (au centre): $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$; vecteur \mathbf{r} visualisé comme somme vectorielle de ses trois composantes vectorielles x , y et z (à droite).

Passons maintenant à l’analyse des produits vectoriels. Supposons, par exemple, que la position d’une masse ponctuelle change, puisque sa distance de l’origine du référentiel est modifiée d’un facteur a , sans pourtant changer la direction du vecteur position. Ce changement équivaut à multiplier le vecteur \mathbf{r} par la quantité scalaire a , en obtenant le produit $a\mathbf{r}$. Par définition, $a\mathbf{r}$ est un vecteur dont les composantes sont celles du vecteur \mathbf{r} multipliées par a ; on transforme donc (x,y,z) en (ax,ay,az) . On peut vérifier que la

grandeur de $a\mathbf{r}$ est $((ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2)^{1/2} = a(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, soit la grandeur de \mathbf{r} multipliée par a .

Ce type de produit nous permet de définir les quantités vitesse et accélération d'une masse ponctuelle en trois dimensions. Il faudra remplacer les équations 1 et 2 par les dérivées équivalentes du vecteur position \mathbf{r} . Pour la vitesse, il s'agit de prendre le vecteur "changement infiniment petit de la position", $d\mathbf{r}$, et de le diviser par le scalaire "changement infiniment petit du temps, dt ", c'est-à-dire de multiplier $d\mathbf{r}$ par la quantité scalaire $1/dt$. On a alors:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} ; (v_x, v_y, v_z) \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (12)$$

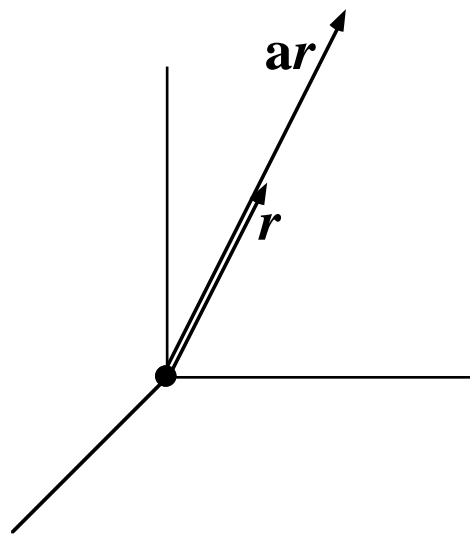


Fig. 6: Visualisation du produit d'un vecteur \mathbf{r} par une quantité scalaire a , qui donne un vecteur $a\mathbf{r}$ dans la même direction que \mathbf{r} .

On peut définir le vecteur accélération de manière similaire:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}; \\ (a_x, a_y, a_z) &\equiv \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \\ &\equiv \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

L'équation 3 peut alors être écrite sous forme tri-dimensionnelle:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}, \quad (14)$$

où \mathbf{f} est le vecteur force. Il faut remarquer une conséquence importante de l'Eq. 14: en cherchant les conditions d'équilibre (manque de mouvement) d'une masse ponctuelle, on constate qu'afin d'annuler l'accélération vectorielle on doit avoir:

$$\mathbf{f} = 0,$$

c'est-à-dire que la somme vectorielle des forces agissant sur la masse doit être nulle. A cette condition, l'équilibre est garanti si, à n'importe quel temps, on constate que la vitesse est nulle.

Passons maintenant aux produits d'un vecteur par un autre vecteur. Il en existe de deux types: le produit scalaire et le produit vectoriel. Le résultat du produit scalaire deux vecteurs \mathbf{A} de composantes (A_x, A_y, A_z) et \mathbf{B} de composantes (B_x, B_y, B_z) est une quantité scalaire définie comme suit:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \quad (15)$$

On peut facilement vérifier que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ est également donné par le produit des grandeurs A et B des vecteurs et du cosinus de l'angle formé par leurs directions (voir la Fig. 7):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta . \quad (16)$$

Il est à noter que la grandeur d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire du vecteur par lui-même. Par exemple, la grandeur A du vecteur \mathbf{A} est $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$.

Passons maintenant au produit vectoriel de \mathbf{A} et \mathbf{B} . Le résultat est un vecteur, qu'on identifie par le symbole $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. La grandeur du vecteur $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est $AB \sin\theta$; sa direction est perpendiculaire au plan qui comprend les deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} (voir la Fig. 8), et dans le sens défini par la "règle du tire-bouchon".

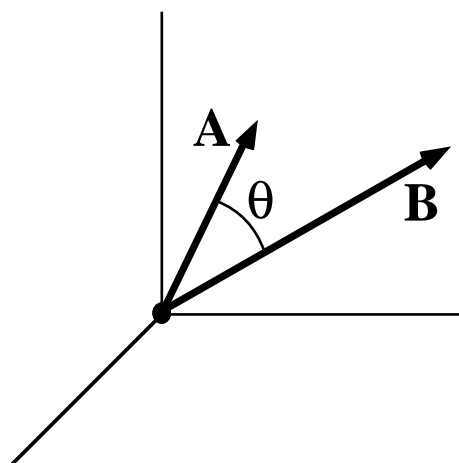


Fig. 7: Définition du produit scalaire de deux vecteurs formant un angle θ (voir l'Eq. 16).

Il faut souligner que, à cause de la règle du tire-bouchon, les produits $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ne sont pas équivalents comme dans le cas des produits de quantités scalaires.

Les trois composantes du vecteur $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sont données par les équations suivantes:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y ; \quad (17)_1$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z ; \quad (17)_2$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x . \quad (17)_3$$

II.5. Mouvement sur un cercle: accélération centripète, vitesse angulaire

Afin de préciser les notions de vitesse et d'accélération en trois dimensions, ainsi que les conséquences de l'équation fondamentale de la dynamique (Eq. 14), nous analyserons maintenant le cas important, quoique particulier, du mouvement d'une masse ponctuelle sur une trajectoire parfaitement circulaire. Ce type de mouvement correspond approximativement à celui des particules élémentaires dans les grands accélérateurs de la physique des hautes énergies, par exemple ceux du CERN à Genève.

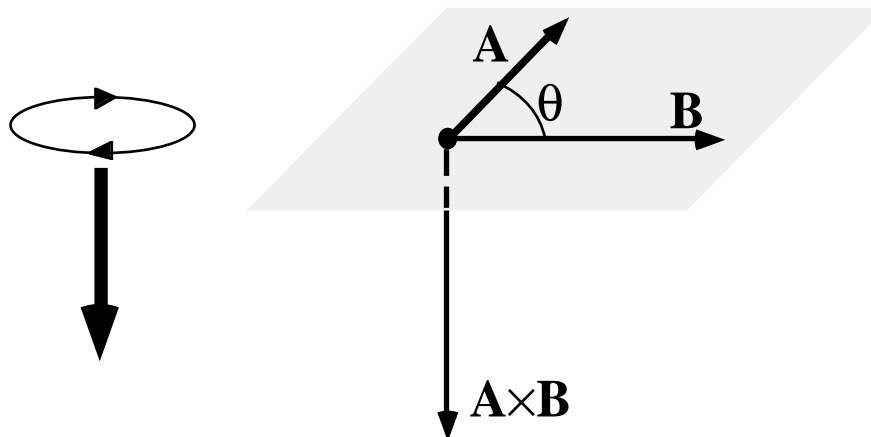


Fig. 8: Règle du tire-bouchon pour le produit vectoriel. Le tire-bouchon (à gauche) donne une relation entre rotation et direction de déplacement. La direction du produit vecteur $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est dérivée en considérant la rotation nécessaire pour amener le vecteur \mathbf{A} sur le vecteur \mathbf{B} en parcourant l'angle le plus petit.

Analysons la Fig. 9, en commençant par la partie gauche: on voit une masse ponctuelle m se déplaçant sur un cercle, sa vitesse (vecteur) étant \mathbf{v} . La position de la masse ponctuelle est identifiée par le vecteur \mathbf{R} , dont la grandeur correspond au rayon du cercle. La position de la masse peut aussi être identifiée par l'angle θ entre le vecteur \mathbf{R} et la direction de référence x . En général, la vitesse change pendant le mouvement, donnant lieu à une accélération $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

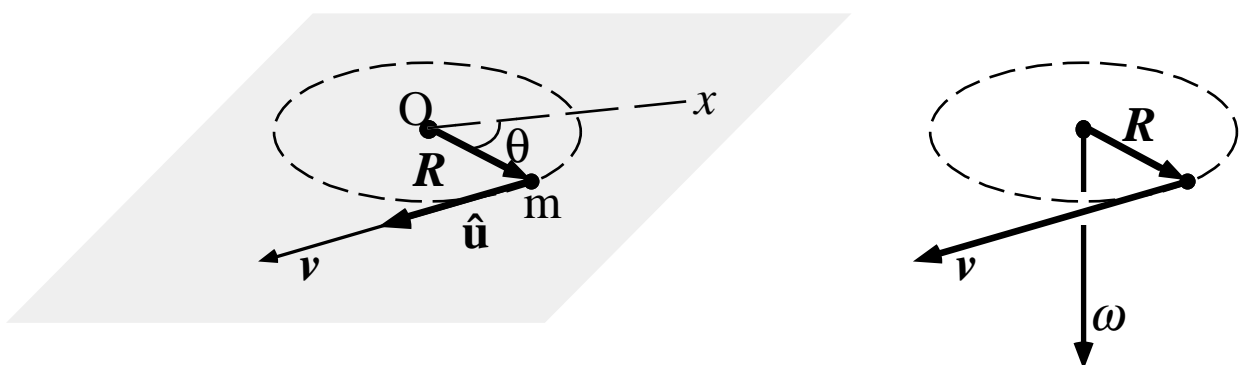


Fig. 9: Mouvement sur une trajectoire circulaire, et définition du vecteur vitesse angulaire ω .

On peut noter deux facteurs possibles dans les changements de vitesse: les changements de grandeur, et ceux de direction. Afin de les distinguer l'un de l'autre, nous écrivons le vecteur vitesse comme le produit de sa grandeur par un vecteur $\hat{\mathbf{u}}$ de grandeur unitaire dans la direction tangentielle à la trajectoire: $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{u}}$.

La définition d'accélération (Eq. 13) devient alors:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v\hat{u})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u} + v \frac{d\hat{u}}{dt} . \quad (18)$$

Prenons maintenant la Fig. 10, qui montre les positions de la masse ponctuelle aux temps t et $t + dt$. La position R au temps t correspond au vecteur unitaire tangentiel \hat{u} . Après l'intervalle infiniment petit de temps dt , la position a changé, devenant $R + dR$. Le changement correspond à une rotation d'un angle infinitésimal $d\theta$. Le vecteur unitaire change de \hat{u} à $\hat{u} + d\hat{u}$, avec la même rotation $d\theta$.

La partie centrale de la Fig. 10 montre le vecteur $d\hat{u}$, différence entre $\hat{u} + d\hat{u}$ et \hat{u} . Il est assez évident que, à la limite des changements infinitésimaux, la direction de $d\hat{u}$ devient perpendiculaire à \hat{u} , c'est-à-dire à la direction tangentielle à la trajectoire.

On peut alors comprendre le message de l'Eq. 18: la première composante $(dv/dt)\hat{u}$ de l'accélération est causée par le changement de grandeur de la vitesse, et sa direction est celle de \hat{u} , donc tangentielle à la trajectoire. Par contre, la deuxième composante $v(d\hat{u}/dt)$, qu'on appelle "accélération centripète", est causée par les changements de direction de la vitesse, et se trouve dans la direction de $d\hat{u}$, qui est perpendiculaire à la trajectoire.

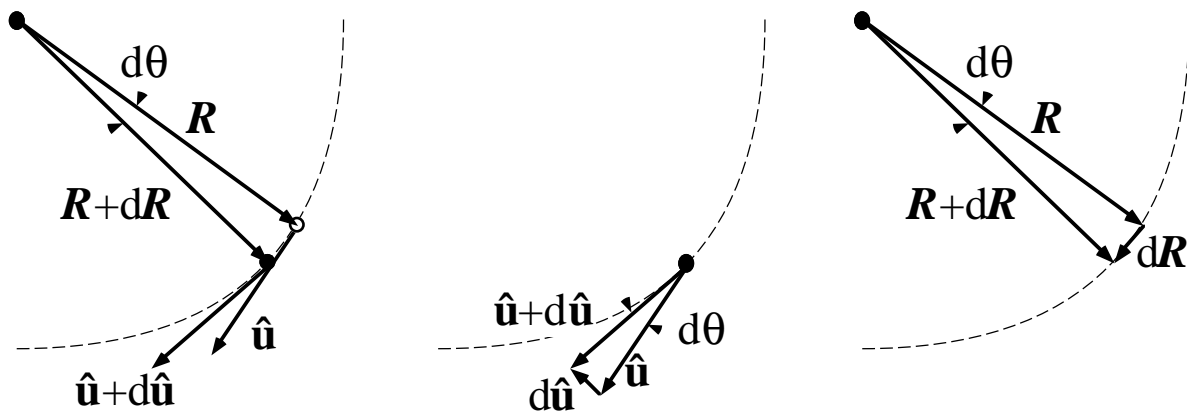


Fig. 10: La composante centripète de l'accélération est liée aux changements de direction de la vitesse.

Du point de vue de la dynamique, les conséquences des équations 14 et 18 sont évidentes: la force agissant sur la masse ponctuelle en mouvement sur le cercle a deux composantes, dans les directions tangentielle et perpendiculaire à la trajectoire. La composante tangentielle provoque les changements de grandeur de la vitesse. Par contre, la composante perpendiculaire est à l'origine de l'accélération centripète, et donc de la courbure de la trajectoire.

Il faut noter que, si la force est perpendiculaire à la trajectoire et donc sans composante tangentielle, la grandeur de la vitesse ne change pas. Il existe pourtant une accélération centripète; on appelle ce type de mouvement "rotation uniforme".

Le changement de position pendant l'intervalle de temps dt peut être exprimé en utilisant l'angle $d\theta$. La partie droite de la Fig. 10 montre que la grandeur du vecteur changement de position dR (qui effectivement correspond à la différence entre les deux vecteurs position $R + dR$ et R) est $Rd\theta$ (R étant la grandeur de R). D'autre part, le vecteur vitesse est par définition $v = dR/dt$. La grandeur de la vitesse peut donc s'exprimer comme suit:

$$v = \frac{Rd\theta}{dt} = R \omega , \quad (19)$$

où, par définition:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (20)$$

est la "vitesse angulaire" du mouvement sur le cercle.

Peut-on transformer cette vitesse angulaire scalaire en quantité vectorielle? La réponse est fournie par la partie droite de la Fig. 9. Le vecteur vitesse angulaire ω , dont la grandeur est ω , se trouve dans la direction perpendiculaire au plan de la trajectoire (qui est aussi le plan des vecteurs \mathbf{R} et \mathbf{v}), et dans le sens défini par la règle du tire-bouchon appliquée aux vecteurs \mathbf{R} et \mathbf{v} (dans cet ordre).

Pourquoi cette définition du vecteur ω ? Il s'agit de pouvoir généraliser l'Eq. 19 en utilisant une forme vectorielle:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R} ; \quad (21)$$

la vérification que cette équation fournit tant la grandeur (ωR) que la direction de la vitesse est immédiate.

Utilisons alors ce résultat pour continuer l'analyse de la notion d'accélération. Tout d'abord, prenons l'accélération centripète v ($d\hat{\mathbf{u}}/dt$). La partie centrale de la Fig. 10 montre que la grandeur du vecteur $d\hat{\mathbf{u}}$ est simplement $d\theta$ (parce que la longueur des vecteurs $\hat{\mathbf{u}}$ et $\hat{\mathbf{u}} + d\hat{\mathbf{u}}$ est unitaire). De ce fait, la grandeur de $(d\hat{\mathbf{u}}/dt)$ est $(d\theta/dt) = \omega$. Par conséquent, la grandeur a_c de l'accélération centripète est:

$$a_c = v\omega = \omega^2 R = v^2/R . \quad (22)$$

Prenons maintenant la définition générale d'accélération (Eq. 13) et la relation entre vitesse et vitesse angulaire (Eq. 21). Nous obtenons:

$$\mathbf{a} = \frac{d(\omega \times \mathbf{R})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{R} + \omega \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} ; \quad (23)$$

cette expressions est simplifiée si le mouvement est une rotation uniforme, pour lequel v et la vitesse angulaire ω sont des constantes. On a:

$$\mathbf{a} = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) . \quad (24)$$

II.6. Mouvement sur une trajectoire curviligne quelconque

Plusieurs des conclusions relatives aux les mouvements sur un cercle peuvent être généralisées aux mouvements sur des trajectoires quelconques. Selon la géométrie, une ligne courbe, dans des conditions très générales, peut être localement remplacée approximativement par un cercle, dont les paramètres sont entièrement déterminés par les caractéristiques de la ligne (voir Fig. 11).

Plus spécifiquement, on peut déterminer pour chaque point de la courbe un centre de courbure et un rayon de courbure, ρ . Le mouvement d'une masse ponctuelle sur la

ligne courbe est, localement et en première approximation, similaire au mouvement sur le cercle de rayon ρ centré au centre de courbure.

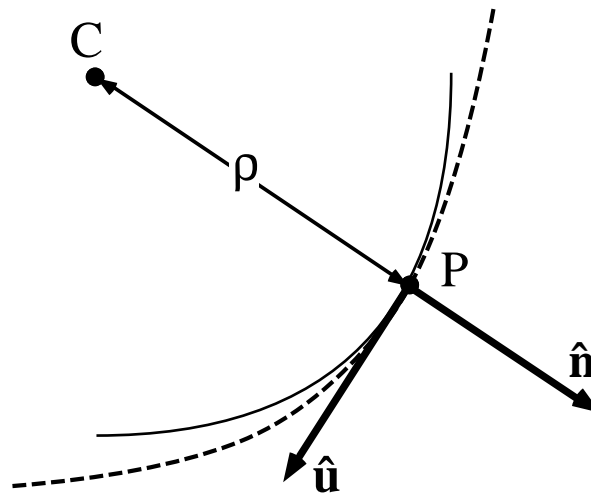


Fig. 11: Le centre de courbure C est le rayon de courbure ρ du cercle qui constitue une bonne approximation de la trajectoire courbée dans la région proche du point P .

On peut alors, pour chaque point P d'une trajectoire curviligne, considérer les deux directions perpendiculaire et tangentielle du cercle correspondant, et les vecteurs unitaires correspondants \hat{u} et \hat{n} . Le mouvement d'une masse ponctuelle qui transite par le point P donne lieu à une accélération avec deux composantes:

$$\mathbf{a} = a_t \hat{u} + a_c \hat{n} , \quad (25)$$

la première tangentielle et la deuxième centripète. On peut généraliser l'Eq. 22 en trouvant pour l'accélération centripète:

$$a_c = \frac{v^2}{\rho} , \quad (26)$$

et pour l'accélération tangentielle:

$$a_t = \frac{dv}{dt} . \quad (27)$$

La solution du problème du mouvement exige encore une fois l'analyse séparée des effets des composantes perpendiculaire et tangentielle de la force.

II.7. Mouvement d'un poids: quelle est la direction du temps?

Munis des instruments pour traiter les mouvements à trois dimensions, nous reprendrons maintenant l'analyse d'une masse ponctuelle soumise à une force constante (pour laquelle les équations 5 et 7 ont fourni la description à une dimension). Le cas le plus simple de force constante est évidemment une force nulle: $\mathbf{f} = 0$, donc $\mathbf{a} = 0$ et $v = \text{constante}$. Cette simple conclusion fut élevée dans le passé au rang de principe de la physique (principe d'inertie): un corps libre, c'est-à-dire non soumis à des forces, se déplace sans accélération, soit sur une trajectoire droite et à vitesse constante.

Prenons maintenant le cas de la force à laquelle nous sommes constamment sujets: la force de gravité. Il s'agit d'une force constante \mathbf{P} dans la direction verticale, dont la grandeur est le poids, mg . Dans un référentiel cartésien avec l'axe z vertical, les composantes de \mathbf{P} sont:

$$P_x = 0 ; P_y = 0 ; P_z = -mg ; \quad (28)$$

l'Eq. 14 donne:

$$\begin{aligned} ma_x &= ma_y = 0 ; \\ ma_z &= -mg , \text{ donc } a_z = -g . \end{aligned} \quad (29)$$

Afin de résoudre ces équations, supposons que la position \mathbf{r}_0 et la vitesse \mathbf{v}_0 au temps initial $t = 0$ aient comme composantes $(x_0, y_0, z_0) \equiv (0, 0, 0)$ et (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) . Supposons également avoir choisi l'axe y de manière que $v_{y0} = 0$. La coordonnée y ne changera pas pendant le mouvement, demeurant $y = 0$, et nous pouvons limiter notre analyse aux axes x et z .

La composante v_{x0} ne change pas pendant le mouvement, et:

$$x(t) = v_{x0} t . \quad (30)$$

En ce qui concerne l'axe z , la troisième des équations 29 est formellement équivalente à l'Eq. 4; nous pouvons alors adopter les solutions de celle-ci, après avoir changé les paramètres qui les caractérisent:

$$v_z(t) = v_{z0} - g t ; \quad (31)$$

$$z(t) = v_{z0} t - \frac{1}{2} g t^2 . \quad (32)$$

Les deux équations 30 et 32 constituent, en géométrie, un système paramétrique identifiant une courbe parabolique. On peut trouver l'équation de celle-ci en manipulant les équations 30 et 31 afin d'éliminer la variable t :

$$z(x) = \left(\frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2} \right) x^2 ; \quad (33)$$

la fonction $z(x)$ de l'Eq. 33 est montrée par la Fig. 12, avec le point de départ (x_0, z_0) et la vitesse à l'instant initial, v_0 .

Les caractéristiques du mouvement peuvent être facilement dérivées des équations correspondantes. Par exemple, la Fig. 12 montre le maximum de la courbe $x(t)$ au point (x_m, z_m) ; les valeurs de x_m et z_m peuvent être calculées en utilisant l'Eq. 33 et la condition $(dz/dx) = 0$:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=x_m} = \left(\frac{v_{z0}}{v_{x0}} \right) - \left(\frac{g}{v_{x0}^2} \right) x_m = 0 , \quad (34)$$

obtenant ainsi:

$$\begin{aligned} x_m &= (v_{x0} v_{z0} / g) ; \\ z_m &= (v_{z0} / v_{x0}) (v_{x0} v_{z0} / g) - (g / 2v_{x0}^2) (v_{x0} v_{z0} / g)^2 = (v_{z0}^2 / 2g) . \end{aligned} \quad (35)$$

On peut facilement analyser ce résultat afin de trouver les conditions pour l'occurrence du maximum pendant le mouvement; par exemple, le maximum n'est pas atteint si $x_0 > x_m$ et si la composante v_{x0} est positive.

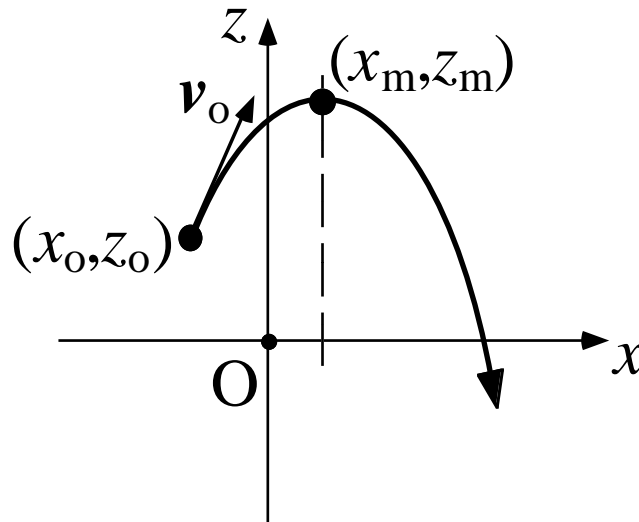


Fig. 12: Trajectoire sur le plan (x, z) d'une masse ponctuelle soumise à la force de son poids.

Passons maintenant à la discussion d'un point d'intérêt particulier. Prenons la Fig. 13: à gauche, on voit la trajectoire de la Fig. 12, avec la direction de mouvement sur l'axe x de gauche à droite. Supposons maintenant avoir une cassette vidéo qui montre le mouvement; la vidéo est montrée tant en marche avant qu'en marche arrière, sans révéler au public quelle est la direction réelle du mouvement.

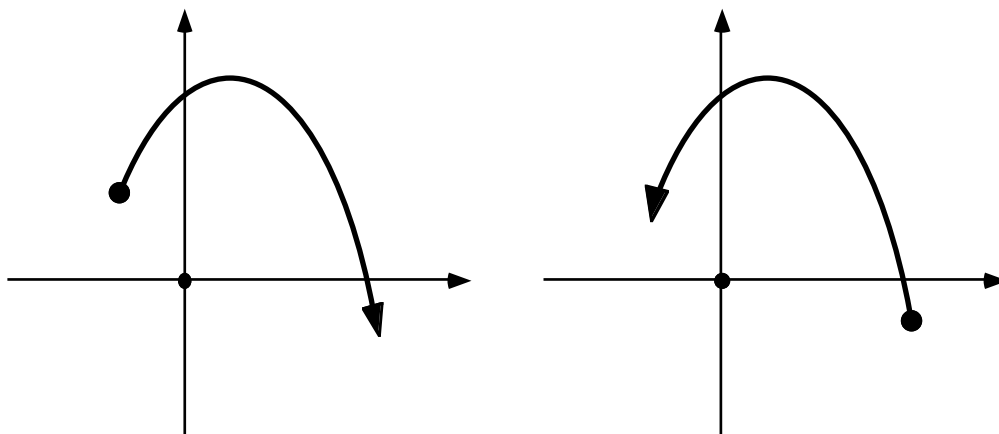


Fig. 13: Trajectoire de la Fig. 12 (à gauche) et sa version avec la direction du temps renversée (à droite). Mais quel est réellement le "temps renversé"?

On réalise qu'il est absolument impossible de distinguer, sans informations supplémentaires, la direction passé-futur de la direction futur-passé: la dynamique d'une masse ponctuelle est invariante par rapport à l'inversion de la direction du temps!

Par exemple, l'Eq. 13, qui est à la base de la dynamique d'une masse ponctuelle, demeure invariante si la direction du temps est renversée. Cette invariance est générale: dans toute la mécanique, il n'existe pas une seule loi qui puisse permettre une distinction entre les deux directions du temps. Par conséquent, le comportement

mécanique des objets simples (masses ponctuelles, corps rigides etc.) ne nous aide pas à comprendre quelle est la direction "correcte" du temps.

Nous reprendrons plus loin cette discussion: la clé permettant de déterminer la direction du temps ne se trouve pas dans la mécanique, mais dans la thermodynamique. Plus précisément, il s'agit d'une des conséquences du deuxième principe de la thermodynamique et des propriétés fascinantes de la fonction entropie.

II.8. Les oscillations

L'importance du mouvement oscillatoire harmonique traité dans cette section sera clarifié sous peu. Il s'agit du type de mouvement causé par les forces dites "élastiques", qui sont caractérisées par deux propriétés: elles s'opposent au déplacement de la masse ponctuelle par rapport à une position d'équilibre (stable), et leur grandeur est proportionnelle au déplacement.

La Fig. 14 montre plusieurs exemples d'oscillateurs à forces élastiques. Leur variété nous permet de comprendre l'importance de ce type de forces. Il faut noter qu'une grande partie des systèmes qui nous intéressent sont des systèmes proches d'un point d'équilibre stable. Tel est le cas, par exemple, des positions des atomes dans les liaisons chimiques des molécules et des solides. Equilibre "stable" veut dire que le système, déplacé de la position d'équilibre, tend à la retrouver. La tendance se manifeste par des forces, dont la grandeur augmente si le déplacement augmente. Quand celui-ci est suffisamment petit, la relation (normalement compliquée) entre grandeur de la force et grandeur du déplacement est approximativement linéaire. Donc, il s'agit d'une force presque élastique. En résumé, tout système proche d'une situation d'équilibre stable se comporte approximativement comme un oscillateur soumis à des forces élastiques: voilà l'importance générale de celles-ci et des mouvements qu'elles déterminent.

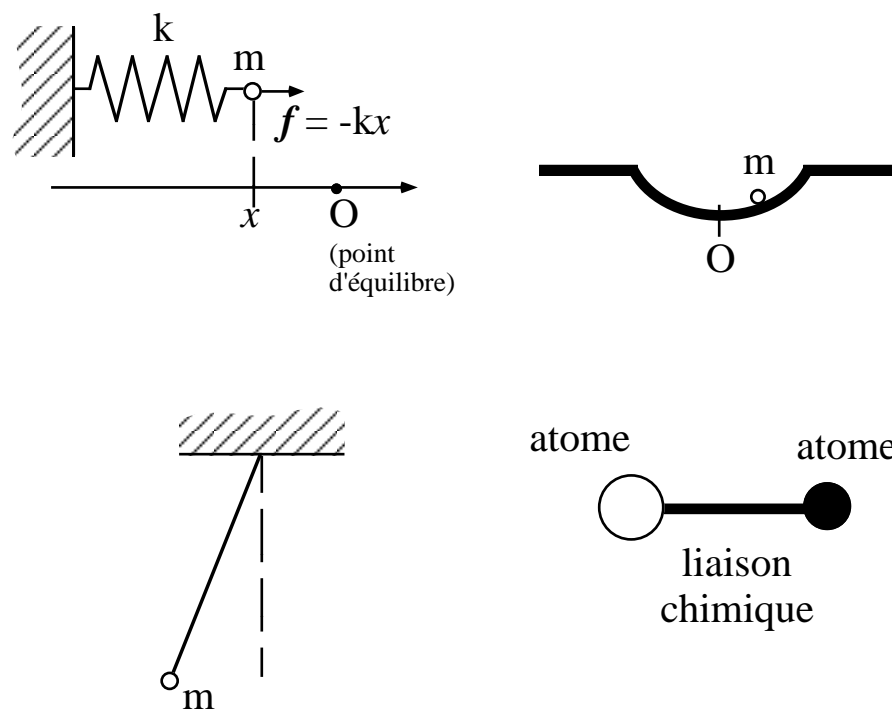


Fig. 14: Plusieurs systèmes dont le comportement est déterminé par des forces (au moins approximativement) élastiques.

Traisons explicitement le premier des systèmes de la Fig. 14, la masse ponctuelle rattachée à un ressort de constante élastique k ; plusieurs de nos conclusions seront généralement valides pour tous les oscillateurs. L'Eq. 3 donne:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} , \quad (36)$$

où kx est la grandeur de la force, et son signe négatif tient compte de la direction de la force, opposée au déplacement. On peut facilement vérifier que la solution de cette équation est une fonction oscillatoire $x(t)$ du type:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi) . \quad (37)$$

On peut en effet insérer cette fonction dans l'Eq. 36, obtenant après quelques passages élémentaires: $-kx_0 \sin(\omega t + \phi) = -m\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \phi)$, c'est-à-dire: $k = m\omega^2$. Donc, la seule condition pour accepter $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$ comme solution de l'Eq. 36 est que la "pulsation" ω de l'oscillation soit donnée par:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (38)$$

Quelles sont les propriétés du mouvement décrit par l'Eq. 37? La Fig. 15 en résume le comportement en fonction du temps, en ce qui concerne tant le déplacement x que la vitesse $(dx/dt) = \omega x_0 \cos(\omega t + \phi)$ et l'accélération $(dx^2/dt^2) = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Il faut noter que (1) déplacement, vitesse et accélération sont toutes des fonctions oscillatoires du temps avec la même période; (2) leurs amplitudes sont x_0 , ωx_0 et $\omega^2 x_0$; (3) l'angle "de phase" ϕ implique des valeurs non nulles des trois fonctions au temps initial $t = 0$. Par exemple, $x(0) = x_0 \sin(\phi)$, donc $\phi = \sin^{-1}(x(0)/x_0)$.

La période T de l'oscillation peut être calculée à partir de l'Eq. 37, en exigeant que (par définition de période) $x(t + T) = x(t)$. On obtient: $\sin(\omega(t + T) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$, qui équivaut à $\omega T = 2\pi$. et donc:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (39)$$

La pulsation est alors liée à la fréquence des oscillations. Par définition, celle-ci est le nombre d'oscillations qui ont lieu par unité de temps. Vu que chaque oscillation occupe une période T , on a:

$$\nu = \frac{1}{T} , \quad (40)$$

et la relation suivante (de simple proportionnalité) entre fréquence et pulsation:

$$\omega = 2\pi\nu . \quad (41)$$

Les résultats de l'étude du mouvement oscillatoire nous aident à comprendre et traiter un très grand nombre de phénomènes importants. Prenez, par exemple, la liaison chimique montrée par la Fig. 14: on peut l'assimiler à un ressort. Si la liaison est "forte", c'est-à-dire si sa longueur ne peut être changée qu'à l'aide d'une grande énergie, alors le "ressort" équivaut à une valeur élevée de la constante k ; l'Eq. 38 prévoit dans ce cas une

pulsation (et donc une fréquence) également élevée. Donc, des liaisons chimiques fortes impliquent aussi des vibrations moléculaires de haute fréquence!

II.9. Un test de l'équivalence des masses de gravité et d'inertie

A la fin de la vivisection de la loi de Newton, nous présentons une manière de tester l'égalité des masses d'inertie et de gravitation, discutée dans la section II.3. Le test est effectué sur le pendule illustré par la Fig. 16, constitué par une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur L fixe. La position du pendule est donnée par l'angle θ .

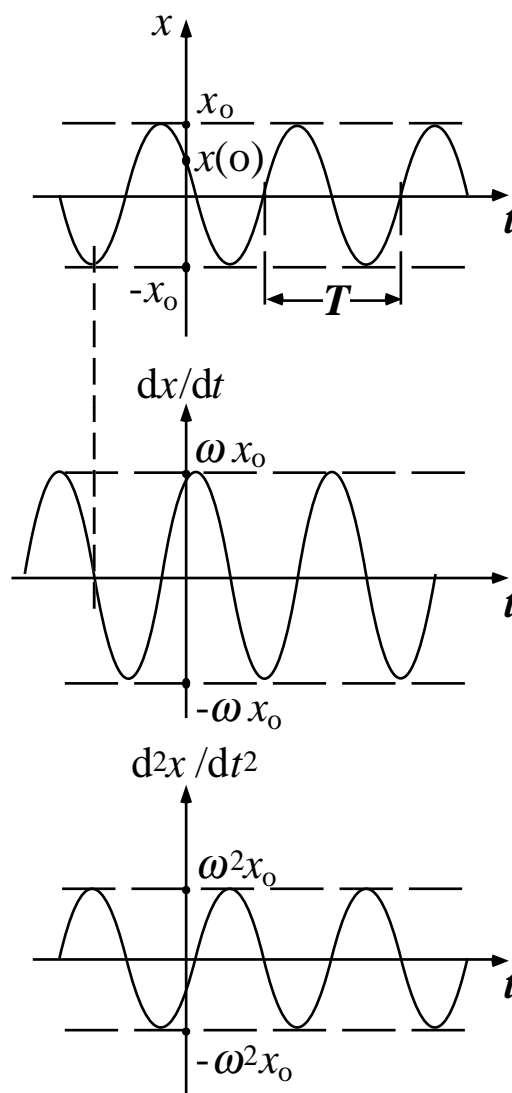


Fig. 15: Déplacement, vitesse et accélération du mouvement oscillatoire décrit par l'Eq. 37.

Analysons le mouvement de m sur sa trajectoire, qui est un arc de cercle de rayon L . La position de m sur la trajectoire (par rapport à la position d'équilibre) est $\xi = L \sin\theta \approx L\theta$, l'approximation étant valable si l'angle θ est suffisamment petit.

Afin d'appliquer l'Eq. 3, il faut considérer la projection de la force (le poids) dans la direction de la trajectoire (la composante de la force dans la direction perpendiculaire à la trajectoire est annulée par l'action du fil); la grandeur de la force étant mg , la grandeur de sa projection est $mg \sin\theta \approx mg\theta$. L'Eq. 3 donne alors:

$$-mg \theta = m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} ; \quad (42)$$

cette équation est formellement équivalente à l'Eq. 36. Les solutions sont obtenues à partir des équations 37 et 38, en remplaçant les variables et les paramètres du ressort par ceux du pendule. On obtient $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$, où:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} . \quad (43)$$

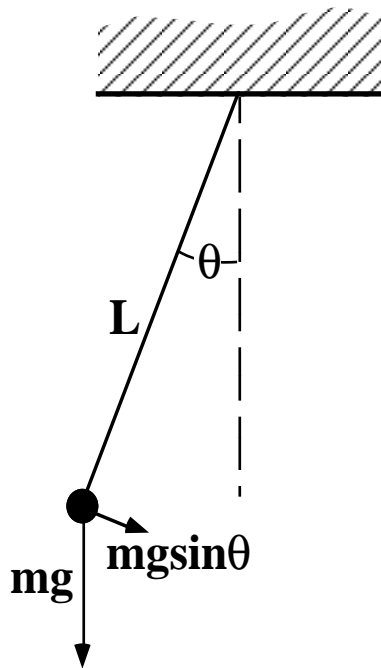


Fig. 16: Dynamique d'une pendule.

Mais attention! Notre analyse se base implicitement sur l'hypothèse d'égalité de la masse de gravitation et de la masse d'inertie. Supposons par contre que la première, m_G , ne soit pas égale à la deuxième, m_I . On doit alors réviser la solution du problème en obtenant, au lieu de l'Eq. 42:

$$-m_G g \theta = m_I L \frac{d^2 \theta}{dt^2} ; \quad (44)$$

la solution de cette équation est de nouveau une fonction du type $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$; la pulsation n'est pourtant plus donnée par l'Eq. 43 et devient:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{m_G}{m_I}} . \quad (45)$$

On peut mesurer la pulsation ω du mouvement et vérifier si elle diffère de $\sqrt{g/L}$. Toute déviation indiquerait que le facteur $\sqrt{m_G/m_I}$ n'est pas égal à l'unité, c'est-à-dire que les deux masses n'ont pas la même valeur.

De telles expériences très précises, ainsi que d'autres, n'ont jamais donné la moindre indication que $m_G \neq m_I$, confirmant ainsi la surprenante coïncidence des deux masses.

Le Coin Yankee:

<i>Mouvement</i>	<i>Motion</i>
<i>Force</i>	<i>Force</i>
<i>Cause</i>	<i>Cause</i>
<i>Effet</i>	<i>Effect</i>
<i>Relativité</i>	<i>Relativity</i>
<i>Masse d'inertie</i>	<i>Inertial mass</i>
<i>Masse de gravitation</i>	<i>Gravitational mass</i>
<i>Vecteur</i>	<i>Vector</i>
<i>Vectoriel</i>	<i>Vectorial</i>
<i>Vitesse (vecteur)</i>	<i>Velocity</i>
<i>Scalaire</i>	<i>Scalar</i>
<i>Centripète</i>	<i>Centripetal</i>
<i>Vitesse angulaire</i>	<i>Angular velocity</i>
<i>Tire-bouchon</i>	<i>Corkscrew</i>
<i>Oscillatoire</i>	<i>Oscillatory</i>
<i>Pulsation</i>	<i>Angular frequency</i>
<i>Période</i>	<i>Period</i>
<i>Fréquence</i>	<i>Frequency</i>
<i>Liaison chimique</i>	<i>Chemical bond</i>
<i>Pendule</i>	<i>Pendulum</i>

“Before beginning to look for the solution of a problem, one needs to select a coherent unit system. As far as mechanics is concerned, the preferred system is called “MKS”: its basic units are the meter, the kilogram (mass) and the second”

The [cause and effect] principle states that the causes of a phenomenon cannot influence it except during the period of time that follows the beginning of their action. Furthermore, it states that, given a sufficient quantity of information on the initial state of the system ... it is possible to predict its future states”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
v (vitesse)	m/s	km/h $\approx 0,28$ m/s
a (accélération)	m/s ²	
f (force)	N (newton)	kg $\approx 9,8$ N
n (fréquence)	Hz (hertz) = s ⁻¹	
ω (pulsation, vitesse angulaire)	Rad/s	

Ordres de grandeur:

G (constante de gravitation): $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
g (accélération de gravitation): $9,8 \text{ m/s}^2$

III. Quantité de mouvement, moment cinétique

Ce chapitre est consacré à deux quantités physiques liées au mouvement, la quantité de mouvement et le moment cinétique, dont l'importance ne sera complètement clarifiée que dans le Chapitre VI. Pour l'instant, elles nous permettront d'arriver à des formulations un peu plus avancées de l'Eq. 14 (loi de Newton).

La "quantité de mouvement" \mathbf{p} d'une masse ponctuelle m est par définition:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} ; \quad (46)$$

il s'agit donc d'un vecteur dont la direction est celle de la vitesse. Si nous formulons l'hypothèse que la masse est constante, alors l'Eq. 14 donne:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (47)$$

donc, si la force est nulle, \mathbf{p} est une constante (grandeur et direction).

Supposons par contre que la masse n'est pas constante (c'est le cas, par exemple, d'une goutte d'eau qui s'évapore progressivement): les équations 14 et 47 ne sont plus équivalentes. Laquelle des deux reste toujours valable? Les expériences nous montrent que nous devons choisir l'Eq. 47: celle-ci constitue la véritable base de la dynamique d'une particule.

Le problème que nous venons de discuter est particulièrement important dans le cas de la "dynamique relativiste" à laquelle nous viendrons plus loin. Nous verrons que la masse n'est pas réellement une constante, mais une fonction de la grandeur de la vitesse. Cela nous empêchera dans le cas de phénomènes relativistes, d'utiliser l'Eq. 14, et nous obligera à utiliser l'Eq. 47.

III.1. Le moment cinétique

La discussion de cette notion se basera sur un type de mouvements très important: ceux causés par les "forces centrales". Par définition, celles-ci sont des forces dont la direction passe toujours par un certain point. La Fig. 17 nous en fournit deux exemples importants: la force de gravité causée par le soleil sur une planète, et la force électrique coulombienne causée par le noyau d'un atome sur un électron. Dans les deux cas, si l'on suppose que la masse du deuxième objet (planète, électron) est infiniment plus petite que celle du premier objet (soleil, noyau), alors le phénomène ne change pas la position de celui-ci et la force exercée sur le deuxième objet passe toujours par le point fixe où se trouve le centre du premier.

Afin d'analyser les conséquences du caractère "central" d'une force, nous utiliserons un référentiel cartésien ayant pour origine le point vers lequel la force se dirige (voir la Fig. 17). Prenons maintenant l'Eq. 47, et multiplions-la vectoriellement par le vecteur position \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \left(\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \text{ donc } \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (48)$$

D'autre part, la dérivée du produit $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ donne:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} ,$$

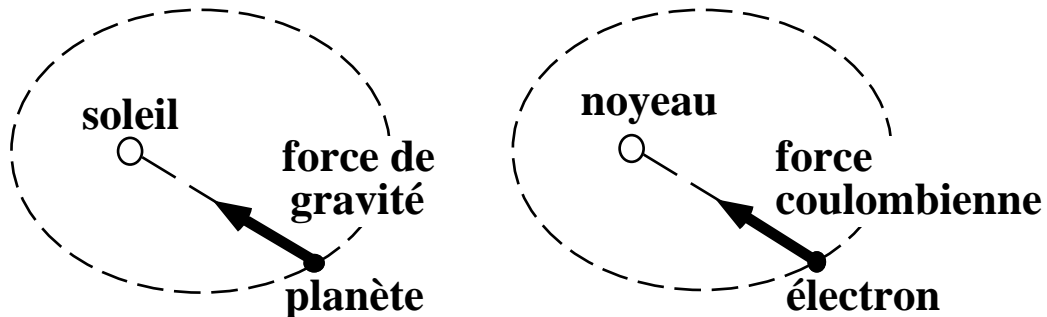


Fig. 17: Deux exemples particulièrement importants de forces centrales, c'est-à-dire de forces dont la direction passe toujours par un certain point.

puisque le terme $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ est un vecteur parallèle à $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, et donc le produit vectoriel $(d\mathbf{r}/dt) \times \mathbf{p}$ est nul. On peut donc écrire l'Eq. 48 comme suit:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) . \quad (49)$$

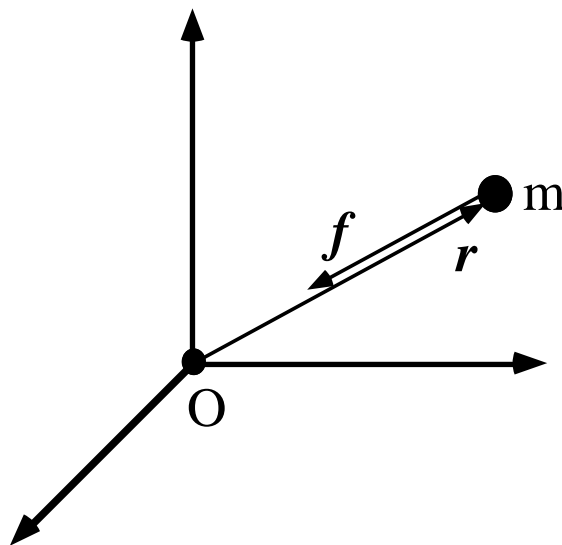


Fig. 18: Traitement formel des propriétés d'un mouvement causé par une force centrale.

Les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{r} ont la même direction (Fig. 18), donc $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = 0$ et l'Eq. 49 dans le cas d'une force centrale devient:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 , \quad (50)$$

ce qui implique que $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ reste constant pendant le mouvement.

On appelle cette quantité le "moment cinétique" L de la masse ponctuelle:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} . \quad (51)$$

Donc, une force centrale ne peut pas changer le moment cinétique (par rapport à son centre). Ce résultat peut sembler très formel et peu intéressant, mais cette impression ne correspond pas à la vérité. En fait, il cache une des plus importantes découvertes scientifiques de l'histoire de l'humanité. Afin de réaliser ce point, il faut interpréter le vecteur \mathbf{L} du point de vue de la géométrie.

\mathbf{L} se trouve dans la direction perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{p} , qui est aussi la direction perpendiculaire au plan de la trajectoire du mouvement. Donc, le fait que \mathbf{L} est constant implique que le mouvement causé par une force centrale doit avoir lieu dans un plan constant.

Prenons maintenant la Fig. 19, qui montre une partie infiniment petite $d\mathbf{r}$ du déplacement d'une masse causé par une force centrale. On a: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(d\mathbf{r}/dt) = (m/dt)(\mathbf{r} \times d\mathbf{r})$. D'autre part, la grandeur de $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ est donnée par $(r dr) \sin(\theta)$. Puisque $d\mathbf{r}$ est infiniment petit, alors $\eta \approx \pi/2 - \theta$, et $\sin(\theta) \approx \cos(\eta)$. Mais $(dr) \cos(\eta)$ donne la longueur du segment PP'' , tandis que r donne approximativement celle du segment OP' .

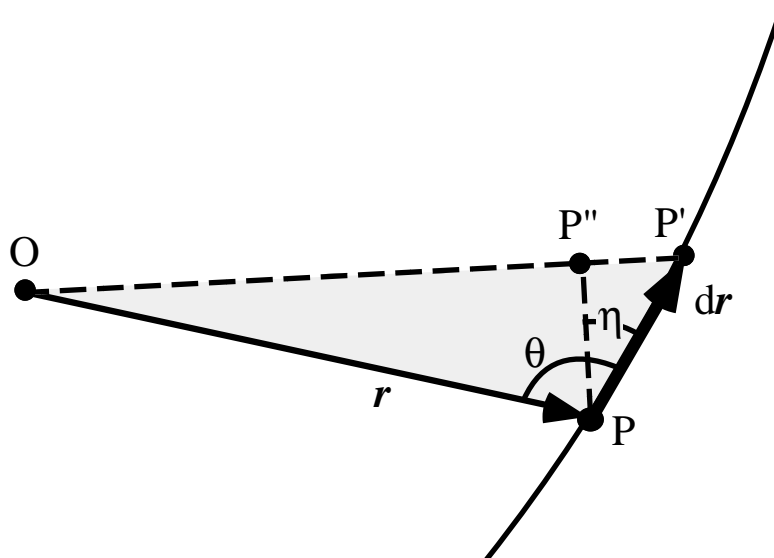


Fig. 19: Traitement formel des propriétés d'un mouvement causé par une force centrale (suite).

Conclusion, la grandeur du vecteur \mathbf{L} est équivalente à $2m(dA/dt)$, où dA est l'aire (ombrée) du triangle OPP' , c'est à dire du triangle "balayé" par le vecteur \mathbf{r} pendant le temps dt . Donc, le fait que \mathbf{L} n'est pas modifié par une force centrale est équivalent à $(dA/dt) = \text{constante}$, c'est-à-dire au théorème suivant: "pendant une période de temps de longueur donnée, le vecteur position \mathbf{r} balaie toujours la même aire".

Ce théorème est une des trois célèbres "lois de Kepler" sur le mouvement des planètes du système solaire. Kepler le dériva à partir des données expérimentales accumulées par Tycho Brahe avait grâce à une patience et une habilité extrêmes; ensuite, Newton justifia les "lois de Kepler" avec ses lois de la dynamique, confirmant ainsi leur validité.

Notre discussion montre que la loi des aires de Kepler n'est pas une propriété exclusive des forces de gravitation. Elle exige seulement que la force soit centrale: la loi des aires est équivalente à la conservation du moment cinétique, propriété de base des forces

centrales. Cette constatation nous fait entrevoir l'importance de la notion de moment cinétique, importance qui sera complètement clarifiée par la dynamique des ensembles de particules.



Johannes Kepler (à gauche) découvrit ses célèbres lois à partir des données expérimentales obtenues par Tycho Brahe (à droite).



L'Eq. 49 donne en général la relation entre les changements du moment cinétique et les forces qui les causent. Ecrivons cette équation de la manière suivante:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} . \quad (52)$$

On appelle la quantité $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ le "moment" de la force \mathbf{f} , par rapport au point O (l'origine du référentiel des vecteurs position \mathbf{r}). Il faut noter que l'Eq. 52 est valable si les deux moments $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ et \mathbf{L} sont mesurés par rapport au même point de référence O.

La définition du moment cinétique peut être simplifiée dans le cas de mouvement sur une trajectoire circulaire (voir la Fig. 9), en prenant pour origine le centre de la trajectoire. Dans ce cas, $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, un vecteur dans la direction perpendiculaire à \mathbf{r} et de grandeur $m\omega r$. Donc:

$$L = m\omega r^2 . \quad (53)$$

Le Coin Yankee:

Quantité de mouvement Momentum
Moment cinétique Angular momentum
Moment d'une force (torque) Moment of a force (torque)

"This theorem is one of the three famous "Kepler's laws" concerning the motion of planets in the solar system. Kepler derived them from the experimental data accumulated by Tycho Brahe with extreme patience and skill. Later, Newton justified the "Kepler's laws" with his laws of dynamics, thus confirming their validity".

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
p (quantité de mouvement)	kg m/s	

L (moment cinétique)	kg m ² /s	
moment d'une force	N m	

IV. Travail et énergie: première des lois de conservation

Ce chapitre constitue le premier pas dans la découverte de la loi la plus importante de la physique: la conservation de l'énergie. Cette loi a des répercussions très pratiques et décisives sur notre vie quotidienne; par exemple, elle nous oblige à "payer" le prix de l'énergie pour faire fonctionner une machine ou pour chauffer une chambre.

Notre découverte de la loi de conservation de l'énergie commencera par la mécanique. Nous verrons pourtant que l'énergie "mécanique" n'est pas toujours conservée; par exemple, les forces de frottement tendent à la faire diminuer. En thermodynamique, nous découvrirons que ces pertes apparentes d'énergie mécanique sont justifiées par l'équivalence énergie-chaleur, et peuvent être interprétées comme des transferts de chaleur. Cela nous permettra de généraliser la loi de conservation de l'énergie. Nous verrons ensuite qu'une des formes de transfert de chaleur est le "rayonnement", c'est-à-dire les ondes électromagnétiques. Nous serons alors amenés à la découverte des aspects énergétiques des phénomènes de l'électromagnétisme, et à la généralisation absolue de la loi de conservation de l'énergie.

En ce qui concerne la mécanique, nous analyserons maintenant la notion d'énergie pour des exemples particuliers. Commençons par un oscillateur (figures 14 et 15, équations 37-41). Calculons la grandeur de la vitesse en prenant la dérivée de l'Eq. 37:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \phi). \quad (54)$$

Maintenant, prenons la quantité physique qu'on appelle "énergie cinétique":

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \quad (55)$$

pour l'oscillateur on a $K = (m/2) x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi)$. Remarquons que l'unité de mesure SI pour l'énergie est $\text{kg m}^2/\text{s}^2$, unité qu'on appelle "joule" (J).

Maintenant, ajoutons l'énergie cinétique à la quantité $U = (k/2) x^2 = (k/2) x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi)^2$ (nous verrons que U est ce qu'on appelle "énergie potentielle"); nous obtenons:

$$E = K + U = (m/2) x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + (k/2) x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi)^2;$$

d'autre part, l'Eq. 38 implique: $\omega = \sqrt{k/m}$, et donc:

$$E = (k/2) x_0^2 (\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)^2) = (k/2) x_0^2; \quad (56)$$

en conséquence, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle changent individuellement pendant le mouvement oscillatoire (voir la Fig. 20), mais leur somme demeure constante. On appelle cette somme, E , l'énergie mécanique de l'oscillateur.

Plus spécifiquement, l'énergie cinétique atteint sa valeur maximale au centre de l'oscillation, tandis que l'énergie potentielle est à son minimum. Par contre, celle-ci est au maximum aux extrêmes de l'oscillation ($x \pm x_0$), tandis que l'énergie cinétique est nulle. Mais la somme des deux est toujours constante, $E = (k/2) x_0^2$.

S'agit-il d'une coïncidence? Peut-on identifier une telle propriété de conservation pour d'autres systèmes? Essayons de le faire pour le mouvement d'un poids, décrit par les équations 30-32.

Tout d'abord, l'énergie cinétique (Eq. 55) est dans ce cas:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m (v_{x0}^2 + v_{z0}^2 + g^2 t^2 - 2v_{z0} g t) . \quad (57)$$

Peut-on trouver une fonction "énergie potentielle", U , qui ajoutée à K donne une constante E ? Essayons: si $E = K + U$, alors $U = E - K = E - (m/2)(v_{x0}^2 + v_{z0}^2 + g^2 t^2 - 2v_{z0} g t) = \text{constante} + mg(v_{z0} t - (1/2)g t^2)$. L'Eq. 32 montre que ce résultat est équivalent à:

$$U = \text{constante} + mgz ; \quad (58)$$

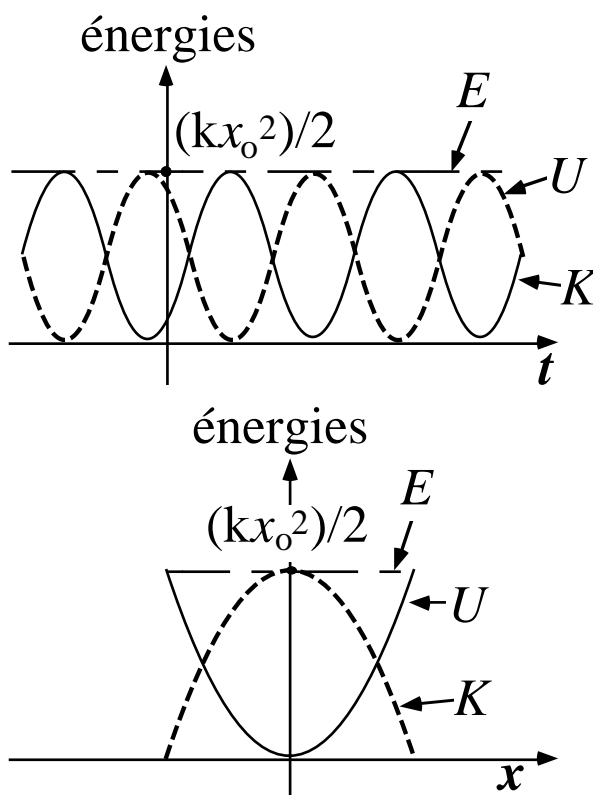


Fig. 20: Energies cinétique (K), potentielle (U) et mécanique totale (E) d'un oscillateur, en fonction du temps (en haut) et du déplacement (en bas). Remarquez que E demeure toujours constante.

on a donc réussi encore une fois à trouver une fonction U qui, ajoutée à l'énergie cinétique, donne une constante. La Fig. 21 montre les énergies U et K , en fonction de la hauteur z .

IV.1. Conditions générales de conservation de l'énergie mécanique

Passons maintenant des cas particuliers à une règle générale: quelles sont les conditions pour la conservation de l'énergie mécanique totale? Analysons la condition:

$$\text{constante} = E = U + K = U + \frac{1}{2} m v^2 ; \quad (59)$$

son examen sera simplifié en considérant tout d'abord un mouvement à une dimension (le long de l'axe x). En calculant la dérivée de l'Eq. 59 on obtient:

$$0 = \frac{dU}{dt} + mv \frac{dv}{dt} ,$$

donc $dU = -mv dv = -m \frac{dx}{dt} dv$, c'est-à-dire $\frac{dU}{dx} = -m \frac{dv}{dt}$, et:

$$f = -\frac{dU}{dx} . \quad (60)$$

voici donc un premier résultat important: la relation entre la fonction énergie potentielle (si elle existe) et la force. Celle-ci est la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au déplacement, de signe inverse.

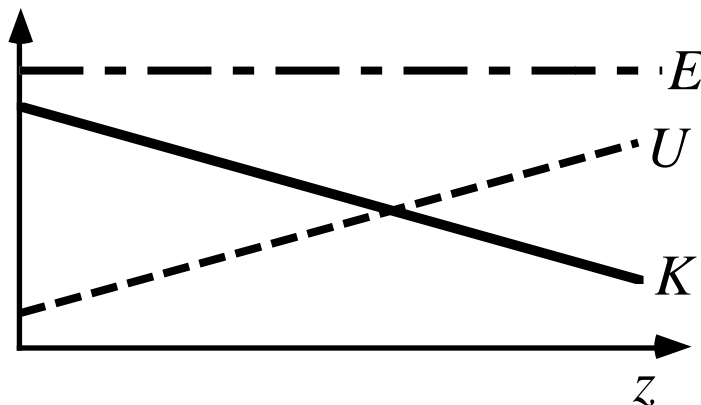


Fig. 21: Energies cinétique (K), potentielle (U) et mécanique totale (E) d'un poids, en fonction de la hauteur, z .

Ce résultat nous permet aussi de trouver la relation entre l'énergie cinétique et la force: puisque $U + K = \text{constante}$: $dU + dK = 0$, et:

$$dK = -dU , \quad (61)$$

qui, avec l'Eq. 60, donne:

$$dK = f dx . \quad (62)$$

Cette équation exprime la relation, qui est toujours valable, entre les changements d'énergie cinétique et la quantité $f dx$, qu'on appelle le *travail* élémentaire de la force:

$$dW = f dx . \quad (63)$$

En passant des mouvements infinitésimaux aux mouvements macroscopiques, le travail total d'une force pendant le déplacement du point x_A au point x_B est:

$$W(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} f dx . \quad (64)$$

Notons enfin que les équations 61-64 impliquent:

$$W(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} f dx = - \int_{x_A}^{x_B} dU = U(x_A) - U(x_B) ; \quad (65)$$

en résumé, les changements d'énergie cinétique sont toujours donnés par le travail de la force:

$$\Delta K = W ; \quad (66)$$

d'autre part, cela ne peut pas garantir l'existence de la fonction énergie potentielle et la conservation de l'énergie mécanique totale. Cette garantie doit être fournie par une condition supplémentaire, celle de l'Eq. 65: le travail doit pouvoir être exprimé comme la différence des valeurs d'une fonction U entre les points initial et final du mouvement. Cette fonction est, par définition, l'énergie potentielle.

IV.2. Formules du travail et de l'énergie en trois dimensions

Avant de poursuivre la discussion de l'énergie mécanique, il faut présenter les équations correspondantes en trois dimensions. Tout d'abord, voyons la définition de travail pour un déplacement infinitésimal, de la position r à la position $r + dr$. L'Eq. 63 devient:

$$dW = f \cdot dr \quad . \quad (67)$$

Prenons maintenant un déplacement macroscopique sur une trajectoire curviligne (voir la Fig. 22). Supposons que le déplacement ait lieu du point A au point B. Chaque portion élémentaire de la trajectoire correspond à un vecteur déplacement microscopique dr , pour lequel le travail élémentaire est donné par l'Eq. 67. Le travail total est simplement la somme, soit l'intégrale curviligne, des travaux élémentaires; l'Eq. 64 est donc remplacée en trois dimensions par:

$$W(A,B) = \int_A^B f \cdot dr \quad . \quad (68)$$

Cette définition est toujours valable mais, encore une fois, la conservation de l'énergie mécanique totale exige une condition supplémentaire: que le travail de l'Eq. 68 soit égal à la différence des valeurs d'une certaine fonction de la position - l'énergie potentielle $U(r)$ - aux points initial et final:

$$W(A,B) = U(r_A) - U(r_B) ; \quad (69)$$

Cette condition implique un point d'importance capitale: dans le cas de la conservation de l'énergie mécanique totale, la valeur de l'intégrale curviligne qui correspond au travail ne dépend pas de la trajectoire spécifique pour laquelle elle est calculée: seuls les points initial et final, A et B, de celles-ci jouent un rôle (voir la Fig. 23). C'est une autre manière d'exprimer la condition de conservation de l'énergie mécanique totale.

Notons que cette propriété implique également que le travail est nul si le point initial du déplacement coïncide avec le point final (voir encore la Fig. 23). Donc, si l'énergie mécanique totale est conservée, l'énergie cinétique est toujours la même quand la masse ponctuelle passe par un certain point de l'espace. On peut facilement vérifier cette propriété pour les exemples que nous avons précédemment discutés, l'oscillateur et le mouvement du poids.

Mais considérons maintenant un oscillateur réel au lieu de l'oscillateur idéalisé que nous avons discuté. Imaginons, par exemple, le point central d'oscillation d'un pendule: on voit que la grandeur de la vitesse diminue d'une oscillation à l'autre, révélant une perte d'énergie cinétique. Cette perte est causée par les "forces de frottement", par exemple le frottement entre l'atmosphère et le pendule.

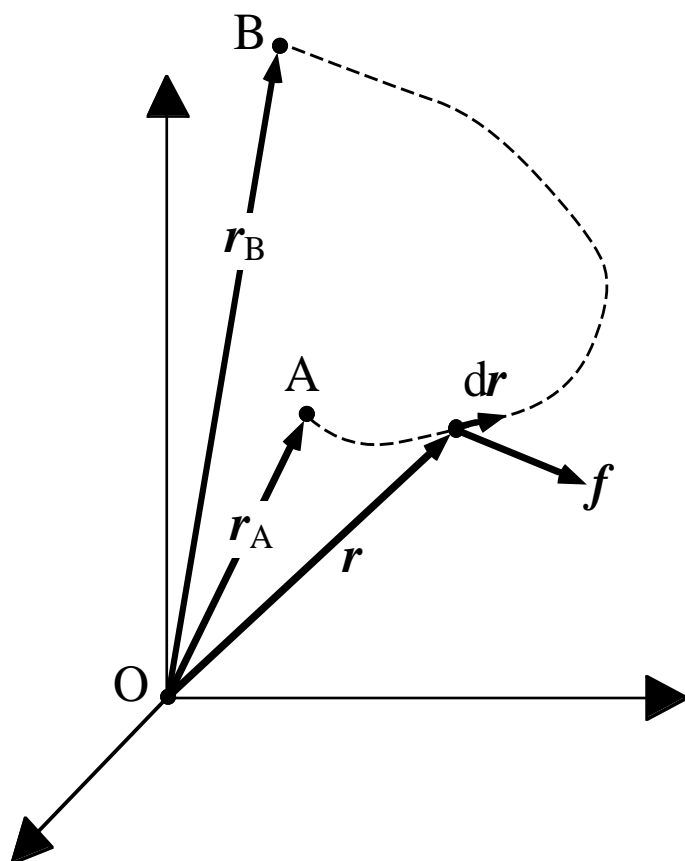


Fig. 22: Définition du travail fait par la force f pendant le mouvement du point A au point B.

On appelle "forces conservatives" les forces qui donnent lieu à la conservation de l'énergie mécanique totale. Les forces de frottement ne sont pas des forces conservatives.

La condition de conservation de l'Eq. 69 implique une relation entre force et énergie potentielle, comme l'Eq. 60 à une dimension:

$$f = -\nabla U(r) . \quad (70)$$

Dans cette équation, le symbole " ∇U " représente le "gradient" de la fonction U . Il s'agit d'un vecteur, dont les composantes sont:

$$(\nabla U)_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$(\nabla U)_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(\nabla U)_z = \frac{\partial U}{\partial z} . \quad (71)$$

Le symbole " ∇ ", qu'on appelle "nabla", nous fournit une manière simple et efficace d'écrire les formules des dérivées des vecteurs (nous en verrons plusieurs exemples

plus loin dans le cours). Afin d'utiliser efficacement ce symbole, il faut le traiter comme un "opérateur-vecteur", c'est-à-dire une quantité qui, tout en n'étant pas réellement un vecteur, se comporte pourtant comme les vecteurs dans les formules. Les composantes de ce "vecteur" sont:

$$\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} ; \nabla_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} ; \nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} . \quad (72)$$

Formellement, on peut donc interpréter le symbole " ∇U " comme le produit d'une quantité scalaire, U , par le (pseudo)vecteur ∇ . Le résultat est un vecteur, dont les composantes sont données par les équations 71.

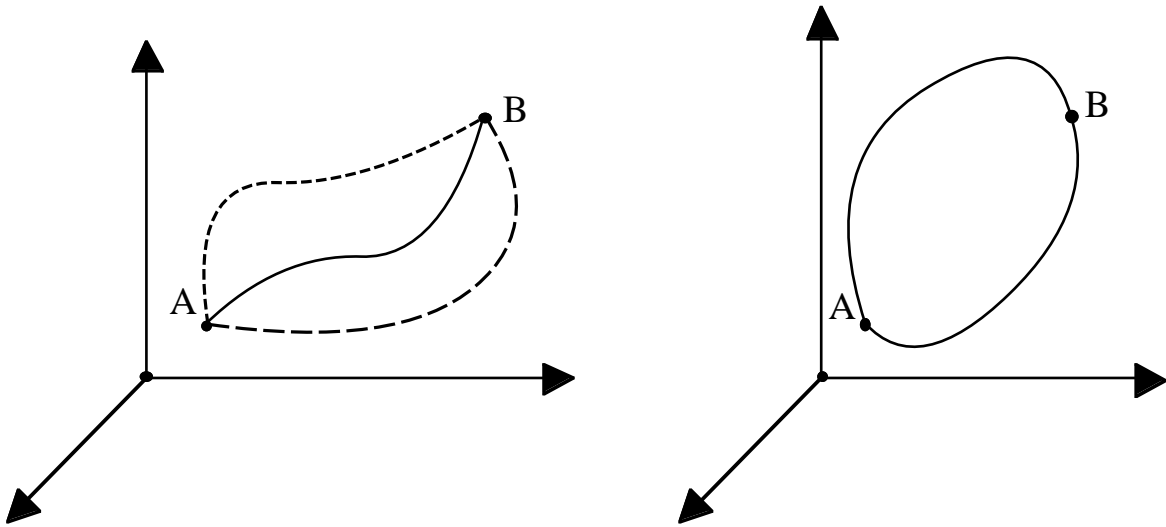


Fig. 23: Deux propriétés importantes des forces conservatives. À gauche: le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ A et du point d'arrivée B: par conséquent, les trois chemins donnent le même travail; à droite: le travail sur les deux chemins de A à B étant égal, et celui produit en allant de A à B étant égal à celui produit en allant de B à A sauf le changement de signe, le travail en circuit fermé est nul.

Il faut pourtant noter que le comportement formel de ∇ n'est pas entièrement équivalent à celui d'un vecteur: par exemple, le produit d'une quantité scalaire par un vrai vecteur ne change pas si l'ordre des deux facteurs change; par contre, l'expression $U\nabla$ n'est pas équivalente à ∇U , parce qu'une dérivée n'agit sur une fonction que si elle la précède.

On appelle une quantité comme ∇ un "opérateur", dans le sens où elle exprime une opération mathématique, dans ce cas une opération du type dérivée.

IV.3. Question du zéro de l'énergie

La définition d'énergie potentielle, exprimée par l'Eq. 69, implique une propriété intéressante: on ne peut définir que les différences de la fonction U d'un point à l'autre. Mais quel est alors la valeur absolue de la fonction à un point donné?

Afin de répondre à cette question, il faut se mettre d'accord. Il s'agit en fait de définir un point P pour lequel on dit que $U(P_0) = 0$ par convention. Ceci fait, l'Eq. 69 nous permet de définir la fonction U pour n'importe quel autre point P: il s'agit simplement de prendre le travail de la force en passant de P_0 à P et de changer son signe.

Il faut noter que le choix du parcours sur lequel on calcule le travail n'a aucune importance. En effet, comme on l'a déjà vu, si l'énergie mécanique est conservée, alors le travail ne dépend que des points initial et final.

La définition de valeur absolue de l'énergie potentielle pourrait paraître un peu artificielle et ardue. Pourtant, elle devient claire si on la compare avec la quantité "hauteur". Supposons que vous voulez vous déplacer, par exemple, d'Ouchy à la Riponne. Paresseux/ses comme la plupart des étudiant/es, vous vous préoccupez de savoir quelle est la différence d'altitude entre les deux sites, en espérant qu'elle soit modérée et ne vous oblige pas à faire trop d'efforts.

Côté hauteur, alors, ne sont que les changements qui vous intéressent. Pourtant, on doit parfois fournir des hauteurs absolues. On se met alors d'accord, et on choisit un point de référence qu'on déclare de hauteur nulle. Le choix n'est pas déterminé par des raisons fondamentales, mais par la pratique: la référence la plus facilement utilisable dans toutes les parties du monde est le niveau de la mer, et on définit l'altitude "par rapport au niveau de la mer".

Mais supposons qu'un individu, partisan de l'anarchie ou préférant la montagne à la plage, décide de remplacer le point de référence "niveau de la mer" par son endroit préféré dans les Alpes, disons 4000 mètres au-dessus du niveau de la mer. A part peut-être quelque confusion initiale, ce choix personnalisé ne cause pas de graves problèmes. La conversion d'un système de hauteurs à l'autre se fait simplement en ajoutant une constante, c'est-à-dire la différence de hauteur des deux points de référence (-4000 m). De plus, cette constante ajoutée s'élimine lorsqu'on calcule la différence de hauteur d'un point à l'autre, qui ne peut pas dépendre du choix du point de référence.

Toutes ces conclusions s'appliquent également à l'énergie potentielle. Pour celle-ci, le changement de point de référence n'implique qu'une constante à ajouter ou soustraire, et ne touche pas la différence d'énergie potentielle entre deux points.

Le choix du point de référence de l'énergie potentielle est une fois de plus dicté par des considérations pratiques. Par exemple, dans le cas du mouvement d'un poids, nous avons vu (Eq. 58) que l'énergie potentielle est $U = \text{constante} + mgz$; afin de préciser la valeur de la constante, il faut choisir un point de référence. On peut par exemple adopter le même point de référence que pour les hauteurs, en disant que $U(z)$ est nulle si z correspond au niveau de la mer.

Plusieurs forces conservatives ont la propriété de diminuer si la distance entre les objets qui les créent augmente; à la limite, la force devient nulle si la distance devient infinie. On peut citer, par exemple, la force de gravitation du soleil sur les planètes. Dans ce cas, on réfère souvent l'énergie potentielle à un point à distance infinie.

Une dernière remarque: l'énergie mécanique totale E étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, le point de référence de cette dernière est aussi un point de référence pour E .

IV.4. Et si l'énergie mécanique ne se conserve pas? Les forces de frottement

Nous présenterons maintenant quelques propriétés importantes des forces de frottement, ces ennemies implacables de la conservation de l'énergie mécanique. Analysons la Fig. 24, qui en montre deux exemples: la force de frottement de glissement statique et celle de glissement dynamique.

Prenons la partie gauche de la figure: un objet en contact avec une superficie sur laquelle il doit glisser, et soumis à une force f_N dans la direction perpendiculaire à la surface de contact (son poids plus une éventuelle force supplémentaire dans la même direction). On essaie de faire glisser l'objet en appliquant une force f dans la direction parallèle à la surface de contact.

On constate pourtant que la force f ne donne pas de mouvement si sa grandeur ne dépasse pas une certaine valeur minimum. On doit alors supposer que le contact entre l'objet et la superficie crée une force supplémentaire $f_{GS} = -f$ qui est en mesure d'annuler f , jusqu'à la valeur maximale mentionnée ci-dessus.

Les phénomènes qui créent cette force sont très compliqués: il s'agit de phénomènes au niveau atomique et moléculaire dans la région de contact. On doit donc utiliser une approche empirique, qui nous montre que la grandeur maximale de la force de glissement statique f_{GS} est:

$$\text{maximum de } f_{GS} = F_s f_N \quad , \quad (73)$$

où F_s est le coefficient de frottement de glissement statique de ce système, et f_N est la grandeur de la force f_N .

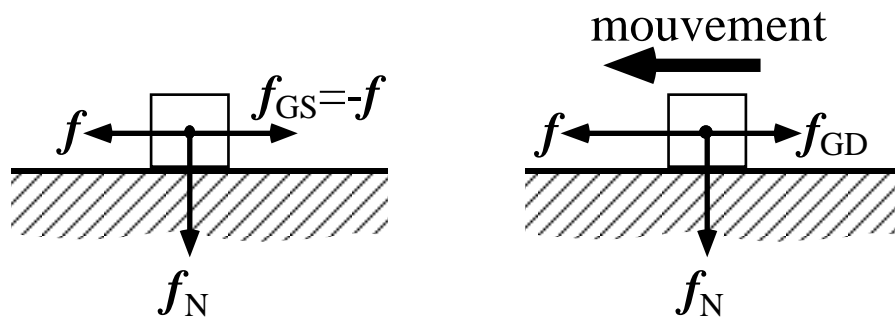


Fig. 24: Forces de frottement de glissement statique (à gauche) et dynamique (à droite).

La conclusion est simple: si la grandeur de la force f ne dépasse pas la valeur maximale spécifiée par l'Eq. 73, alors elle n'est pas en mesure de déplacer l'objet, qui reste immobile. L'Eq. 73 montre que le maximum peut être changé en changeant la grandeur de la force perpendiculaire, ou bien le coefficient F_s , qui dépend de la nature des surfaces en contact.

Passons maintenant à la droite de la Fig. 24, qui montre le même objet en mouvement. L'objet est soumis à l'action de deux forces parallèles à la surface de contact: la force appliquée f et une force de frottement de glissement dynamique, f_{GD} , dans la direction opposée au mouvement. Cette fois, la force de frottement est une constante:

$$f_{GD} = F_d f_N \quad , \quad (74)$$

où F_d est le coefficient de frottement de glissement dynamique. Normalement, on constate que $F_d < F_s$; cela explique un phénomène bien connu: si on "pousse" un objet pour le déplacer, lorsqu'on dépasse le minimum de poussée pour annuler le frottement statique, la même force cause ensuite une accélération.

Il faut aussi noter que, si la force appliquée f est de grandeur égale au frottement dynamique, alors la force totale est nulle et l'objet se déplace à vitesse constante. Si l'on

ne tient pas compte de la force de frottement, on pourrait en tirer la conclusion erronée que la force appliquée f donne une vitesse constante. Cette erreur a empêché l'humanité, pendant des dizaines de siècles, de découvrir la relation correcte entre force et accélération.

IV.4.1. Forces de frottement dans les fluides

Analysons maintenant un deuxième type important de forces de frottement: celles qui agissent sur un objet se déplaçant dans un fluide tel que l'eau, l'huile ou l'air. On constate que la force de frottement f_F est toujours dans la direction opposée à celle de la vitesse, et que:

$$f_F = -A\eta v , \quad (75)$$

où le coefficient A dépend de la forme du corps et le coefficient η , dit "viscosité", dépend de la nature du fluide.

Supposez maintenant qu'un corps commence à se déplacer par l'action d'une force F à laquelle s'ajoute la force de frottement de l'Eq. 75. Le corps est soumis à une accélération, qui diminue progressivement puisque la vitesse augmente, causant l'augmentation de la force de frottement.

A la limite, la grandeur de la force de frottement devient égale à celle de F , annule complètement celle-ci, et le corps continue à se déplacer mais à une vitesse "limite" constante de grandeur v_L . Appelant F la grandeur de F , on obtient à partir de l'Eq. 75:

$$v_L = \frac{F}{A\eta} . \quad (76)$$

Supposons que vous êtes frappé de folie (ce n'est qu'un exemple...) et que vous décidez d'abandonner un avion en plongeant par la porte sans attendre son atterrissage. Après un certain temps, vous atteignez la vitesse limite, une vitesse malheureusement élevée, dont vous auriez de la peine à témoigner. La situation peut être changée radicalement en utilisant un parachute, qui augmente le coefficient A et donc diminue la vitesse limite.

IV.5. Puissance

Les changements d'énergie cinétique étant donnés par l'Eq. 66, il est souvent important de préciser quelle est leur rapidité, déterminée par le travail produit par unité de temps.

On utilise alors la quantité physique dite "puissance", définie comme la dérivée du travail par rapport au temps:

$$P = \frac{dW}{dt} . \quad (77)$$

L'Eq. 77 montre que la puissance est aussi donnée par:

$$P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} ; \quad (78)$$

notons que la puissance est nulle si la force est perpendiculaire à la vitesse, puisqu'elle est aussi perpendiculaire au déplacement et donc à travail nul.

L'unité de mesure de la puissance dans le système SI, J/s, est appelée "watt" (W).

IV.6. Energie potentielle et équilibre

La notion d'énergie potentielle est importante tant pour les problèmes de dynamique que pour la statique. Nous avons déjà vu la condition d'équilibre statique (manque de mouvement) pour une masse ponctuelle: vitesse nulle à n'importe quel temps, et $f = 0$. L'Eq. 70 nous permet de modifier cette condition comme suit:

$$\nabla U(r) = 0 . \quad (79)$$

Cette condition est vérifiée pour un minimum, mais aussi pour un maximum et pour d'autres points "spéciaux" de la fonction U . Afin de comprendre la différence entre ces possibilités, nous les discuterons dans un cas spécifique à une dimension.

Prenons la masse ponctuelle de la Fig. 25, qui se trouve sur le sol. Son énergie potentielle est $U = mgz$. Pour le cas de la partie gauche de la figure, la condition d'équilibre correspond au minimum. On comprend facilement que l'équilibre est "stable": si le système (la masse ponctuelle) est déplacé du point d'équilibre, alors il tend à y retourner.

Le cas au centre de la Fig. 25 correspond par contre au maximum de la fonction U et à un équilibre instable. Le cas à droite de la Fig. 25 est celui d'une fonction U constante, qui donne un équilibre qui n'est ni stable ni instable.

Les mêmes conclusions peuvent être obtenues formellement. Par exemple, dans le cas du minimum, on a $dU/dx = 0$ et $d^2U/dx^2 > 0$, donc $f = 0$ et $df/dx < 0$, ce qui implique que la force se produit dans la direction opposée au déplacement, ce qui est nécessaire à une situation d'équilibre stable.

Les situations d'équilibre stable jouent un rôle très important dans les propriétés de la nature. La plupart des systèmes qui nous concernent se trouvent dans une situation d'équilibre stable, ou proches de celle-ci. Le fait que l'énergie potentielle est au minimum a des implications intéressantes.

Considérons, par exemple, la forme de la fonction $U(x)$ de la partie gauche de la Fig. 25: cette fonction peut être très compliquée, mais les mathématiques (théorème de McLaurin) donnent toujours une forme approximative simple pour la région proche du minimum:

$$U(x) \approx Ax^2 , \quad (80)$$

où le coefficient A est déterminé par la dérivée seconde d^2U/dx^2 au point minimum. Mais nous avons déjà vu une forme similaire d'énergie potentielle: la Fig. 20 montre que l'énergie potentielle d'un oscillateur est du type $U \propto x^2$, donc formellement équivalente à l'Eq. 80.

En résumé, tout système proche d'une situation d'équilibre stable se comporte en première approximation comme un oscillateur sujet à des forces élastiques. Autrement dit, si le système est déplacé de la position d'équilibre, il tend alors à osciller autour de celle-ci.

IV.7. Energie potentielle d'une molécule

Nous analyserons maintenant un cas particulièrement intéressant de système proche de l'équilibre. Prenons la molécule biatomique illustrée par la Fig. 26. La seule coordonnée qui nous intéresse est la distance d entre les deux atomes, donc le système est pratiquement monodimensionnel.

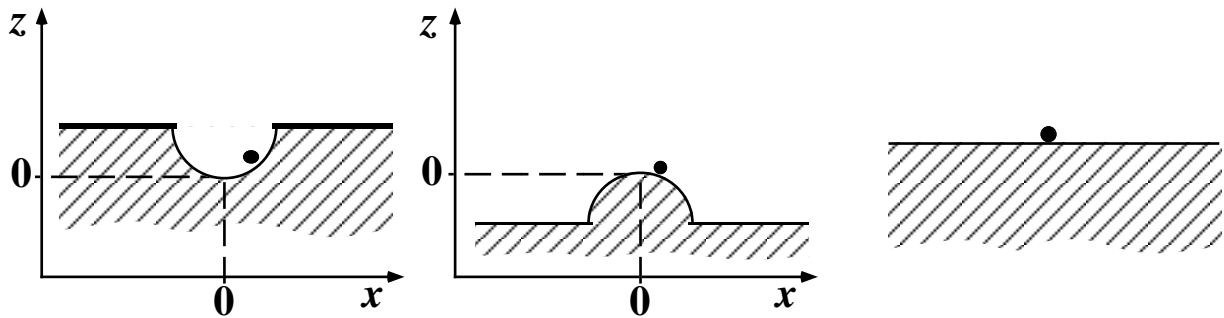


Fig. 25: Les trois cas d'équilibre statique à une dimension discutés dans le texte.

La partie à droite de la figure montre la fonction énergie potentielle $U(d)$, qui a été déduite des expériences et calculée à partir de la théorie des liaisons chimiques. Nous ne nous occuperons pas de celles-ci, mais seulement des propriétés de la molécule qu'on peut déduire à partir de la Fig. 26.

Tout d'abord, il existe une distance d_0 d'énergie potentielle minimale. Donc, il existe une distance d'équilibre stable entre les deux atomes. C'est bien raisonnable: nous savons que les liaisons chimiques des atomes donnent lieu à des objets stables tels que les solides, les molécules d'eau ou de gaz de l'atmosphère et, *last but not least*, nous-mêmes.

Mais il y a quelque chose de plus. Supposons que la distance entre les atomes est perturbée par rapport à l'équilibre. Celui-ci étant stable, nous aurons des forces qui tendent à remettre le système au point d'équilibre. La courbe d'énergie potentielle est une fonction très compliquée. Autour du minimum, néanmoins, elle peut être remplacée approximativement par une fonction du type de l'Eq. 80, c'est-à-dire par une fonction parabolique (dans ce cas, de la distance d). Si la distance est modifiée par rapport à l'équilibre, alors le système - la molécule - aura des oscillations autour de l'équilibre. Ce phénomène est bien connu: il s'agit des vibrations thermiques, qui font osciller la longueur des liaisons chimiques des molécules et des solides par rapport aux valeurs d'équilibre.

La forme de la courbe $U(d)$ de la Fig. 26 suggère pourtant que l'approximation parabolique ne fonctionne bien qu'à proximité du minimum. Si nous déplaçons maintenant de déplacer beaucoup la valeur de d par rapport à d_0 , dans la direction des valeurs basses, nous constatons que la courbe $U(d)$ augmente rapidement et devient asymptotique si $d \rightarrow 0$. Cela implique que la grandeur de la dérivée de U par rapport à d - qui détermine la grandeur de la force - devient très grande. Encore une fois, nous "découvrons" un phénomène bien connu: si nous essayons de comprimer un solide en diminuant la longueur moyenne de ses liaisons chimiques, nous constatons qu'une très grande force est nécessaire pour obtenir un petit changement de volume, et que la compression devient de plus en plus difficile si le volume diminue.

Passons maintenant à l'autre côté de la courbe, celui des grandes valeurs de d . On constate une asymétrie de la courbe par rapport au minimum, et enfin une tendance asymptotique à zéro pour $d \rightarrow \infty$. L'asymétrie joue un rôle très important; pour le

comprendre, il est nécessaire d'analyser le mouvement oscillatoire qui est décrit, par exemple, par l'Eq. 37 (dans le cas de la molécule, il faut remplacer par d la coordonnée x , et par $d = d_0$ le point d'équilibre $x = 0$). Imaginons de prendre la moyenne de la coordonnée pour un certain nombre d'oscillations. Puisque la fonction sinus est centrée sur la valeur zéro, la moyenne de coordonnée d est la valeur d'équilibre d_0 . Donc, les vibrations thermiques ne sont pas en mesure de changer les valeurs moyennes des longueurs des liaisons chimiques.

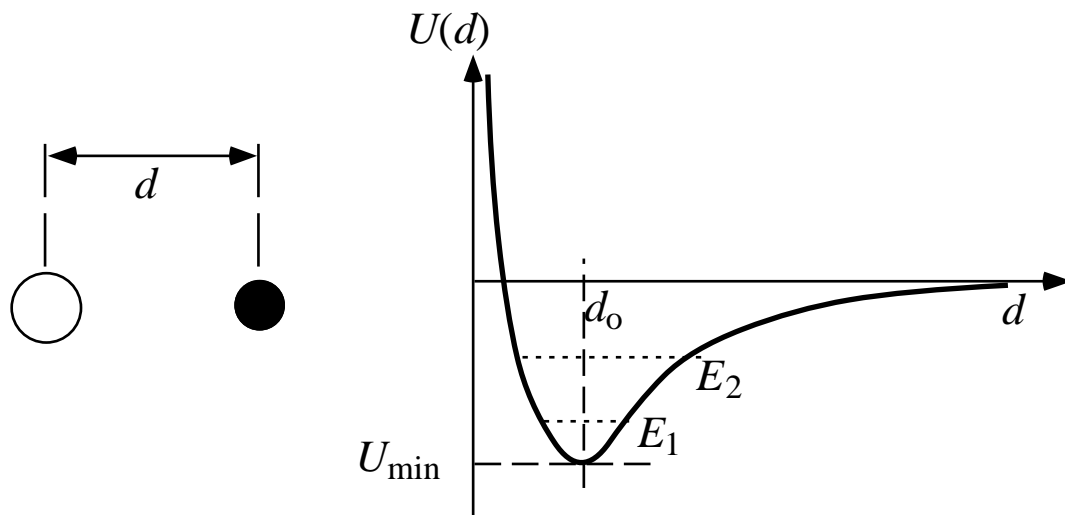


Fig. 26: Energie potentielle d'une molécule biatomique, en fonction de la distance entre les deux atomes.

Mais attention: ceci n'est qu'une approximation, valable pour une fonction $U(d)$ parabolique. Elle n'est plus valable si d se déplace trop vers les grandes valeurs. Considérons les deux lignes de la Fig. 26 qui correspondent aux énergies mécaniques totales (constantes) E_1 et E_2 . Il est évident que le mouvement qui correspond à E_1 ne déplace pas trop d par rapport à l'équilibre; dans ce cas, la moyenne de d est plus ou moins le point d'équilibre. Mais cela n'est plus vrai pour l'oscillation qui correspond à l'énergie E_2 : on atteint des grandes valeurs de la coordonnée d , et la figure suggère que la moyenne de celle-ci se déplace vers des valeurs plus grandes de d_0 . Voilà une fois de plus la justification d'un phénomène très commun: il s'agit de l'augmentation de volume causée par le chauffage d'un solide. En fait, l'augmentation de température (le chauffage) augmente l'énergie mécanique de vibration des liaisons chimiques.

Passons enfin à la limite: on atteint une distance infinie, c'est-à-dire que la liaison chimique est rompue. La Fig. 26 montre que cela nécessite la donation d'une certaine énergie au système: comparée à la situation au point d'équilibre, l'augmentation d'énergie est de $|U_{\min}|$. Autre phénomène bien connu: si on essaie de "casser" quelque chose, on a besoin de produire un travail!

Le Coin Yankee:

<i>Energie</i>	<i>Energy</i>
<i>Energie cinétique</i>	<i>Kinetic energy</i>
<i>Energie potentielle</i>	<i>Potential energy</i>
<i>Conservation</i>	<i>Conservation</i>
<i>Energie mécanique totale</i>	<i>Total mechanical energy</i>
<i>Travail</i>	<i>Work</i>
<i>Force conservative</i>	<i>Conservative force</i>
<i>Gradient</i>	<i>Gradient</i>
<i>Point de référence</i>	<i>Reference point</i>
<i>Frottement</i>	<i>Friction</i>
<i>Viscosité</i>	<i>Viscosity</i>
<i>Puissance</i>	<i>Power</i>
<i>Equilibre</i>	<i>Equilibrium</i>
<i>Stable, instable</i>	<i>Stable, unstable</i>
<i>Cheval vapeur</i>	<i>Horsepower (HP)</i>
	<i>(CV)</i>

“This condition implies something of extreme importance: if the total mechanical energy is conserved, the value of the line integral which defines the work does not depend on the specific trajectory along which it is calculated: the only things that matter are the initial point A and the final point B of the trajectory... This is another way to express the condition of conservation of the total mechanical energy.

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
<i>K, U, E</i> (énergies: cinétique, potentielle, mécanique totale); <i>W</i> (travail)	joule (J) (kg m ² /s ²)	kilowattheure (kWh) = 3,6 × 10 ⁶ J
<i>W</i> (puissance)	watt (W) (joule/s)	cheval-vapeur (CV) ≈ 736 W
<i>A</i> (coefficient géométrique de frottement d'un fluide)	m	
<i>η</i> (viscosité)	Nm ⁻² s (Pascal s)	Poise = 0,1 Pascal s

Ordres de grandeur:

η (viscosité): 10⁻⁴ - 10⁻¹ Pascal s

V. Changements de référentiel

L'étude d'un phénomène de mouvement se fait toujours par rapport à un référentiel. Quelles sont les conséquences d'un changement de référentiel? Comment doit-on modifier la description d'un phénomène? Essayons de répondre à ces questions importantes sur la base d'expériences de la vie quotidienne.

Supposons que nous nous trouvons à la gare de Lausanne, attendant de prendre le TGV pour aller à Paris et passer une agréable soirée à la Comédie Française ou à l'Opéra (ou, plus vraisemblablement, au Crazy-Horse Saloon, Boulevard George V). En attendant l'arrivée du train, faisons le point de la situation en ce qui concerne la mécanique de notre corps. Nous constatons que nous sommes soumis à la force de gravité, c'est-à-dire au poids mg ; cette force est pourtant compensée par la force créée par le trottoir, assurant une situation statique.

Plus tard, nous voici dans le TGV, voyageant comme l'éclair de Dijon à Paris. Si nous faisons à nouveau le point de la situation, nous n'observons pas de changements: la force poids est toujours la même, et toujours compensée: pas de mouvement (par rapport au train, évidemment).

Mais attention: en arrivant en gare de Lyon à Paris, nous nous sentons tout d'un coup "poussés/ées" dans la direction du mouvement, c'est-à-dire soumis/ses à une nouvelle "force". Quelle est son origine? Cette force était absente lorsque le train voyageait à vitesse constante (grandeur et direction), mais elle s'est manifestée quand le train a commencé à accélérer (ou à décélérer, si vous préférez) c'est-à-dire quand sa vitesse a changé par rapport au temps. Essayons d'analyser les effets de l'accélération du TGV.

Prenons la Fig. 27: le train (de type ancien, pas un TGV) se déplace dans la direction de l'axe horizontal (x) à vitesse v_R . On peut observer le mouvement des passagers dans le train de deux points de vue différents: le référentiel "fixe" de la voie, R , et celui en mouvement du train, R' . Ce qu'on observe du référentiel R est très facile à comprendre: tout d'abord, si le train se déplace à vitesse constante, alors les voyageurs se déplacent à la même vitesse, donc leur mouvement relatif par rapport au train est inexistant. Du point de vue du référentiel R' (du train), la vitesse des voyageurs est tout simplement nulle. L'accélération des voyageurs est nulle tant par rapport à R qu'à R' .

Imaginons maintenant que le train ralentit: du point de vue de R , la vitesse du train diminue à cause d'une accélération a_R causée par les forces de freinage. D'autre part, celles-ci n'agissent pas sur les passagers, qui tendent à continuer leur mouvement à vitesse constante v_R : il n'est pas surprenant de les voir "poussés" par rapport au train, dans la direction opposée à l'accélération de celui-ci.

Du point de vue de R' , par ailleurs, on observe que les passagers sont accélérés par rapport au train. Cette accélération peut se justifier de deux manières différentes. La première est de dire que la relation $f = ma$ est valable dans le référentiel R , mais non dans le référentiel R' , parce que celui-ci ne se déplace pas à vitesse constante par rapport à R .

La seconde est de dire que la relation $f = ma$ est toujours valable, et que l'accélération des passagers observée dans le référentiel R' (le train) est justifiée par l'action d'une nouvelle force, dite "force d'inertie", dont la grandeur est justement ma_R . Il s'agit d'une "force apparente" qui se manifeste dans le référentiel R' à cause de son accélération par rapport à R .

Essayons maintenant de retrouver ces mêmes résultats par un traitement un peu plus formel. Tout d'abord, trouvons la loi de transformation des coordonnées d'un référentiel à l'autre. Pour l'exemple considéré, la seule coordonnée importante est x dans le référentiel R , qui devient x' dans le référentiel R' . Les lois de transformation sont simplement:

$$x = x' + v_R t' ; \quad (81)$$

$$t = t' ; \quad (82)$$

$$x' = x - v_R t . \quad (83)$$

Il faut noter que l'Eq. 82 souligne l'équivalence des mesures de temps dans les deux référentiels. On pourrait penser qu'il s'agit d'une propriété évidente qu'il n'est pas la peine d'expliquer. Nous verrons, par contre, que cette propriété n'est pas du tout évidente lorsqu'on passe du traitement classique des changements de référentiel à la relativité d'Einstein.

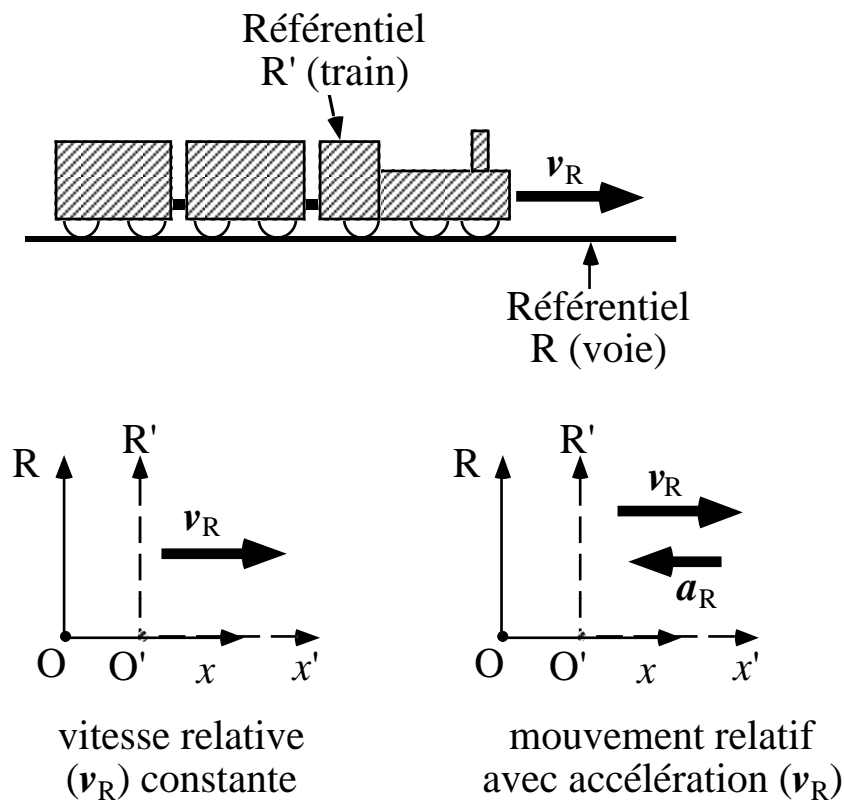


Fig. 27: Changements de référentiel à une dimension, dans les deux cas de mouvement relatif à vitesse constante et à vitesse variable.

Les équations 81-83 résument la théorie qu'on appelle "relativité galiléenne", d'après Galileo Galilei qui a été le premier à formuler les règles gouvernant les changements de référentiel. Utilisons ces équations afin de comprendre les forces d'inertie. La relation entre force et accélération dans le référentiel R de la voie est la suivante:

$$f = ma = \frac{d^2x}{dt^2} . \quad (84)$$

Supposons maintenant que le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre n'a pas d'accélération, c'est-à-dire que $v_R = \text{constante}$. L'Eq. 84 peut être transformée de R à R'

en utilisant les équations 81 et 82: $d^2x/dt^2 = d^2(x' + v_R t')/dt'^2 = d(v' + v_R)/dt' = a'$, et donc:

$$f = ma' , \quad (85)$$

équation qui est tout-à-fait équivalente à l'Eq. 84: la loi fondamentale de la dynamique ne change pas d'un référentiel à l'autre, si leur mouvement relatif n'est pas accéléré.

Supposons maintenant que ce mouvement est accéléré avec $a_R = \text{constante}$. On a alors : $v = v' + a_R t'$, et donc: $a = dv/dt = d(v' + a_R t')/dt' = a' + a_R$. L'Eq. 85 doit être remplacée par:

$$f = ma' + ma_R , \quad (86)$$

qui nous ramène aux deux interprétations présentées précédemment: (1) la force "réelle" n'est plus égale à la masse multipliée par l'accélération à cause du mouvement accéléré de R' par rapport à R , qui ne permet pas d'appliquer la loi de Newton, ou (2) on peut toujours interpréter l'Eq. 86 comme "force égale masse multipliée par accélération", à condition que la force soit $(f - ma_R)$, c'est-à-dire la force "réelle" combinée avec une force apparente ou d'inertie, égale à $-ma_R$.

Par cette analyse, nous avons aussi découvert une différence profonde entre deux types de référentiel: ceux dans lesquels seules des forces "réelles" agissent, et ceux dans lesquels existent aussi des forces apparentes. Les référentiels du premier type sont dits "référentiels d'inertie". Il est évident que tous les référentiels d'inertie se déplacent l'un par rapport à l'autre à vitesse constante. Le référentiel d'inertie par excellence est celui des "étoiles fixes"; tous les autres référentiels d'inertie ne se meuvent pas par rapport aux "étoiles fixes", ou se déplacent à vitesse constante par rapport à celles-ci.

Notons que le référentiel R (la voie) dans l'exemple de la Fig. 26 n'est pas un parfait référentiel d'inertie, parce qu'il se déplace avec la Terre, dont le mouvement par rapport aux "étoiles fixes" ne se fait pas à vitesse constante; dans la discussion précédente, nous avons considéré R comme un référentiel approximatif d'inertie.

V.1. Forces apparentes créées par la rotation

Le chapitre précédent a traité des forces apparentes créées par des changements de grandeur de la vitesse du référentiel. Nous discuterons maintenant les forces apparentes créées par un changement de direction de cette vitesse sans changement de grandeur, c'est-à-dire par une rotation à vitesse angulaire constante de R' .

Un exemple en est fourni par la Fig. 28: on voit à gauche une masse ponctuelle qui se déplace sur une trajectoire circulaire. Un ressort de constante K relie la masse au centre de la trajectoire. Dans une situation d'équilibre statique, la force produite par le ressort est nulle et la distance du centre O à la masse est r_0 . Pendant le mouvement circulaire, on constate que cette distance augmente et devient r . Le ressort produit une force de grandeur $K\xi$, où $\xi = r - r_0$.

Analysons tout d'abord le phénomène du point de vue du référentiel d'inertie R , où la masse ponctuelle se déplace selon la trajectoire circulaire. La force du ressort, de grandeur $K\xi$, se dirige vers le centre de la trajectoire. Cette force cause une accélération centripète $K\xi/m = K(r - r_0)/m$. D'autre part, l'accélération centripète est dérivée de l'Eq. 22, et sa grandeur est $\omega^2 R$. Donc, la relation entre accélération et force valable pour le référentiel d'inertie R donne:

$$\frac{K\xi}{m} = \omega^2 r \quad . \quad (87)$$

Cette relation, par exemple, spécifie quelle est la valeur de la vitesse angulaire pour chaque valeur du rayon et vice-versa.

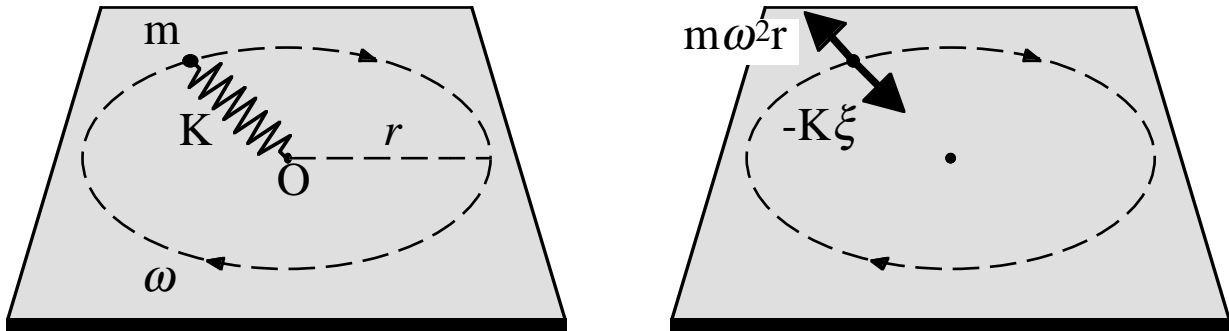


Fig. 28: Exemple de force apparente créée par la rotation du référentiel, dans lequel la masse ponctuelle n'a pas de mouvement.

Changeons maintenant le référentiel et utilisons celui (R') qui est centré sur O mais sujet à une rotation à la même vitesse angulaire que la masse ponctuelle. Son mouvement par rapport au référentiel d'inertie R est donc accéléré. Par conséquent, la relation entre force et accélération utilisée pour R n'est plus valable. En effet, du point de vue de R' la masse ne se déplace pas, donc elle n'a pas d'accélération, malgré l'action du ressort.

On peut, d'autre part, interpréter ce résultat en utilisant pour R' une relation force-accélération semblable à celle valable pour R , mais en ajoutant une force apparente à celle du ressort. Cette force doit annuler les effets du ressort et permettre une situation statique de la masse. Donc, la grandeur de la force apparente est $K\xi = m\omega^2 r$, et sa direction est opposée à la direction (centripète) de la force du ressort.

On appelle cette force apparente la "force centrifuge" f_c , de grandeur f_c :

$$f_c = m\omega^2 r \quad . \quad (88)$$

V.1.1 Force de Coriolis

La notion de force apparente centrifuge a été dérivée en supposant que la vitesse de la masse ponctuelle dans le référentiel R' en rotation est nulle. Cela n'est pas vrai en général; la vitesse de la masse dans le référentiel R' génère une deuxième force apparente liée à la rotation, qui s'ajoute à la force centrifuge: la "force de Coriolis".

Prenons la Fig. 29: on voit une masse ponctuelle en rotation à vitesse angulaire ω ; la masse est aussi dotée d'une vitesse dans la direction radiale, dont la grandeur (constante) dans le référentiel en rotation R' est v' . A cause de cette vitesse, pendant la période de temps infinitésimale dt la distance r par rapport au centre O change de $dr = v'dt$. Pendant le même temps, dans le référentiel d'inertie R qui n'a pas de rotation, la direction de la vitesse radiale v_r change d'un angle ωdt .

Quelle est l'accélération a de la masse par rapport au référentiel R? Il faut distinguer entre ses composantes radiale, a_r , et tangentielle, a_t . La composante radiale est causée approximativement par le même mécanisme que celui discuté dans la section précédente: elle provient principalement du changement de direction de la composante tangentielle de la vitesse, dont la grandeur est $v_t \approx \omega r$; par conséquent, la composante radiale de l'accélération est à nouveau $\omega^2 r$, produisant la force apparente centrifuge de l'Eq. 88.

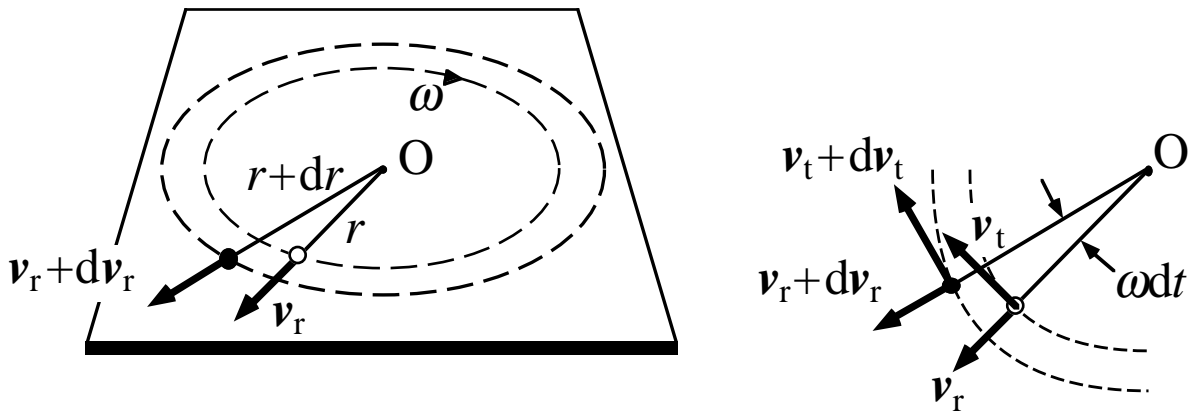


Fig. 29: Traitement de la force de Coriolis, causée par l'effet combiné de la rotation du référentiel et de la vitesse de la masse ponctuelle par rapport à celui-ci.

Cette fois, par ailleurs, on a aussi une composante tangentielle de l'accélération a , créée par deux mécanismes combinés. Tout d'abord, nous avons déjà vu que la direction de la vitesse radiale v_r change d'un angle ωdt : cela cause un changement de vitesse de grandeur $v' \omega dt$ dans la direction tangentielle, et donc une accélération $v' \omega$ dans la même direction. De plus, la grandeur de la vitesse tangentielle, v_t , est modifiée par le changement de distance $dr = v' dt$. La modification est $dv_t = \omega dr = \omega v' dt$, donnant lieu à un supplément $\omega v'$ d'accélération dans la direction tangentielle. La combinaison des deux mécanismes donne alors une accélération tangentielle a_t de grandeur $v' \omega + v' \omega = 2v' \omega$. On appelle cette accélération (qui s'annule si la vitesse dans le référentiel R' est nulle) "accélération de Coriolis".

Du point de vue du référentiel en rotation R', le mouvement est à vitesse constante v' , donc sans accélération, ni dans la direction radiale ni dans la direction tangentielle. On doit alors introduire des forces apparentes afin de justifier la différence d'accélération par rapport au référentiel d'inertie R; tout d'abord, à nouveau la force centrifuge de l'Eq. 88; de plus, la force de Coriolis dont la grandeur est obtenue en multipliant par la masse la grandeur de l'accélération de Coriolis:

$$\text{Force de Coriolis (grandeur)} = 2mv' \omega \quad . \quad (89)$$

V.1.2. Généralisation des équations

On peut facilement arriver à une généralisation formelle de l'analyse précédente. Prenons de nouveau un référentiel d'inertie R et un autre référentiel R' en rotation à vitesse angulaire (vecteur) constante ω par rapport à R. Supposons que la vitesse de la masse ponctuelle dans le référentiel R' est v' . Supposons enfin que l'origine (commune) des deux référentiels a été choisie de manière qu'elle coïncide avec le centre de rotation de R'.

La vitesse v dans le référentiel R peut alors être écrite en ajoutant à v' la vitesse donnée par la rotation:

$$v = v' + \omega \times r ; \quad (90)$$

L'accélération dans le référentiel R est alors donnée par:

$$a = \frac{dv'}{dt} + \omega \times \frac{dr}{dt} ; \quad (91)$$

d'autre part, si nous supposons que la grandeur de v' est constante, alors le changement qui correspond à sa dérivée n'est donné que par la rotation, ce qui donne, compte tenu tant de la grandeur que de la direction:

$$\frac{dv'}{dt} = \omega \times v' ; \quad (92)$$

d'autre part, $\omega \times (dr/dt) = \omega \times v = \omega \times (v' + \omega \times r)$; combiné aux équations 91 et 92, ce résultat donne:

$$a = 2\omega \times v' + \omega \times \omega \times r ; \quad (93)$$

le premier terme de la partie droite de cette équation est la forme généralisée de l'accélération de Coriolis; le second est la forme généralisée de l'accélération centripète.

On peut encore plus généraliser l'Eq. 93 en tenant compte de la possibilité que la masse ait une accélération a' dans le système R'; on obtient:

$$a = a' + 2\omega \times v' + \omega \times \omega \times r ; \quad (94)$$

V.1.3. Force de Coriolis - exemples

La forme généralisée de la force de Coriolis de l'Eq. 94 nous permet de discuter quelques exemples de ses effets. Il faut tout d'abord remarquer que la force de Coriolis ne dépend pas seulement de la grandeur de la vitesse v_R' mais aussi de sa direction par rapport à celle de ω . Par exemple, la force de Coriolis est nulle si le plan de rotation est perpendiculaire à v' et donc celle-ci est parallèle à ω .

La Fig. 30 en illustre un exemple intéressant: la force de Coriolis causée par les mouvements à la surface de la Terre. Tout d'abord, il faut remarquer que la Terre n'est pas un référentiel d'inertie, à cause de son mouvement. Plus spécifiquement, la rotation autour de l'axe terrestre donne lieu tant à une force centrifuge qu'à une force de Coriolis.

Etant donné la vitesse angulaire, la force centrifuge dépend de la distance par rapport à l'axe de rotation, qui joue le rôle de r dans l'Eq. 88. Un de ses effets est la diminution apparente du poids, grâce à sa composante dans la direction verticale. Cette diminution est plus importante à l'Equateur qu'à proximité du Pôle Nord ou du Pôle Sud. Voilà donc une manière élégante de perdre du poids sans se soumettre à des tortures diététiques: il suffit de se déplacer jusqu'à l'Equateur ou au moins, peut-être plus agréablement, vers les tropiques.

En ce qui concerne la force de Coriolis, la Fig. 30 montre deux exemples de mouvement dans la direction Sud-Nord, le premier à l'Equateur à une vitesse (relative à la Terre) v_1 , et le deuxième à un point beaucoup plus au nord, à v_2 . On n'a pas de force de Coriolis dans le premier cas, vu que la vitesse v_1 est dans la même direction que la vitesse angulaire.

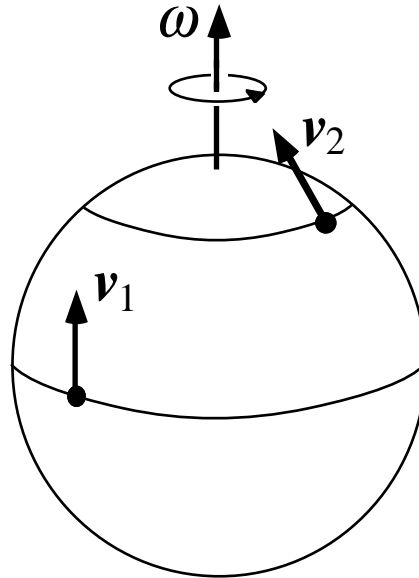


Fig. 30: Effets de la force de Coriolis dans le cas de mouvements par rapport à la Terre.

Par contre, le deuxième cas donne une force de Coriolis non nulle, sa grandeur étant donnée par le double du produit des grandeurs de la vitesse angulaire, de v_2 et du sinus de leur angle. Celui-ci augmente en prenant des points vers le nord, à parité de grandeur des deux autres facteurs. Donc, le phénomène est plus important en Suède qu'en Afrique équatoriale.

Quelle est la direction de cette force de Coriolis? L'accélération de Coriolis, donnée par l'Eq. 94, se fait dans la direction tangente au parallèle concerné, et dans la direction Est-Ouest. D'autre part, la force de Coriolis doit justifier l'absence de cette accélération dans le référentiel en rotation, et donc sa direction est opposée, c'est-à-dire Ouest-Est.

Un autre exemple de force de Coriolis nous est fourni par la Fig. 31, qui montre une station spatiale où une situation de "pseudogravité" a été reproduite grâce à la rotation à vitesse angulaire ω . La station consiste essentiellement en un "tube" circulaire pressurisé, rempli d'atmosphère et chauffé.

Quelle est la vitesse angulaire nécessaire afin de créer une situation de pseudogravité? La condition est que la force centrifuge dans le référentiel R' en rotation de la station doit être égale au poids, mg . Donc, $m\omega^2 r = mg$, et $\omega = (g/r)^{1/2}$.

Si nous prenons, par exemple, $r = 50$ m, la vitesse angulaire doit être de 0,44 rad/s, ce qui équivaut à un tour toutes les 14 secondes environ. Supposons maintenant que vous vous trouvez dans la station et décidez de faire du "jogging" à la vitesse v' , dans la direction tangentielle et dans le sens de rotation de la station (voir la Fig. 31); supposons que la grandeur de v' est $v = 5$ m/s. Quelle sera la force de Coriolis agissant sur vous?

Tout d'abord, la direction: le vecteur $2\omega \times v'$ est dans la direction radiale, vers le centre de la station. Par conséquent, la force de Coriolis s'exerce également dans la direction

radiale, mais vers l'extérieur, c'est-à-dire dans la même direction que la force centrifuge qui simule la gravité. La grandeur de la force est $m(2\omega v) \approx 4,4 m$.

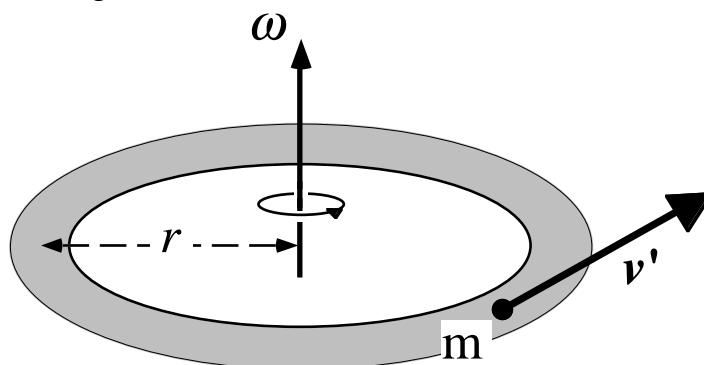


Fig. 31: Station spatiale à pseudogravité créée par la rotation, qui donne également lieu à des forces de Coriolis.

Voici une conséquence très intéressante: en comparant le facteur multipliant la masse à l'accélération de gravité $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, on constate qu'à cause de la force de Coriolis le poids apparent augmente de $(4,4/9,8) \approx 45\%$. Voilà un "jogging" bien lourd! Mais il ne faut pas se décourager: il suffit de changer la direction de la course à l'inverse de la rotation, et...miracle: notre poids artificiel diminue de 45%!

V.2. Beauté de la relativité d'Einstein

Les règles gouvernant les changements de référentiel que nous avons naguère discutés sont la manifestation d'une propriété fondamentale des lois de la mécanique: c'est ce qu'on appelle, comme déjà mentionné, la "relativité galiléenne". Cette propriété correspond à notre expérience quotidienne: supposons que nous nous trouvons dans un train qui se déplace à grande vitesse mais sans accélération ni vibrations. Supposons également qu'il n'y a pas de fenêtres: le mouvement du train relatif aux voies ne peut pas être détecté directement.

Peut-on détecter le mouvement relatif du train en effectuant des expériences de mécanique? La réponse est négative (du moins si nous considérons, en première approximation, le référentiel de la voie comme un référentiel d'inertie malgré le mouvement de la Terre). Cette impossibilité est la conséquence des lois de transformation des coordonnées pour deux référentiels d'inertie, exprimée par les équations 81-83:

$$x = x' + v_{\text{R}}t' ; \quad (81)$$

$$t = t' ; \quad (82)$$

$$x' = x - v_{\text{R}}t , \quad (83)$$

et du fait que ces transformations de coordonnées ne changent pas la forme de la loi fondamentale de la mécanique (voir les équations 84 et 85).

On peut résumer ce résultat en disant que "nulle expérience de mécanique ne peut révéler l'état de mouvement d'un référentiel d'inertie par rapport à un autre". Cette constatation est la base du principe de relativité galiléenne.

Mais on peut remarquer deux limitations importantes dans cette formulation du principe. Tout d'abord, l'impossibilité est limitée à la révélation des mouvements relatifs à vitesse (vecteur) constante; nous avons vu que le principe ne s'applique pas aux mouvements relatifs accélérés. De plus, le principe n'exclut pas la possibilité de révéler

un mouvement à vitesse constante avec des expériences en dehors de la mécanique, appartenant à d'autres branches de la physique.

La première limitation est traitée à fond par la théorie de la relativité générale ou de la gravitation d'Einstein, que nous avons mentionnée en relation avec l'équivalence des masses de gravitation et d'inertie. La deuxième limitation est traitée par la première des théories de la relativité d'Einstein, la "relativité spéciale".

Nous éviterons une discussion à fond sur la relativité générale, qui exige un formalisme mathématique compliqué. Nous nous limiterons à remarquer une propriété générale de toutes les forces apparentes qu'on a discutées (telles que la force centrifuge et celle de Coriolis): elles sont toutes proportionnelles à m , la masse (d'inertie). Cela a des conséquences intéressantes: supposons, par exemple, que nous nous trouvons dans un "ascenseur" totalement isolé de l'extérieur; si l'ascenseur monte à vitesse constante, la seule force extérieure qu'on détecte est le "poids", mg , c'est-à-dire la masse multipliée par une constante. Mais si l'ascenseur a une accélération a , alors on observe une force apparente qui s'ajoute au poids, donnant une force totale $m(g + a)$.

Mais attention: vu que l'ascenseur est isolé de l'extérieur, peut-on réellement affirmer que le changement de force est causé par son accélération? Vu que la force est $m(g + a)$, on pourrait également conclure que l'accélération de gravité a changé de g à $(g + a)$. Quoique apparemment absurde, cette hypothèse ne peut pas être éliminée sans rompre l'isolement de l'ascenseur. La racine de ce paradoxe apparent est l'équivalence de la masse d'inertie et de la masse de gravitation.

Des analyses de ce type ont amené Albert Einstein à réaliser qu'au fond, les forces de gravitation peuvent être elles-mêmes considérées similaires à des forces apparentes, causées par une "courbure" de l'espace induite par les masses. La justification de l'équivalence de la masse de gravitation et de la masse d'inertie est une conséquence presque automatique de cette réalisation.

Passons maintenant aux expériences non mécaniques, qui ne sont pas concernées par la relativité galiléenne. Peut-on, par exemple, effectuer des expériences de magnétisme ou d'optique sur l'état de mouvement (à vitesse constante) d'un référentiel? Nous limiterons la discussion de ce point à deux exemples.

Prenons tout d'abord l'expérience illustrée par la Fig. 32: l'interaction entre un courant et le champ magnétique créé par un aimant. Nous verrons en électromagnétisme que le courant est soumis à une force dite "force de Lorentz": le courant est produit par des charges électriques en mouvement, et toute charge en mouvement qui interagit avec un champ magnétique est affectée par la force de Lorentz.

Mais attention: on peut imaginer le courant comme un flux de particules chargées qui se déplacent toutes à la même vitesse. Si nous changeons alors de référentiel, et que nous utilisons celui qui se déplace à la même vitesse de charges, la vitesse s'annule, donc on devrait voir la force de Lorentz disparaître! Est-ce vrai? Absolument pas: le courant est bel et bien soumis à une force dans le nouveau référentiel.

Il y a donc quelque chose qui cloche dans la relativité galiléenne, si on essaie de l'appliquer à l'électromagnétisme. Il faut noter que si la force de Lorentz pouvait être annulée par le mouvement du référentiel, on pourrait révéler ce mouvement (même à vitesse constante) en mesurant la force! Mort de la relativité? Non: à mort la relativité de Galileo, et bienvenue à la relativité d'Einstein! Nous verrons en effet dans l'électromagnétisme que le paradoxe de la Fig. 32 est expliqué par la "contraction de Lorentz", un des principaux phénomènes de la relativité d'Einstein.

Passons maintenant à un deuxième exemple illustrant les limitations de la relativité galiléenne en dehors de la mécanique. La transformation "galiléenne" (à une dimension) de la vitesse est donnée par la dérivée de l'Eq. 83:

$$v' = v - v_R ; \quad (95)$$

ce résultat se vérifie apparemment dans la vie quotidienne: si l'on se promène dans le TGV, la vitesse du train s'ajoute à celle de la marche. Mais attention: au lieu de prendre des objets du type "masse", considérons cette chose très ordinaire qu'on appelle "lumière".

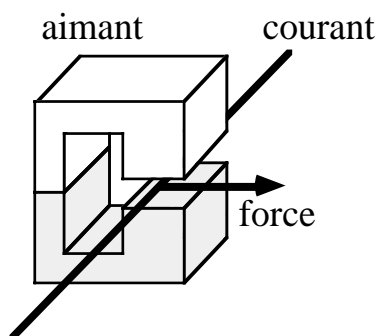


Fig. 32: Une simple expérience peut nous fournir la clé des mystères de la relativité spéciale.

Il faudra attendre l'électromagnétisme pour découvrir tous les secrets de la lumière: anticipons pourtant deux ou trois points. Premièrement, la lumière est une "onde électromagnétique", soit une perturbation du champ électromagnétique qui se propage à la vitesse de la lumière, c . Deuxièmement, l'électromagnétisme est en mesure de calculer la vitesse de propagation de ces ondes; dans le vide, le résultat est $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, où ϵ_0 et μ_0 sont deux constantes fondamentales de l'électromagnétisme: la "constante diélectrique du vide" et la "perméabilité magnétique du vide". Le calcul numérique reproduit le résultat expérimental $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.

Et maintenant, le point essentiel: le résultat $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ changera-t-il si l'on change de référentiel? La réponse étonnante est: pas du tout! Pour l'électromagnétisme le résultat est toujours $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8$ m/s! Mais alors, mais alors, mais alors: va-t-on jeter par la fenêtre la règle de changement de vitesse de l'Eq. 95?

L'étonnante réponse de M. Einstein a été: oui! Mais avec quelques précautions: on a vu que l'Eq. 95 fonctionne bien pour la vie quotidienne, donc il faut la garder comme cas limite. Limite de quoi? Remarquons que la vitesse c est très élevée par rapport aux vitesses typiques des objets, TGV compris. La validité de l'Eq. 95 est effectivement limitée aux basses vitesses par rapport à c .

Comment peut-on alors remplacer cette règle tout en gardant sa validité au cas limite? Reprenons la transformation galiléenne (équations 81-83) et essayons de la modifier de la manière suivante:

$$x' = \gamma(x - v_R t) ; \quad (96)_1$$

$$t' = \xi(t - \eta x) , \quad (96)_2$$

où α , ξ et η sont des coefficients à déterminer. Il faut noter que l'équation 95 est déjà en accord avec une condition évidente: si $x' = 0$, alors x doit être égal à $v_R t$. Il faut aussi

noter qu'avec l'Eq. (96)₁, le temps mesuré dans un référentiel n'est plus équivalent au temps mesuré dans l'autre.

Imaginons maintenant qu'à un temps donné, $t = t' = 0$, les origines des deux référentiels coïncident, et qu'une source située sur elles émet un rayon de lumière dans la direction commune des axes x, x' . Le rayon doit se propager à la même vitesse dans les deux référentiels; donc, les expressions:

$$\frac{x}{t} = c , \quad (97)$$

$$\frac{x'}{t'} = c \quad (98)$$

doivent être équivalentes, ainsi que leurs carrés:

$$\frac{x^2}{t^2} = c^2 , \quad (99)_1$$

$$\frac{x'^2}{t'^2} = c^2 . \quad (99)_2$$

Compte tenu des équations 96, l'équation (99)₂ devient:

$$\begin{aligned} \gamma^2(x - v_R t)^2 &= \xi^2(t - \eta x)^2 c^2 ; \\ (\gamma^2 - \xi^2 \eta^2 c^2)x^2 - 2(\gamma^2 v_R - \xi^2 c^2 \eta)xt' &= (\xi^2 c^2 - \gamma^2 v_R^2)t^2 . \end{aligned}$$

L'équivalence des équations (99)₁ et (99)₂ implique alors:

$$(\gamma^2 - \xi^2 \eta^2 c^2) = 1 ; \quad (100)$$

$$(\gamma^2 v_R - \xi^2 c^2 \eta) = 0 ; \quad (101)$$

$$(\xi^2 c^2 - \gamma^2 v_R^2) = c^2 . \quad (102)$$

La solution du système des équations 100-102 donne les valeurs des coefficients α, ξ et η ; plus spécifiquement:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} , \quad (103)$$

$$\xi = \gamma ,$$

$$\eta = \frac{v_R}{c^2} . \quad (104)$$

La nouvelle transformation de coordonnées est obtenue en insérant ces résultats dans les équations 96:

$$x' = \frac{x - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} ; \quad (105)$$

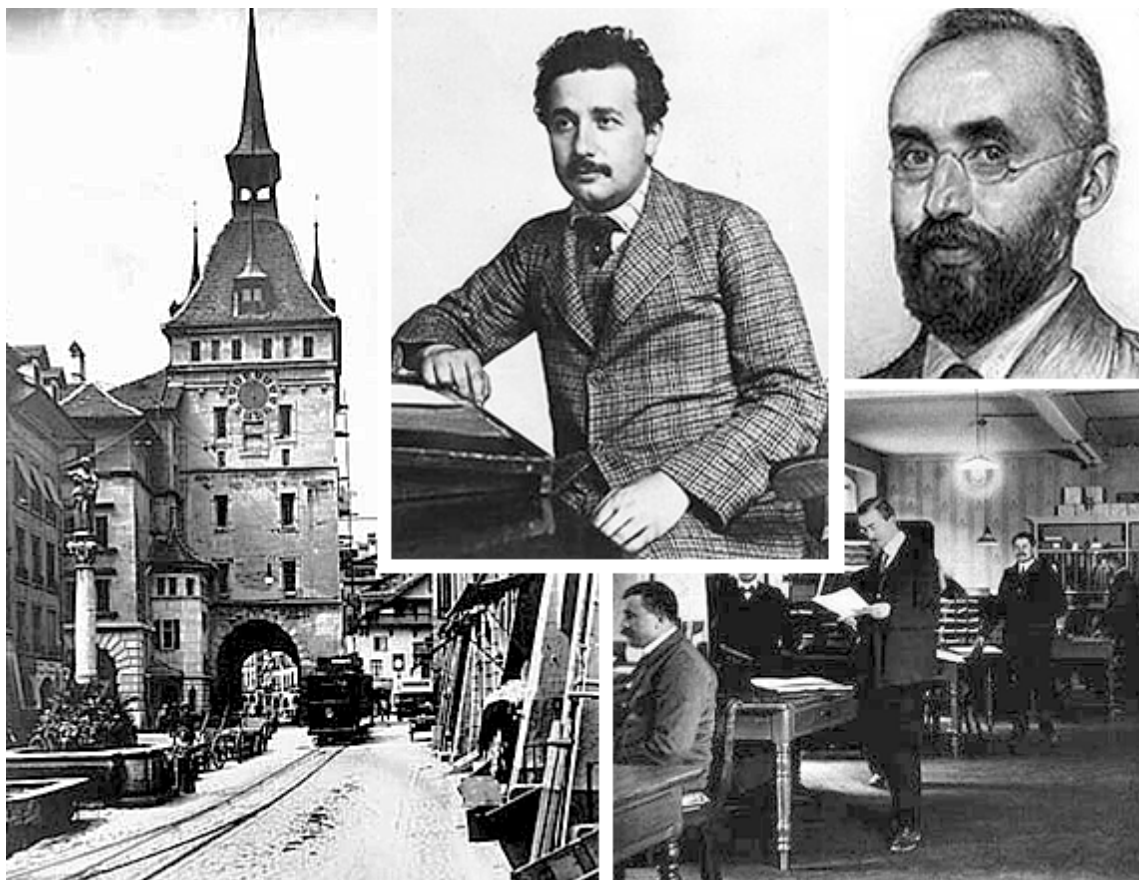
$$t' = \frac{t - \frac{v_R}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} . \quad (106)$$

Les équations 105 et 106 constituent la "transformation de Lorentz", qu'Einstein adopta au lieu de la transformation galiléenne des équations 81-83. La version "inverse" de la transformation est:

$$x = \frac{x' + v_R t'}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} ; \quad (107)$$

$$t = \frac{t' + \frac{v_R}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} . \quad (108)$$

La généralisation à trois dimensions est simple, parce que les deux autres coordonnées y et z ne sont pas affectées par le mouvement relatif des référentiels le long de l'axe x . Nous limiterons pourtant notre discussion au cas simple d'une seule dimension.



Les images de la naissance de la relativité: Albert Einstein dans son bureau de Berne, H. Lorentz (qui découvrit la "transformation de Lorentz"), la tour de l'horloge à Berne (proche de la maison d'Einstein), le Bureau des Brevets où Einstein travaillait.

V.2.1. Relativité et vitesses

Voyons maintenant quelques conséquences remarquables de la transformation de Lorentz. Tout d'abord, la loi de combinaison des vitesses: en utilisant les équations 105-108 pour expliciter les expressions $v = dx/dt$ et $v' = dx'/dt'$ on obtient:

$$v' = \frac{d(x - v_R t)}{d(t - v_R x/c^2)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v_R}{1 - (v_R/c^2) \frac{dx}{dt}},$$

c'est-à-dire:

$$v' = \frac{v - v_R}{1 - \frac{v v_R}{c^2}}; \quad (109)$$

cette loi de combinaison de vitesse a des propriétés très intéressantes: tout d'abord, si la vitesse dans le premier référentiel est celle de la lumière, $v = c$, alors la vitesse dans l'autre référentiel est aussi $v' = c$. Deuxièmement, dans la limite de basses vitesses, $v_R/c \ll 1$, on a $v' \approx v - v_R$, récupérant ainsi la loi galiléenne de l'Eq. 95.

Malgré cela, il est souvent difficile de "digérer" la combinaison des vitesses de l'Eq. 109: des exemples tels que la promenade dans le TGV semblent tellement simples et en faveur de la loi galiléenne de l'Eq. 95! On a de la peine à renoncer à celle-ci, qui semble conforme à notre expérience quotidienne!

Il faut alors se réfugier dans cette forteresse de la physique qu'est la méthode expérimentale. Nous devons prendre la théorie proposée, en déduire des résultats expérimentaux que la théorie précédente ne prévoit pas, et vérifier par des expériences laquelle des deux théories a raison. La réponse de centaines d'expériences est claire: la loi d'Einstein gagne.

V.2.2. Etonnantes prévisions de M. Einstein

Voyons maintenant quelques-unes des prévisions des transformations de Lorentz qu'on peut vérifier à l'aide d'expériences. Tout d'abord, ce qu'on appelle la "contraction de Lorentz": la longueur d'un objet paraît diminuer s'il est en mouvement par rapport au référentiel. Ce phénomène peut être dérivé des équations 105-108.

Supposons que l'objet se déplace le long de l'axe x du référentiel R , à la vitesse v_R . Observé dans un deuxième référentiel R' qui se déplace à la même vitesse v_R , l'objet n'a pas de mouvement. Appelons ce deuxième référentiel le "référentiel de l'objet"; et appelons L' la longueur mesurée dans le référentiel de l'objet.

Par définition, $L' = x_2' - x_1'$, où x_1' et x_2' sont les coordonnées des extrémités de l'objet mesurées à un certain temps. D'autre part, l'Eq. 105 donne:

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - v_R t}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}},$$

où L est la longueur de l'objet dans le référentiel R . Donc:

$$L = L' \sqrt{1 - v_R^2/c^2} ; \quad (110)$$

Il faut noter que $v_R < c$ (sinon la longueur L deviendrait imaginaire!), et que $L < L'$: la longueur mesurée dans R est contractée.

Cette contraction n'est pas du tout fantaisiste, ni même un effet "exotique". On peut l'observer facilement, et l'utiliser pour des applications pratiques. Par exemple, elle est à la base des techniques avancées de production des rayons X, c'est-à-dire des ondes électromagnétiques de très basse longueur d'onde, qu'on utilise en radiologie et pour plusieurs applications industrielles.

Considérons la Fig. 33: soumis à l'action d'une série d'aimants, un électron (particule élémentaire dotée de charge) "ondule" par rapport à une ligne droite et émet des ondes électromagnétiques. Leur longueur d'onde est déterminée par la période L' de la série d'aimants, dont la grandeur se situe dans le domaine des centimètres. Mais les longueurs d'onde de quelques millimètres ne correspondent pas aux rayons X (qui se situent de 10^{-8} à 10^{-11} m): il s'agit d'ondes radio.

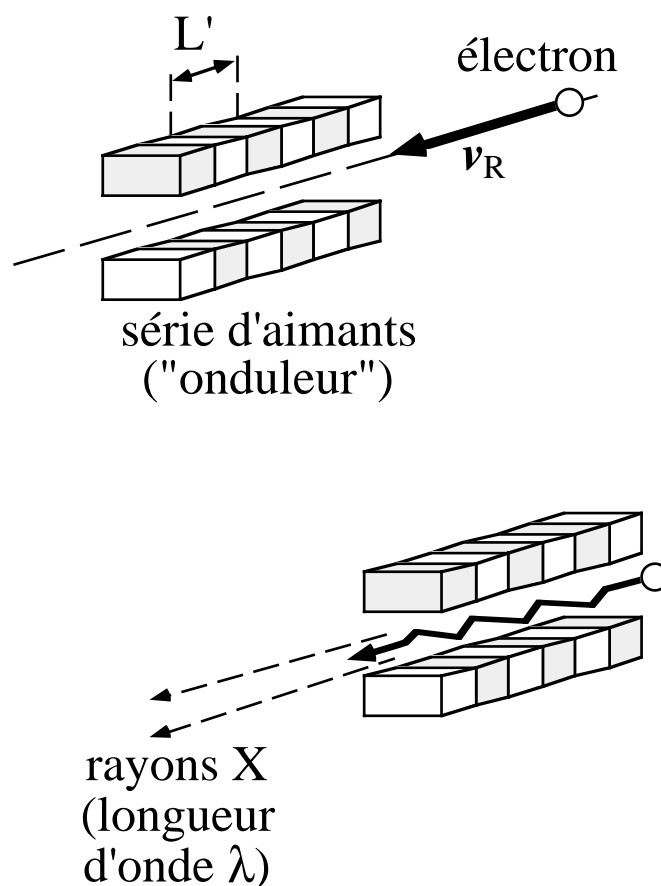
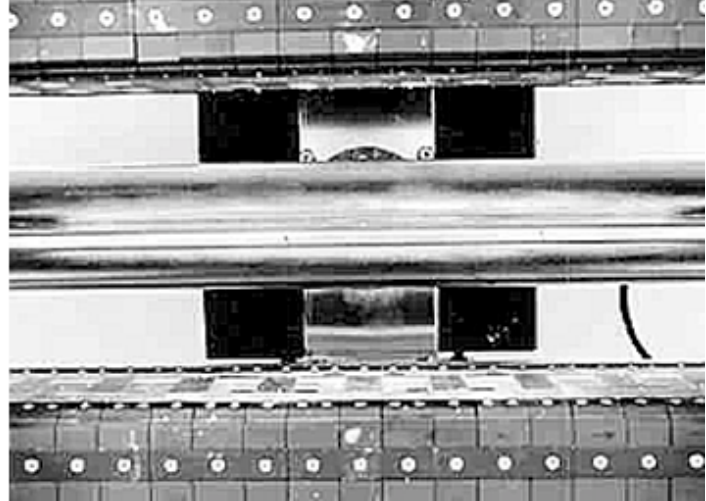
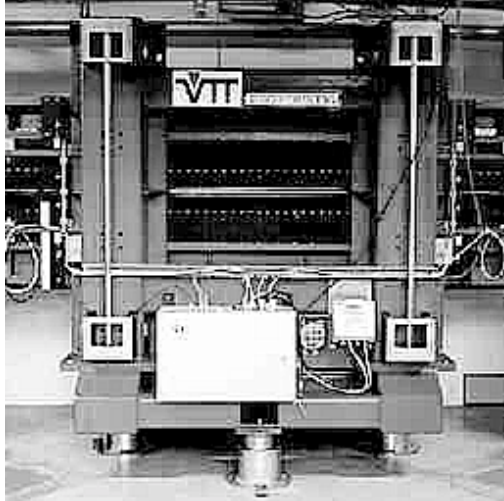


Fig. 33: Contraction de Lorentz appliquée à la production des rayons X: un dispositif de type "onduleur" dans une source de "lumière synchrotron".

Comme surmonter cet obstacle? La solution nous est fournie par la relativité et par la contraction de Lorentz. Supposons que l'électron se déplace à une vitesse v_R qui s'approche de celle de la lumière; du point de vue de l'électron, la série d'aimants se déplace à la vitesse $-v_R$, et sa période L' paraît se raccourcir en accord avec l'Eq. 110. De plus, les rayons X, étant émis par une source en mouvement (l'électron), sont soumis à

un deuxième effet relativiste: l'effet Doppler (que nous traiterons dans l'électromagnétisme). Cet effet raccourcit encore plus la longueur d'onde qu'on observe du point de vue du laboratoire, d'un facteur $\approx 2 \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)}$.



Deux images d'un onduleur au laboratoire de rayonnement synchrotron Max II à Lund, en Suède. Les onduleurs utilisent la relativité d'Einstein pour obtenir des faisceaux de rayons x de très haute intensité.

Globalement, donc, la longueur d'onde est $\lambda \approx 2L' (1 - (v_R^2/c^2))$, ce qui nous permet de transformer la grande période de la série d'aimants et d'obtenir les petites longueurs d'onde des rayons X. Des dispositifs du type illustré par la Fig. 33 sont utilisés par plusieurs laboratoires dans le monde; on les appelle "onduleurs", et leur émission s'appelle "lumière synchrotron".

Passons maintenant à une autre prévision étonnante, mais vérifiable, de la transformation de Lorentz: l'expansion de la durée d'un phénomène. Supposons que nous observons un phénomène qui a lieu à l'origine du référentiel R' en mouvement. Et supposons également que la durée du phénomène est $T' = t_2' - t_1'$.

Quelle est la durée T mesurée dans le référentiel R , par rapport auquel R' se déplace à vitesse v_R ? Utilisons la transformation de Lorentz (Eq. 108) pour $x = 0$, obtenant: $T = t_2 - t_1 = (t_2' - t_1') / \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)}$, c'est-à-dire:

$$T = T' / \sqrt{1 - (v_R^2/c^2)} \quad , \quad (111)$$

qui correspond à une expansion de la durée. Imagination folle de scientifiques rêveurs? Pas du tout: il s'agit d'un phénomène facilement observable.

Par exemple, le "temps de vie" de certaines particules élémentaires de la famille des mésons, c'est-à-dire le temps moyen jusqu'à leur destruction spontanée, est très court. Cela crée un grave problème: les rayons cosmiques produisent ces particules dans la haute atmosphère, et on peut les observer jusqu'au niveau de la mer; mais comment est-ce possible, vu que leur temps de vie est trop court pour leur permettre d'arriver au sol? La solution de ce paradoxe est que les particules en question se déplacent à très grande vitesse, donc que leur temps de vie est sujet à l'expansion relativiste.

V.2.3. Mécanique à la Einstein

Passons maintenant de la cinématique à la dynamique, afin de découvrir deux autres conséquences fondamentales de la relativité spéciale: la variation de la masse en fonction de la vitesse et la célèbre relation entre masse et énergie. Prenons l'expérience élémentaire illustrée par la Fig. 34: deux masses ponctuelles égales m qui, ayant des vitesses de la même grandeur mais dans des directions opposées, se heurtent et forment une seule masse double $2m$.

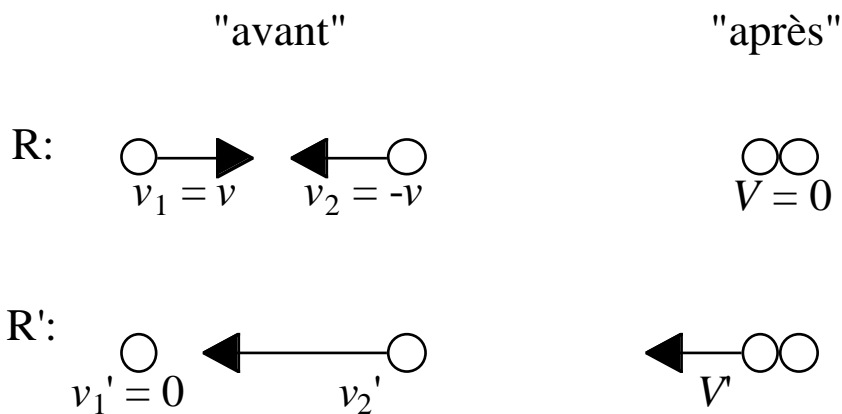


Fig. 34: L'analyse d'un phénomène de collision très simple nous amène à la définition de masse en relativité.

Dans le référentiel R, la quantité de mouvement totale des deux particules se conserve, comme nous le verrons dans le prochain chapitre. En fait, avant la collision, la somme des quantités de mouvement est $mv - mv = 0$; après la collision, elle est $2m \times 0 = 0$. Cette loi fondamentale de conservation ne doit pas changer d'un référentiel d'inertie à l'autre.

Mais attention: passons maintenant au référentiel R' qui se déplace avec la première particule, de manière que $v_R = v$ et $v_1' = 0$. Si nous utilisons la loi d'Einstein pour la combinaison des vitesses, nous obtenons:

$$v_2' = \frac{-v - v}{1 - (-v)(v)/c^2} = -2 \frac{v}{1 + v^2/c^2}, \text{ et}$$

$$V' = \frac{0 - v}{1 - (0 \times v)/c^2} = -v.$$

Maintenant, si nous essayons d'obtenir la loi pour les quantités de mouvement en multipliant ces vitesses par m et $2m$, les résultats sont $-2mv/(1 + v^2/c^2)$ avant la collision et $-2mv$ après: plus de conservation de la quantité de mouvement totale, en conflit avec l'hypothèse de base de la relativité!

Où est le problème? Nous l'avons créé en multipliant, dans le référentiel R', les vitesses par les masses m et $2m$, c'est-à-dire en faisant l'hypothèse que les masses ne changent pas en changeant de référentiel. Il faut donc renoncer à cette hypothèse.

Le problème est éliminé si l'on suppose par contre que la masse d'une particule dépend de sa vitesse v selon la loi:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (112)$$

où la constante m_0 correspond évidemment à la masse dans le cas de vitesse nulle, c'est-à-dire à la masse mesurée dans le référentiel de la particule. Notons, une fois de plus, l'incompatibilité de cette équation avec des valeurs de la vitesse plus élevées que c , qui donnent des masses imaginaires.

La vérification que l'Eq. 112 élimine le problème discuté ci-dessus n'exige qu'une série de passages mathématiques élémentaires mais soporifiques, dont nous nous dispenserons volontiers. Essayons, par contre, de découvrir quelques conséquences intéressantes de cette équation. Tout d'abord, on retrouve de nouveau la situation de la physique "classique", c'est-à-dire celle de masse constante, si la vitesse est peu élevée par rapport à celle de la lumière. Prenons, par exemple, un électron dont la masse m_0 est de 9×10^{-31} kg environ. Si on le met en mouvement avec une pile de 9 volt, il atteint une vitesse de 2×10^6 m/s environ, qui donne $v^2/c^2 \approx 2 \times 10^{-5}$, et donc une correction minime de la masse par rapport à m_0 .

Si, par contre, l'on prend un des électrons qui circulent dans les grands accélérateurs de particules au CERN à Genève, la correction est beaucoup plus importante. Considérons, par exemple, la situation de l'accélérateur LEP au 19 juillet 1996, avec un faisceau d'électrons d'énergie ≈ 75 gigaélectronvolts. Dans ce cas, la vitesse des électrons est très proche de celle de la lumière: la différence ne dépasse pas 2×10^{-9} %. Le facteur $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ est $1,5 \times 10^5$ environ, et la masse des électrons augmente jusqu'à $\approx 10^{-25}$ kg, dépassant de deux ordres de grandeur celle d'un atome d'hydrogène!

La définition relativiste de la masse a des conséquences importantes sur les équations de la dynamique. Nous avons discuté deux formes de la loi fondamentale, l'Eq. 3 ($f = ma$) et l'Eq. 47 (qui à une dimension devient $f = dp/dt$). Ces deux formes sont tout-à-fait équivalentes si la masse est une constante. Mais elles ne le sont plus si l'on adopte la définition de masse de l'Eq. 112.

Entre les deux, il faut choisir l'Eq. 47: la loi fondamentale de la dynamique relativiste (à une dimension) est:

$$f = \frac{dp}{dt} , \quad (113)$$

où:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (114)$$

Passons maintenant à l'énergie: nous sommes sur le point de découvrir une des conséquences les plus intéressantes et célèbres de la relativité. Comment peut-on calculer les changements d'énergie cinétique? A une dimension, l'Eq. 62 donne $dK = f dx$. Avec l'Eq. 113, on modifie celle-ci obtenant: $dK = (dp/dt)dx = dp (dx/dt) = v dp$. L'intégrale de cette expression à partir de $p = 0$ donne l'énergie cinétique totale:

$$K = \int_0^p v^* dp^* = \int_0^p d(p^* v^*) - \int_0^p p^* dv^* =$$

$$\begin{aligned}
&= pv - \int_0^v \frac{m_0 v^* dv^*}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}} \right]_0^v \\
&= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 ,
\end{aligned}$$

qu'on peut également écrire:

$$K = mc^2 - m_0 c^2 .$$

Cette équation est interprétée de la manière suivante: l'énergie *totale* d'une masse ponctuelle libre, mc^2 , se compose de deux termes: l'énergie cinétique K et l'énergie propre de la masse m_0 , qui est $m_0 c^2$:

$$\text{Energie relativiste totale} = E = mc^2 = K + m_0 c^2 ; \quad (115)$$

l'existence de l'énergie $m_0 c^2$ liée à la masse m_0 est effectivement l'un des résultats fameux de la théorie d'Einstein. A titre d'exemple, l'énergie "propre" d'un électron est $m_0 c^2 \approx 9 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 8 \times 10^{-14}$ joule. Pour nous-mêmes (m_0 de l'ordre de 10^2 kg) elle est $\approx 9 \times 10^{18}$ joule. Donc, elle suffirait à faire fonctionner une lampe de 100 W pendant 2,8 milliards d'années!

Il faut noter que pour les basses vitesses, $(v^2/c^2) \ll 1$, on peut remplacer approximativement $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ par $(1 + (v^2/2c^2))$, et l'Eq. 115 par $K \approx m_0(1 + (v^2/2c^2) - 1)c^2 = m_0 v^2/2$, retrouvant ainsi, à la limite, le résultat non relativiste.

V.2.4. Transformation de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement

Supposons que nous mesurons l'énergie et la quantité de mouvement d'une masse ponctuelle, selon les définitions des équations 114 et 115, dans deux référentiels d'inertie différents. Quelles sont les relations entre les résultats obtenus dans le premier référentiel et ceux obtenus dans le deuxième?

Nous répondrons à cette question, toujours dans le cas particulier d'une dimension, en considérant l'énergie E et la quantité de mouvement p le long de l'axe x pour le premier référentiel, ainsi que les quantités correspondantes E' et p' dans le deuxième. La réponse peut être facilement obtenue en écrivant les équations 114 et 115 tant pour le premier que pour le deuxième référentiel et en utilisant ensuite les équations 112 (définition de la masse) et 109 (transformation de la vitesse). Le résultat final est:

$$p' = \frac{p - \left(\frac{E}{c^2}\right)v_R}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}}$$

$$\left(\frac{E'}{c^2}\right) = \frac{\left(\frac{E'}{c^2}\right) - \frac{v_R}{c^2} p}{\sqrt{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}}. \quad (116)$$

Il faut noter que ces règles de transformation sont exactement les mêmes que les transformations de Lorentz (équations 105 et 106), si l'on remplace x et t par p et E/c^2 , et x' et t' par p' et E'/c^2 .

Le Coin Yankee:

<i>Référentiel</i>	<i>Reference frame</i>
<i>Référentiel d'inertie</i>	<i>Inertial reference frame</i>
<i>Force d'inertie</i>	<i>Inertial force</i>
<i>Force apparente</i>	<i>Apparent force</i>
<i>Force centrifuge</i>	<i>Centrifugal force</i>
<i>Relativité</i>	<i>Relativity</i>
<i>Onduleur</i>	<i>Undulator</i>
<i>Lumière synchrotron</i>	<i>Synchrotron light</i>

“This analysis leads us to discover a deep difference between two types of reference frames: those in which only “real” forces are present, and those in which one has also apparent forces. The reference frames of the first type are called “inertial frames”. It is evident that all inertial frames move one with respect to the other with constant velocity.”

VI. Systèmes de masses ponctuelles: autres lois de conservation

La notion de masse ponctuelle nous a aidé à comprendre les propriétés de base de la mécanique. Il faut pourtant admettre qu'il s'agit d'une notion assez éloignée de la réalité: les objets proches de nous, y compris nous-mêmes, sont beaucoup plus compliqués. Il faut donc tout d'abord analyser les lois de la mécanique pour des systèmes complexes, à commencer par les ensembles de masses ponctuelles, qui fournissent un bon modèle pour le comportement d'un gaz.

Le problème est apparemment d'envergure. Nous verrons en thermodynamique que l'ordre de grandeur du nombre de particules dans une bouteille de gaz est déterminé par le "nombre d'Avogadro", 6×10^{23} . Cette grandeur effrayante rend impossible le calcul de la trajectoire de chacune des particules du gaz. Il faut alors traiter le problème en considérant les propriétés globales du système et en analysant leur évolution.



Amedeo Avogadro

Il existe deux types de quantités globales: celles de caractère statistique, comme la température, et celles qui n'ont pas ce caractère, par exemple la position du centre de gravité que nous allons discuter sous peu. Les quantités de caractère statistique sont traitées par la thermodynamique; leur utilisation implique que les fluctuations statistiques soient limitées, ce qui à son tour exige que le système comprenne un nombre assez grand de particules. Par contre, les quantités qui ne sont pas de type statistique seront analysées dans le cadre de la mécanique des ensembles de masses ponctuelles, qui peut être appliquée même à des systèmes ne comprenant qu'un très petit nombre de particules.

VI.1. Forces internes et forces externes: conservation de la quantité de mouvement

Le comportement d'un ensemble de masses ponctuelles est compliqué parce qu'en général, les particules ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; elles interagissent à cause de forces telles que la force de gravitation entre leurs masses ou les forces électromagnétiques causées par leurs charges électriques. Il faut alors distinguer les forces internes du système de particules des forces externes. Une force agissant sur une masse ponctuelle est "interne" si elle est causée par d'autres masses ponctuelles appartenant au système.

Mais comment peut-on transférer cette définition quelque peu philosophique sur le plan pratique, c'est-à-dire celui des mesures? Prenons, par exemple, les forces de gravité: la force agissant entre deux masses ponctuelles peut être dérivée de l'Eq. 9: $F =$

$G mM/R^2$. Le point important est que la grandeur de cette force diminue si la distance augmente. On peut alors identifier les forces internes du type gravitation par la procédure suivante: on éloigne une particule de l'ensemble, en laissant les autres inchangées, et on mesure les changements de forces qui agissent sur celles-ci, identifiant ainsi les forces internes causées par la particule qu'on a éloignée. Ensuite, on répète la même procédure pour chacune des particules de l'ensemble.

Supposons maintenant que les particules sont chargées électriquement: elles produiront alors des forces électromagnétiques telles que la force de Coulomb et la force de Lorentz. Celles-ci ont aussi la propriété de diminuer en fonction de la distance, ce qui nous permet d'adopter une procédure similaire. Cette propriété (valable pour toutes les forces sauf certaines interactions qu'on trouve dans l'étude des particules élémentaires) a joué un rôle fondamental dans le développement de la science. Par exemple, elle nous permet d'"isoler" du reste de l'univers le système spécifique auquel nous sommes intéressés, ce qui nous permet ensuite d'en simplifier l'analyse: sans cette simplification, il serait impossible d'identifier les propriétés élémentaires des systèmes, et la recherche scientifique deviendrait également impossible.

Nous sommes maintenant prêts à découvrir la première des propriétés fondamentales des ensembles de particules: la conservation de la quantité de mouvement totale. Nous avons déjà discuté cette propriété en analysant la Fig. 34 afin de dériver la forme relativiste de la masse. Il faut souligner les deux points suivants: (1) le phénomène de la Fig. 34 n'est produit que par des forces internes au système des deux particules; (2) ces forces ne sont pas en mesure de produire un changement de la quantité de mouvement totale du système (qui, par exemple, dans le référentiel R est toujours nulle).

Supposons alors que la force (interne) causée par la particule "1" sur la particule "2" soit f_{12} , et vice-versa f_{21} ; l'Eq. 47 donne alors:

$$f_{12} = \frac{dp_2}{dt} , \quad (117)$$

$$f_{21} = \frac{dp_1}{dt} , \quad (118)$$

où p_1 et p_2 sont les quantités de mouvement des deux particules. La somme des deux équations 117 et 118 donne:

$$f_{12} + f_{21} = \frac{dp_2}{dt} + \frac{dp_1}{dt} = \frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = 0 ;$$

$$f_{12} = -f_{21} ; \quad (119)$$

donc, la force appliquée par la première particule sur la deuxième doit être de grandeur égale et s'exercer dans la direction opposée par rapport à celle appliquée par la deuxième sur la première. Cette propriété constitue la première partie du "principe d'action et réaction" de Newton.

Prenons maintenant un système de N masses ponctuelles et appelons p_i la quantité de mouvement (vecteur) de la i-ème particule. Supposons que le système n'est pas soumis à des forces externes. On peut alors appliquer l'analyse qui nous a amenés à l'Eq. 119 à chaque paire de particules, puis faire la somme de tous les résultats, obtenant:

$$0 = \sum_1^N \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_1^N p_i ,$$

équation qu'on peut écrire:

$$\frac{dP}{dt} = 0 , \quad (120)$$

où par définition:

$$P = \sum_1^N p_i \quad (121)$$

est la quantité de mouvement totale du système.

Les équations 120 et 121 constituent la généralisation de la propriété de conservation de la Fig. 34: un système isolé, c'est-à-dire non soumis à des forces externes, a une quantité de mouvement totale constante. Cette propriété est le "principe de conservation de la quantité de mouvement".

On peut constater les conséquences de ce principe partout dans la vie quotidienne: le fonctionnement d'un avion ou d'un missile, la dynamique des particules créées par une explosion, le recul d'un fusil ou d'un canon, la "force" qui nous "pousse en arrière" quand nous jetons un objet lourd, n'en sont que quelques exemples.

Ajoutons maintenant à notre analyse les forces externes, que nous avons jusqu'à maintenant supposées nulles. Il est assez facile de réaliser que l'Eq. 120 doit être changée de la manière suivante:

$$\frac{dP}{dt} = F^e , \quad (122)$$

où par définition:

$$F^e = \sum_1^N f_i^e \quad (123)$$

est la force externe totale sur le système, c'est-à-dire la somme (vectorielle) des forces externes agissant sur les particules individuelles.

En résumé, la quantité de mouvement totale d'un ensemble de masses ponctuelles ne peut être modifiée que par des forces externes, de la manière spécifiée par l'Eq. 122; sans forces externes, la quantité de mouvement totale se conserve.

VI.2. Centre de gravité et ses propriétés

Les propriétés de la quantité de mouvement totale d'un ensemble de masses ponctuelles peuvent être exprimées en utilisant une notion qui se révèle très utile pour résoudre des problèmes pratiques: la notion de centre de gravité. Par définition, le centre de gravité de l'ensemble est un point géométrique dont la position est:

$$R_c = \frac{\sum_1^N m_i r_i}{M} , \quad (124)$$

où m_i et r_i sont la masse et le vecteur position de la i -ème particule du système et:

$$M = \sum_1^N m_i \quad (125)$$

est la masse totale.

L'utilité de la définition de centre de gravité devient claire si l'on prend la dérivée seconde par rapport au temps de sa position, après avoir remarqué que $m_i v_i = p_i$ est la quantité de mouvement de la i -ème particule. Nous avons alors:

$$\frac{d^2 R_c}{dt^2} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} \sum_1^N m_i r_i}{M} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_1^N p_i}{M} = \left(\frac{1}{M} \right) \frac{dP}{dt} ,$$

d'où on obtient:

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F^e ; \quad (126)$$

on peut alors dire que le centre de gravité de l'ensemble de particules se comporte comme une masse ponctuelle, équivalente à la masse totale, soumise à l'action de la force externe totale. Si celle-ci est nulle, alors le centre de gravité se déplace à vitesse constante.

Cette propriété remarquable forme un peu la base de la notion de masse ponctuelle. Celle-ci est, en effet, une notion idéalisée: même les particules élémentaires - notamment les électrons - ne sont pas des points géométriques. Mais en ce qui concerne leur quantité de mouvement, on peut les traiter sur la base des propriétés du centre de gravité, qui se comporte comme notre mythique "masse ponctuelle". Les exceptions à cette règle sont liées au moment cinétique, que nous discuterons par la suite.

VI.3. Moment cinétique et sa loi de conservation

Etant donné un ensemble de masses ponctuelles, prenons un point de référence et calculons le moment cinétique de la i -ème masse par rapport à celui-ci. L'Eq. 52 donne:

$$r_i \times f_i = \frac{dL_i}{dt} , \quad (127)$$

où f_i est la force totale (somme vectorielle des forces internes et externes) agissant sur la i -ème masse; r_i est le vecteur position de celle-ci par rapport au point de référence (notez que tant le moment de la force que le moment cinétique doivent avoir le même point de référence!).

Faisons maintenant la somme vectorielle de toutes les équations du type de l'Eq. 127 pour toutes les particules de l'ensemble. La somme des dérivées des moments cinétiques est équivalente à la dérivée de la somme de ceux-ci, c'est-à-dire à dL/dt , où:

$$L = \sum_1^N L_i \quad (128)$$

est par définition le moment cinétique total du système.

La somme des moments des forces doit être analysée en tenant compte d'une autre propriété des forces internes, qui est illustrée par la Fig. 35 dans le cas d'une paire de particules. La première partie du "principe d'action et réaction" de Newton (Eq. 119) n'est pas en mesure de préciser la direction des forces internes de la paire de particules, même si leurs directions sont opposées et les grandeurs égales. La partie supérieure de la Fig. 35 montre, en effet, comment ces conditions peuvent être satisfaites par trois choix différents de directions.

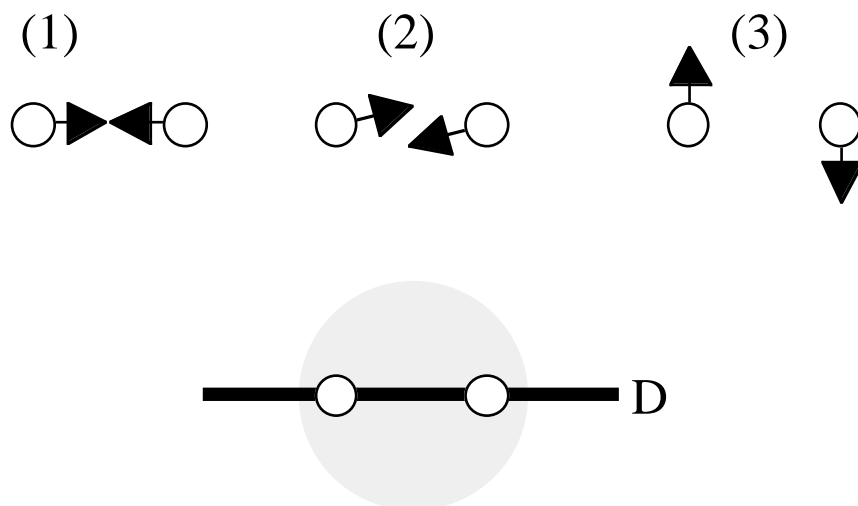


Fig. 35: Analyse des propriétés des directions des forces internes d'un système de deux masses ponctuelles.

La partie inférieure de cette même figure analyse la *symétrie géométrique* du système. Celle-ci est équivalente à la symétrie sphérique (zone ombrée), sauf pour la présence d'une seule direction "spéciale": celle qui relie les deux masses ponctuelles (D).

Nous devons alors utiliser notre intuition afin d'arriver à la réalisation suivante: la symétrie des forces internes du système ne peut pas "inventer" des symétries inexistantes dans le système. Les cas (2) et (3) supposent des forces dans des directions qui ne sont pas justifiées par la symétrie de base du système. Donc, on est obligé de choisir la direction (1), c'est-à-dire la direction D.

Nous pouvons maintenant compléter le "principe d'action et réaction" en disant que la direction des deux forces internes d'une paire de masses ponctuelles doit être celle de la ligne qui les relie.

Cette propriété a une conséquence importante en ce qui concerne les moments des forces. Considérons la Fig. 36: on y voit une paire de masses ponctuelles avec leurs forces internes, les vecteurs position et les angles nécessaires afin de calculer les produits vecteurs des moments des deux forces, $r_a \times f_a$ et $r_b \times f_b$.

Les grandeurs de ces deux moments sont $r_a f_a \sin \theta_a$ et $r_b f_b \sin \theta_b$; ces deux grandeurs sont égales, vu que les grandeurs des forces sont égales et que $r_a \sin \theta_a$ comme $r_b \sin \theta_b$ donnent la longueur du segment r . Il est facile de vérifier que les deux moments sont dans deux directions opposées. Conclusion: la somme des deux moments est nulle.

On peut répéter la même analyse pour toutes les paires de masses ponctuelles, et en conclure que le moment total des forces internes agissant sur les particules de

l'ensemble est nul. Donc, la somme des moments des forces est équivalente à la somme des moments des forces externes, Ω^e . En résumé, la somme des équations 127 donne:

$$\Omega^e = \frac{dL}{dt}, \quad (129)$$

où:

$$\Omega^e = \sum_1^N r_i \times f_i^e. \quad (130)$$

Dans le cas particulier de forces externes nulles ou de moment total nul de ces forces externes, l'Eq. 129 prévoit que le moment cinétique total du système ne peut pas changer. En particulier, le moment cinétique total est constant pour un système isolé. Nous avons donc trouvé une autre loi fondamentale de conservation.

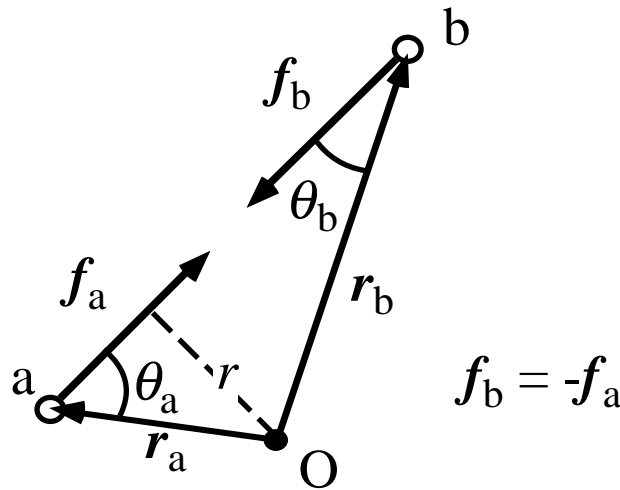


Fig. 36: Annulation mutuelle des moments des forces internes d'un système de deux masses ponctuelles.

Il faut noter que l'Eq. 129 a été dérivée en utilisant comme point de référence des moments (forces et moments cinétiques) l'origine d'un référentiel, qui doit évidemment être un référentiel d'inertie. On peut aussi prendre comme point de référence un point quelconque qui n'a pas de mouvement dans un référentiel d'inertie. De plus, il existe un autre point par rapport auquel on peut calculer les moments sans compromettre la validité de l'Eq. 129: le centre de gravité (qui n'est pas toujours un point immobile d'un référentiel d'inertie).

Ce dernier point peut se déduire en prenant le moment cinétique total par rapport au centre de gravité (ayant appelé $r_i^c = -R_c + r_i$ la position de la i -ème particule par rapport au centre de gravité, où r_i et R_c sont les positions de la i -ème particule et du centre de gravité dans un référentiel d'inertie): $L = \sum_i L_i = \sum_i r_i^c \times p_i = \sum_i (-R_c + r_i) \times p_i$. La dérivée donne: $(dL/dt) = (d/dt)(\sum_i (-R_c + r_i) \times p_i) = (-dR_c/dt) \times \sum_i p_i - R_c \times (d/dt)\sum_i p_i + (d/dt)(\sum_i (r_i \times p_i))$; or, le premier terme est nul (voir la définition de centre de gravité). Utilisant l'Eq. 122, le deuxième peut être écrit $-R_c \times (d/dt)\sum_i p_i = -R_c \times F^e = \sum_i (-R_c \times f_i^e)$. Quant au troisième, les équations 129 et 130 donnent $(d/dt)(\sum_i (r_i$

$\times p_i) = \Omega^e = \sum_i r_i \times f_i^e$. En résumé, $(dL/dt) = \sum_i (-R_c \times f_i^e) + \sum_i r_i \times f_i^e = \sum_i (-R_c + r_i) \times f_i^e = \sum_i r_i^c \times f_i^e$, et on retrouve l'Eq. 129.

Les équations 122 et 129 constituent les lois fondamentales de la dynamique des ensembles de particules. Les mêmes équations sont évidemment valables pour un solide (qui, à la limite, est un ensemble d'atomes). Nous verrons plus loin que le rôle joué par les équations 122 et 129 est toutefois un peu différent pour les solides que pour les autres ensembles de masses ponctuelles.

VI.4. Phénomènes du type "choc"

Les lois fondamentales dérivées des équations 122 et 129 dans le cas des systèmes isolés sont particulièrement utiles pour l'analyse des phénomènes de "choc". Il s'agit de phénomènes dans lesquels une interaction rapide à courte distance entre plusieurs particules change leur état de mouvement. On essaie de prévoir ou justifier les changements sans entrer dans les détails - normalement très compliqués et au niveau atomique - des interactions, et d'utiliser principalement les lois de conservation. Notons que, des trois lois qu'on peut en principe utiliser pour un système isolé, deux (quantité de mouvement totale, moment cinétique total, équations 122 et 129) sont toujours valables; la troisième, c'est-à-dire la conservation de l'énergie mécanique, n'est valable et utilisable que si les forces internes sont toutes conservatives.

Nous analyserons deux exemples spécifiques de phénomènes de choc, afin de comprendre comment les traiter sur le plan théorique. Le premier (voir la Fig. 37) est un phénomène simplifié du type "billard" (nous négligerons pour l'instant la rotation des boules, en les traitant comme des masses ponctuelles). Les données du problème sont assez évidentes (voir la partie de la figure concernant la situation "avant" (le choc)). De plus, nous ferons l'hypothèse que l'énergie mécanique totale est conservée.

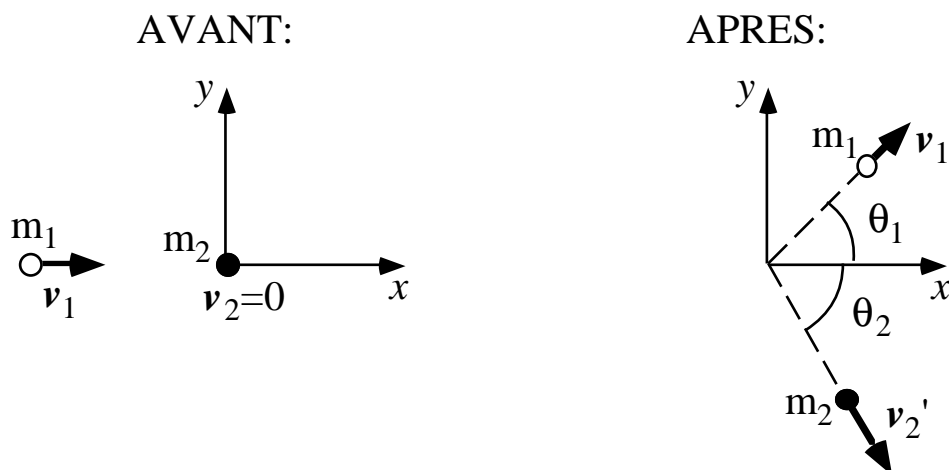


Fig. 37: Phénomène de choc à deux dimensions du type "billard", avec conservation de l'énergie mécanique totale.

Le problème consiste à trouver les grandeurs et les directions des vitesses après le choc. La conservation du moment cinétique total ne contribue pas, cette fois, à la solution du problème, puisqu'il est évident que le moment par rapport à l'origine est, et demeure, nul.

La conservation de l'énergie mécanique donne:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} ; \quad (131)$$

en ce qui concerne la conservation de la quantité de mouvement totale:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2 ; \quad (132)$$

$$m_1 v_1 \sin \theta_1 = m_2 v_2' \sin \theta_2 . \quad (133)$$

La solution du système d'équations 131-133 peut être utilisée pour trouver grandeurs et directions des vitesses après la collision. Il faut toutefois noter que ces trois équations ne sont pas suffisantes pour déterminer ces quatre inconnues; il nous faut une autre donnée, par exemple la direction d'une des particules suite au choc.

Dans le cas particulier de collision à une dimension ($\theta_1 = \theta_2 = 0$), on peut trouver la solution des équations 131 et 132, qui donne $v_1' = ((m_1 - m_2)/(m_1 + m_2))v_1$ et $v_2' = (2m_1/(m_1 + m_2))v_1$.

Supposons maintenant que le phénomène de choc n'est pas du type "billard", mais plutôt du type "balle de fusil" (voir la Fig. 38). Après le choc, les deux particules se fondent et se déplacent comme une seule particule de masse égale à la somme des masses initiales. Il est facile de réaliser que l'énergie mécanique totale ne se conserve pas: quelle est alors la fraction qui est perdue (ou mieux, comme nous le verrons en thermodynamique, transformée)?

La conservation de la quantité de mouvement est toujours valable, donc: $m_1 v = (m_1 + m_2)v'$, et $v' = (m_1/(m_1 + m_2))v$. L'énergie mécanique change de $m_1 v^2/2$ à $(m_1 + m_2)v'^2/2 = (m_1 + m_2)(m_1/(m_1 + m_2))^2 v^2/2 = (m_1^2/(m_1 + m_2))v^2/2$, avec une perte de $m_1 v^2/2 - (m_1^2/(m_1 + m_2))v^2/2 = (m_1 m_2/(m_1 + m_2))v^2/2$. La fraction perdue est donc $m_2/(m_1 + m_2)$.

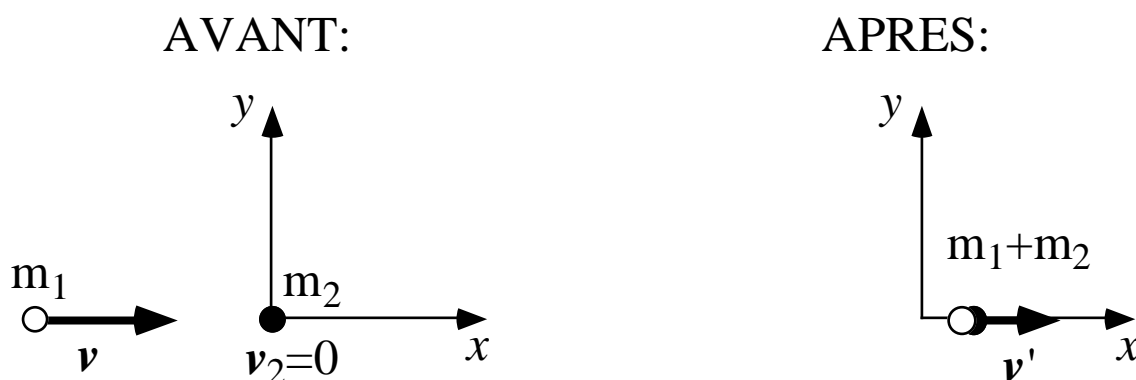


Fig. 38: Phénomène de choc du type "balle de fusil", sans conservation de l'énergie mécanique totale.

Les phénomènes de choc jouent un rôle important dans l'étude des systèmes physiques, surtout les plus petits tels que les atomes, les noyaux et les particules élémentaires: à cause de leur structure complexe, ces microsystèmes ne se comportent pas comme des masses ponctuelles. Ils peuvent alors être "bombardés" avec d'autres particules (électrons, photons, protons etc.), et du comportement de celles-ci on peut déduire la structure microscopique de l'objet bombardé. La procédure est similaire à

celle que nous adoptons spontanément, par exemple, pour “voir” un objet: nous le bombardons avec des “photons” et utilisons nos yeux pour étudier leur comportement.

Le Coin Yankee:

Forces internes *Internal forces*
Forces extérieures *External forces*
Système isolé *Isolated system*
Principe d'action *Action and*
et réaction *reaction principle*
Centre de gravité *Center of gravity*
Symétrie *Symmetry*
Choc *Shock*

“One can then say that the center of gravity of the particle system behaves like a point-mass, equivalent to the total mass and subject to the action of the total external force. If the total external force is zero, then the center of gravity moves at constant velocity”.

VII. Solides: équilibre et mouvement

On peut résumer les principaux résultats du chapitre précédent en disant que l'étude des ensembles de particules se base sur deux lois fondamentales, celle de la quantité de mouvement totale (Eq. 122) et celle du moment cinétique total (Eq. 129). Dans des cas particuliers, on peut ajouter la loi de conservation de l'énergie mécanique totale.

Les équations 122 et 129 sont des équations vectorielles, donc chacune équivaut à trois équations scalaires, et les deux ensemble équivalent à six équations scalaires. La conservation de l'énergie mécanique totale est une équation scalaire. Au plus, donc, cette approche nous fournit sept équations scalaires; vu que la conservation de l'énergie mécanique n'est pas toujours garantie, on ne peut compter en général que sur six équations scalaires.

Cela n'est presque rien par rapport au nombre typique de variables. L'état d'un ensemble de particules (masses ponctuelles) est défini par la position et par la vitesse de chacune des particules: il s'agit de deux quantités vectorielles, soit six quantités scalaires pour chaque particule. Pour une bouteille de gaz, le nombre typique de particules est déterminé par le nombre d'Avogadro: en multipliant celui-ci par six, on obtient un nombre énorme de variables, face auquel les six équations scalaires 122 et 129 ne sont qu'une arme minuscule.

Il faut donc renoncer à étudier le comportement de chaque particule d'un ensemble, et se contenter d'en analyser les propriétés globales, par exemple la position et la vitesse du centre de gravité. Heureusement, cette approche est suffisante pour résoudre une grande partie des problèmes pratiques.

Considérons maintenant une importante famille d'ensembles de particules, pour laquelle le nombre d'équations et de variables sont beaucoup plus équilibrés. Il s'agit de la famille des "corps solides". Il faut souligner que nous ne traiterons pas des corps solides réalistes au niveau microscopique, c'est-à-dire des systèmes d'atomes qui, bien que reliés par des liaisons chimiques, sont toujours affectés par des vibrations thermiques au niveau atomique et ne sont donc pas complètement rigides.

Nos "corps solides" seront des objets idéalisés, des ensembles de particules d'une rigidité absolue: la distance entre deux particules quelconques ne change pas. Cette condition diminue le nombre de variables indépendantes du système, parce que la position et la vitesse de chaque particule sont liées aux positions et aux vitesses de toutes les autres particules. Cela doit évidemment diminuer le déséquilibre entre les six équations scalaires 122 et 129 et le nombre de variables indépendantes. Voyons alors quelle est l'importance de cette diminution, à l'aide de la Fig. 39.

La question à laquelle il s'agit de répondre est essentiellement la suivante: quel est le nombre de coordonnées (scalaires) nécessaires pour spécifier la position d'un solide (et, en donnant leur dépendance du temps, pour décrire son mouvement)? Analysons le problème à partir de la Fig. 39a: on peut commencer à donner la position du point P_1 , par ses trois coordonnées (x_1, y_1, z_1) .

Ensuite (Fig. 39b), on précise la position du point P_2 . On n'a pas besoin de trois coordonnées supplémentaires, parce que la variabilité de la position de P_2 est réduite si l'on a fixé la position de P_1 . La rigidité du solide exige en effet que la distance δ entre P_1 et P_2 soit constante. Donc, P_2 ne peut se trouver que sur une surface sphérique de rayon δ , centrée sur P_1 . Or, la position d'un point sur une surface est précisée avec deux coordonnées (pensez, par exemple, à la longitude et à la latitude sur la surface de la Terre). Le nombre total de coordonnées pour les points P_1 et P_2 est donc 5.

Passons maintenant à la Fig. 39c, où l'on précise la position d'un troisième point P_3 . Vu que les distances α et β entre ce point et les points P_1 et P_2 sont fixes, P_3 ne peut se trouver que sur un cercle; donc, on n'a besoin que d'une seule coordonnée pour en préciser la position.

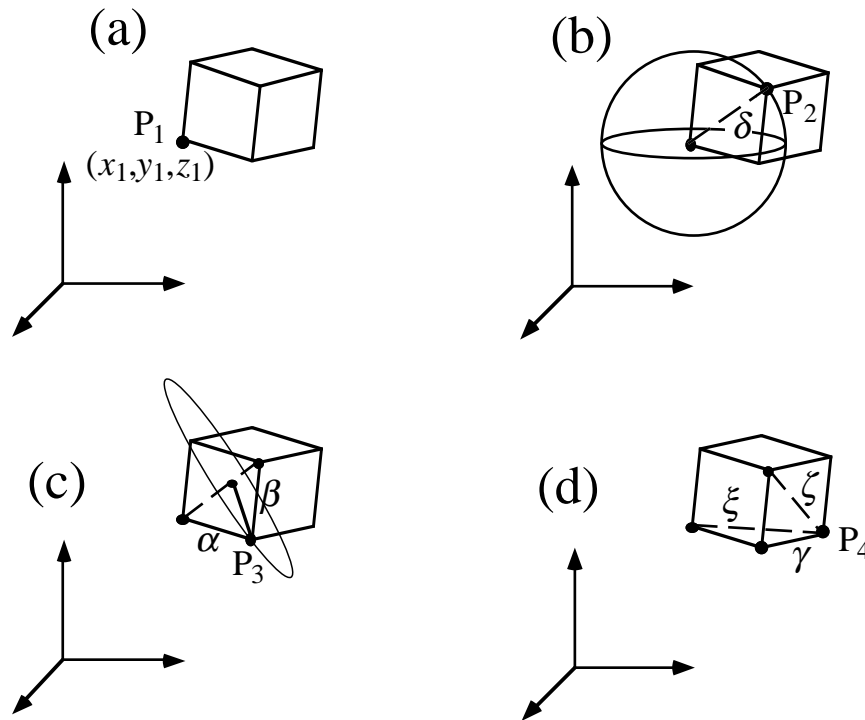


Fig. 39: Analyse du nombre de coordonnées indépendantes d'un solide (nombre de degrés de liberté).

Le total des coordonnées libres est 6, et ne change pas si nous ajoutons d'autres points à notre analyse. La Fig. 39d montre en effet que la position d'un quatrième point P_4 est déjà fixée après avoir précisé la position de P_1 , P_2 et P_3 , vu que les distances γ , ξ et ζ de ces points sont fixes. Autrement dit, la position du solide tout entier est précisée en donnant les positions de trois de ses points, ce qui exige six coordonnées.

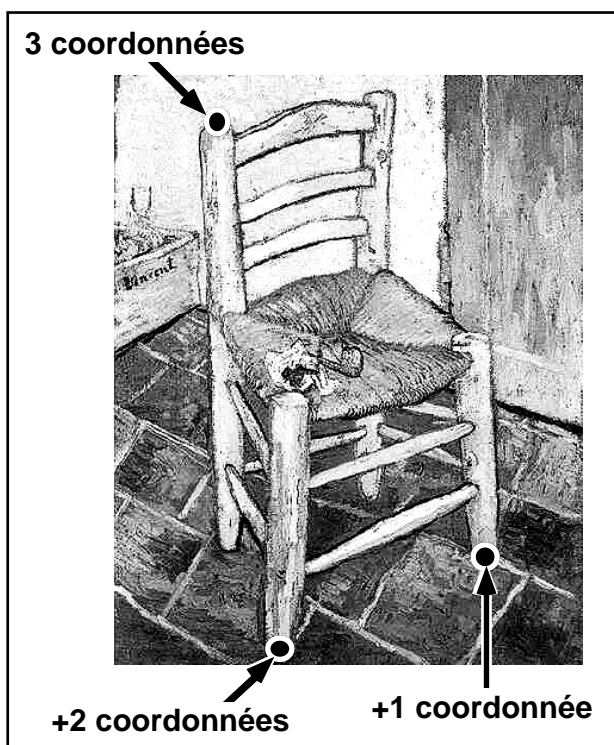
Mais alors, miracle! On a commencé par un système comprenant un nombre gigantesque de masses ponctuelles (par exemple, d'atomes), qui devrait correspondre à un nombre également gigantesque de variables libres, mais grâce à la condition de rigidité on a réduit ce dernier nombre à six!

De plus, six est aussi le nombre d'équations scalaires correspondant aux équations vectorielles 122 et 129: on obtient un parfait équilibre entre nombre de variables et nombre d'équations, comme dans le cas d'une seule masse ponctuelle. Encore une fois, étant donné des conditions initiales suffisantes, le mouvement du système peut être complètement prévu! Les équations 122 et 129 changent donc de rôle par rapport aux ensembles quelconques de particules, et au lieu de fournir une solution partielle, elles fournissent pour un solide une solution complète, en mesure de préciser le mouvement de toutes les particules du système.

Cette agréable conclusion, bien sûr, n'est valable que si l'on idéalise la rigidité des distances entre les atomes d'un solide, tandis que... Mais laissons de côté le réalisme, continuons à oublier les vibrations thermiques, et saisissons l'opportunité de développer une théorie précise de la statique et de la dynamique des solides.

VII.1. Distributions continues de masses

Mais avant de nous amuser avec ce beau programme: malheur! Il faut se casser la tête avec un petit problème de formalisme. Le problème est que les masses ponctuelles n'existent pas: même les atomes ont une certaine dimension dans l'espace et une certaine distribution interne de masses. Donc, plutôt de penser aux ensembles de masses ponctuelles, il faut considérer des régions d'espace avec une certaine masse totale, distribuée selon une certaine densité qui change d'un point à l'autre. La densité est, autrement dit, une fonction de la position \mathbf{r} , que nous appellerons $\mu(\mathbf{r})$.



Afin de déterminer la position d'une de ses célèbres chaises (un corps solide), Van Gogh n'aurait eu besoin que de six coordonnées scalaires.

Etant donné un volume infiniment petit $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$, la masse interne (infinitésimale) est par définition:

$$dm = \mu(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} \quad . \quad (134)$$

Toutes les équations qui prévoient une somme sur un ensemble de masses ponctuelles peuvent alors être modifiées en utilisant des intégrales "de volume". Prenons, par exemple, la définition de la masse totale d'un ensemble de particules (Eq. 125):

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad ;$$

dans le cas d'un volume V contenant une distribution de masse de densité $\mu(\mathbf{r})$, elle devient:

$$M = \int_V dm = \int_V \mu(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} \quad ; \quad (135)$$

D'autres équations modifiables de façon similaire sont, par exemple, les suivantes:

$$P = \int_V \mu(r) v(r) d^3r , \quad (136)$$

pour la définition de quantité de mouvement totale (où $v(r)$ est la vitesse de la masse qui se trouve dans le volume infinitésimal d^3r à la position r). En ce qui concerne la définition du centre de gravité:

$$R_c = (1/M) \int_V \mu(r) r d^3r . \quad (137)$$

VII.2. Problèmes de statique

L'équilibre entre le nombre d'équations générales de la dynamique d'un solide et le nombre de variables nous permet de trouver les conditions statiques, c'est-à-dire les conditions pour l'absence de mouvement. Tout d'abord, l'Eq. 126, qui gouverne le mouvement du centre de gravité:

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F^e ;$$

dans le cas d'un solide, elle peut évidemment garantir l'absence de mouvement du centre de gravité, si (1) la somme vectorielle des forces extérieures est nulle, et (2) à un moment donné, le centre de gravité ne se déplace pas. Mais d'autre part, elle ne peut pas garantir l'absence totale de mouvement du solide, parce que celui-ci peut se trouver en rotation par rapport au centre de gravité, alors que celui-ci reste immobile.

Il faut alors ajouter une deuxième condition, qu'on peut déduire de l'Eq. 129 qui gouverne les changements de moment cinétique, c'est-à-dire les changements des mouvement de rotation. La deuxième condition statique pour un solide est alors:

$$\Omega^e = 0 ,$$

où Ω^e est le total des moments des forces extérieures, calculé en utilisant le centre de gravité comme point de référence. Il faut noter qu'une somme vectorielle nulle des forces externes ne peut pas garantir que leur moment total est également nul. Ce point est illustré, par exemple, par le cas de la Fig. 40.

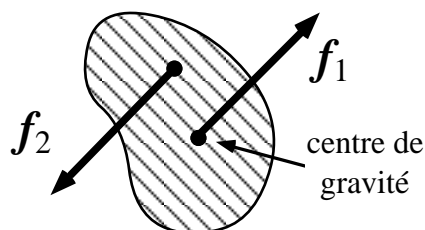


Fig. 40: Les deux forces appliquées à ce solide, l'une sur le centre de gravité et l'autre sur un autre point, donnent une somme vectorielle nulle. Leur moment par rapport au centre de gravité, par ailleurs, n'est pas nul.

Prenons maintenant le cas spécifique d'un solide soumis à la force de gravité et posé sur le sol. Les forces externes, à part la gravité, sont celles exercées par le sol afin d'annuler

les effets de la gravité. La Fig. 41 montre, par ailleurs, que ces forces pourraient ne pas être en mesure de donner un moment total nul.

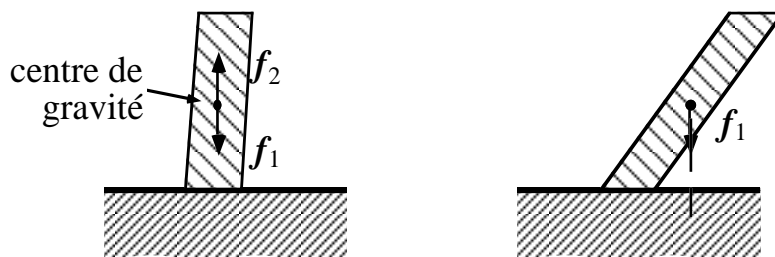


Fig. 41: A gauche: la force de gravité (f_1) est compensée par la force (f_2) exercée par le sol sur le solide. Dans ce cas, les deux forces donnent tant une somme vectorielle nulle qu'un moment total nul. A droite: dans ce cas, les forces exercées par le sol ne sont pas en mesure de donner un moment total nul.

On comprend facilement que, pour avoir une situation statique, la ligne verticale qui passe par le centre de gravité doit également passer par la superficie de contact entre le sol et le solide. Cette règle doit être modifiée si, aux forces de gravité et du sol s'ajoutent des forces latérales, y compris les forces de frottement. Par exemple, on peut utiliser une inclination donnée de la superficie des pistes pour les courses d'automobiles, afin de compenser les effets de la force apparente centrifuge qui se manifeste dans les courbes rapides.

VII.3. Mouvement d'un solide

Passons maintenant de la statique des solides à leur dynamique. Le premier point à souligner est que l'effet de n'importe quel mouvement d'un solide est équivalent à la combinaison d'une translation (sans rotation) et d'une rotation. La Fig. 42 montre un exemple de cette importante propriété.

On peut alors analyser la dynamique d'un solide en tenant compte de la translation du centre de gravité, dont le mouvement est gouverné par l'Eq. 126:

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F_e ,$$

et des rotations autour d'un axe qui passe par le centre de gravité.

VII.3.1. Moment d'inertie

Afin d'analyser les rotations, nous commencerons par étudier un solide très simple: l'ensemble de trois particules de masse m , liées l'une à l'autre à distances fixes, illustré par la partie supérieure de la Fig. 43. La partie inférieure gauche de la même figure montre un mouvement de rotation autour d'un axe passant par deux des particules. Ces deux particules ont une vitesse nulle et ne contribuent pas au moment cinétique total. La seule contribution provient de la troisième particule. Une simple analyse des directions des vecteurs r et $m\mathbf{v}$ montre que le moment cinétique $r \times m\mathbf{v}$ n'est pas parallèle à l'axe de rotation.

Par contre, une analyse similaire des deux vecteurs moment cinétique des deux particules en rotation de la partie inférieure droite de la Fig. 43 (correspondant aux

vecteurs r_1 , v_1 , r_2 et v_2) montre que leur somme vectorielle est dans la direction de l'axe de rotation.



Une application pratique et bien connue des principes concernant l'équilibre des corps solides.

Il existe un théorème général qui démontre que chaque solide possède au moins trois axes orthogonaux ayant cette propriété. On appelle ces axes les "axes principaux d'inertie" du solide. Dans le cas de solides à haute symétrie, les axes principaux d'inertie sont aussi des axes liés à la symétrie. Pour un cylindre, par exemple, un des axes principaux d'inertie est celui de rotation du cylindre.

Maintenant, prenons encore la rotation autour d'un axe principal d'inertie de la partie inférieure droite de la Fig. 43. Quel sera le moment cinétique total? Celui de la première particule est $L_1 = r_1 \times m v_1$, qu'on peut aussi écrire en utilisant le vecteur vitesse angulaire comme: $L_1 = r_1 \times m(\omega \times r_1)$. De même, le moment cinétique de la deuxième particule est donné par $L_2 = r_2 \times m(\omega \times r_2)$. Il faut noter que le vecteur vitesse angulaire est égal pour les deux particules, en raison de la rigidité de l'ensemble.

Il est facile de vérifier que les vecteurs $(\omega \times r_1)$ et $(\omega \times r_2)$ ont comme grandeur ωR , où R est la distance de chaque particule de l'axe de rotation. Les directions des vecteurs r_1 et $(\omega \times r_1)$ sont orthogonales, donc la grandeur du vecteur L_1 est $m\omega R r_1$; on peut facilement vérifier que le vecteur L_2 est de grandeur $m\omega R r_2$.

Le moment cinétique total est $L = L_1 + L_2$; sa grandeur est équivalente à la somme des composantes de L_1 et L_2 dans la direction de l'axe de rotation, $L_1 \cos \xi + L_2 \cos \xi = m\omega R r_1 \cos \xi + m\omega R r_2 \cos \xi = 2m\omega R^2$. Puisque la direction de L coïncide avec celle de ω , on peut écrire:

$$L = I\omega ,$$

où:

$$I = 2mR^2$$

est par définition le "moment d'inertie" du solide, correspondant à l'axe de rotation de la Fig. 44.

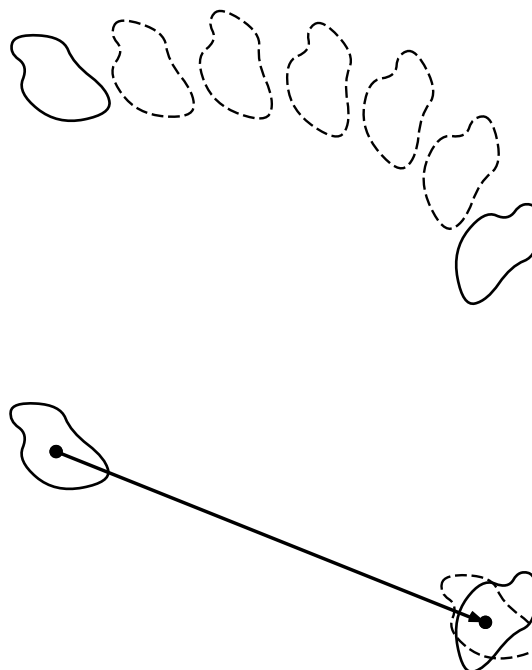


Fig. 42: Les effets du mouvement d'un solide (en haut) sont équivalents à la combinaison d'une translation et d'une rotation.

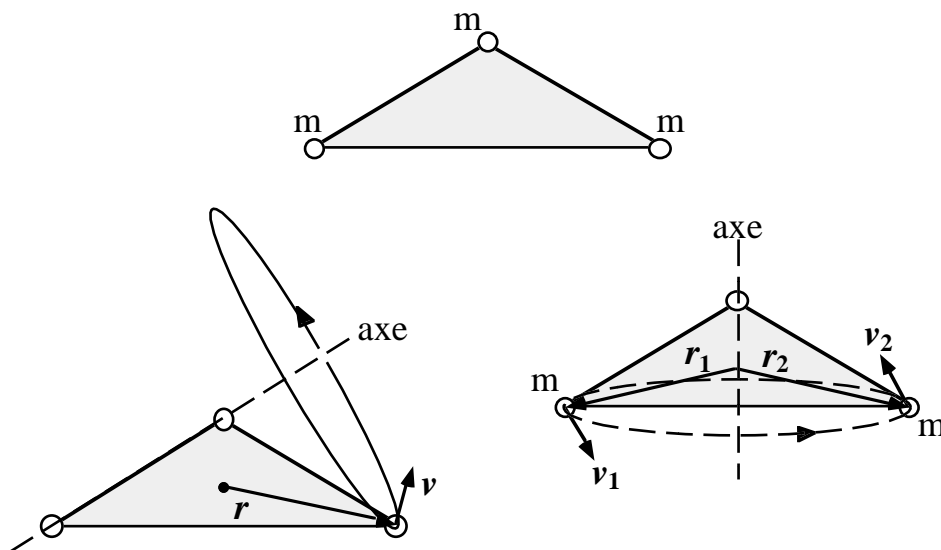


Fig. 43: Deux exemples de mouvement de rotation d'un solide simple formé par trois masses ponctuelles. Le point G est le centre de gravité.

Ce résultat peut être généralisé pour un solide formé par un ensemble de N particules rigidement reliées les unes aux autres, en rotation par rapport à un certain axe. La composante - dans la direction de l'axe - du moment cinétique total par rapport à un point de l'axe est:

$$L_{\text{axe}} = I\omega , \quad (138)$$

avec:

$$I = \sum_1^N m_i R_i^2, \quad (139)$$

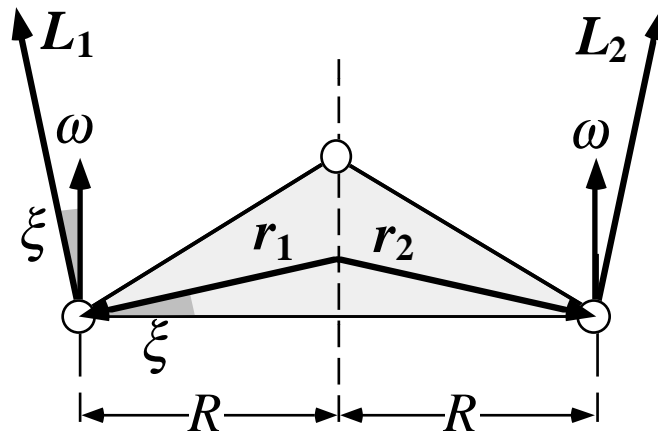


Fig. 44: Utilisation d'un des mouvements de rotations de la Fig. 43 afin d'illustrer un exemple élémentaire de moment d'inertie.

où m_i est la masse de la i -ème particule et R_i est sa distance de l'axe de rotation. Si l'axe est un axe principal d'inertie, alors le moment cinétique total est dans sa direction, qui est aussi celle de ω , et on peut écrire:

$$L = I\omega. \quad (140)$$

La définition du moment d'inertie peut être ainsi généralisée à un solide formé par une distribution continue de masses:

$$I = \int_V \mu(r) R^2 d^3r. \quad (141)$$

Sa définition nous dit que le moment d'inertie augmente avec la masse du solide, mais aussi avec la distance moyenne de la masse par rapport à l'axe de rotation. La Fig. 45 montre quelques exemples de résultats de calcul de moments d'inertie.

VII.3.2. Théorème de Huygens et Steiner

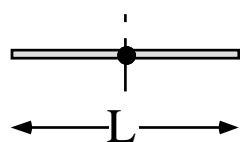
Avant d'utiliser le moment d'inertie, nous discuterons un résultat qui se révèle très utile pour le calcul pratique de cette quantité. Prenons la Fig. 46, qui montre un solide formé tout simplement par deux particules reliées l'une à l'autre. La figure propose deux axes de rotation, l'axe (a) qui passe par le centre de gravité G, et l'axe (b), parallèle à l'axe (a).

Le moment d'inertie par rapport à (a) est $I_G = mR^2 + mR^2 = 2(mR^2)$; celui par rapport à (b) est $I_b = m(3R/2)^2 + m(R/2)^2 = (5/2)(mR^2)$. Analysons la manière d'obtenir ce dernier résultat. La distance de chaque particule par rapport à l'axe (b) peut être calculée en prenant sa distance par rapport au centre de gravité et en ajoutant la distance, $R/2$, entre le centre de gravité et l'axe (b). On a alors pour la particule de gauche $(R + R/2)$ et pour celle de droite $(R - R/2)$.

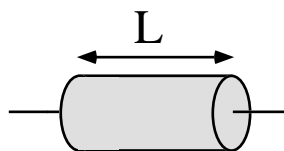
Les carrés donnent: $(R + R/2)^2 + (R - R/2)^2 = (R^2 + (R/2)^2 + 2(R \times R/2)) + (R^2 + (R/2)^2 - 2(R \times R/2)) = (R^2 + R^2) + ((R/2)^2 + (R/2)^2)$. En multipliant par m on obtient: $I = m(R^2 +$

$R^2) + m((R/2)^2 + (R/2)^2)$. Or, le premier des deux termes est simplement le moment d'inertie par rapport au centre de gravité. Le deuxième est le moment d'inertie - par rapport à l'axe (b) - qu'aurait la masse totale du système, $2m$, si elle se trouvait au centre de gravité.

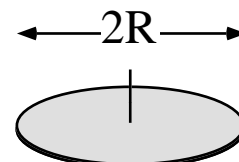
Moments d'inertie:



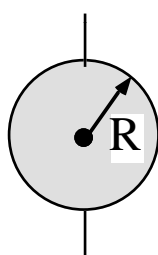
tige mince:
 $I = ML^2/12$



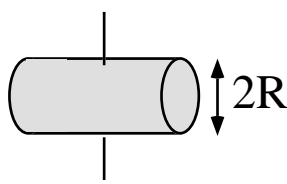
cylindre:
 $I = MR^2/2$



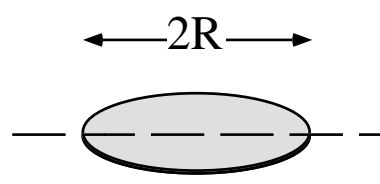
disque:
 $I = MR^2/2$



sphère:
 $I = 2MR^2/5$



cylindre:
 $I = MR^2/4 + ML^2/12$



disque:
 $I = MR^2/4$

Fig. 45: Résultats de calculs de moments d'inertie pour des solides de haute symétrie.

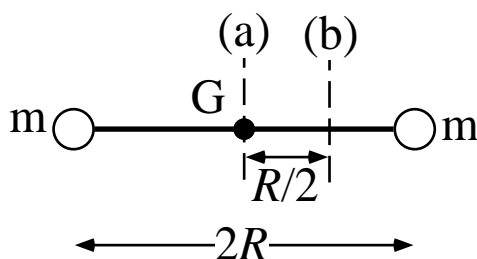


Fig. 46: Exemple du théorème de Huygens et Steiner sur les moments d'inertie.

Ce résultat peut facilement être généralisé à un ensemble quelconque de masses ponctuelles, ou à un solide formé par une distribution continue de masse. La forme générale est le théorème de Huygens et Steiner:

$$I = I_G + Md^2, \quad (142)$$

où I_G est le moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité du solide, I est le moment d'inertie par rapport à un deuxième axe parallèle au premier, M est la masse totale et d est la distance entre les deux axes. Ce théorème est utile parce qu'il nous permet de calculer le moment d'inertie par rapport à n'importe quel axe, si nous connaissons le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité.

VII.3.3. Dynamique de la rotation d'un solide

Les équations 138 et 141 peuvent être utilisées pour modifier la loi du moment total des forces externes et du moment cinétique, et traiter les rotations des solides. En considérant une rotation par rapport à un axe principal d'inertie, les équations 129 et 140 donnent:

$$\Omega^e = \frac{dL}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} ; \quad (143)$$

si, par contre, la rotation a lieu par rapport à un axe générique, alors il faut utiliser les projections des vecteurs sur celui-ci:

$$\Omega^e_{\text{axe}} = \frac{dL_{\text{axe}}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} . \quad (144)$$

Il faut souligner que l'Eq. 129, que nous avons utilisée afin d'obtenir les équations 143 et 144, est valable pour des moments calculés par rapport à un point fixe dans un référentiel d'inertie, ou par rapport au centre de gravité. Par conséquent, les équations 143 et 144 sont valables pour des axes qui passent par un point fixe d'un référentiel d'inertie, ou par le centre de gravité.

L'analyse du mouvement d'un solide que nous avons proposée, se basant sur des translations du centre de gravité et sur des rotations par rapport à celui-ci, peut donc s'appuyer sur les équations 143 et 144 en ce qui concerne les rotations.

VII.3.4. Gyroscopes et toupies

Un gyroscope est un solide en mouvement avec un très grand moment cinétique par rapport à un de ses axes principaux d'inertie. Ce grand moment cinétique peut être causé par une grande vitesse angulaire ou par un grand moment d'inertie, ou par la combinaison des deux.

Prenons par exemple la Fig. 47; on y voit une roue à grande masse et grand moment d'inertie I par rapport à son axe (principal d'inertie) de rotation. Une extrémité (point P) de l'axe est soutenue par un bâton, tandis que l'autre est libre. En faisant tourner la roue à grande vitesse angulaire, on constate qu'elle ne tombe pas: par contre, l'axe commence à tourner autour du point P.

Il s'agit d'un phénomène facile à comprendre à l'aide de l'Eq. 143. La force externe est le poids du solide, qui cause un moment externe dans la direction horizontale, comme montré dans la partie droite de la figure. Cela cause un changement de vitesse angulaire par rapport au temps, qui tend à modifier la très grande vitesse angulaire causée par la rotation de la roue. Le vecteur changement $d\omega$ est dans la direction perpendiculaire à ω , par conséquent il correspond à un changement de direction de celui-ci, ce qui explique la rotation de l'axe autour du point P.

En général, le fonctionnement d'un système gyroscopique se base sur la présence de la grande vitesse angulaire, dont les forces externes ne peuvent que peu modifier la grandeur. La Fig. 48 montre quelques applications des gyroscopes. Dans le premier cas, en procédant au même type d'analyse qu'utilisé pour le gyroscope de la Fig. 47, il est facile de comprendre pourquoi la toupie ne tombe pas sur le sol tant qu'elle est en rotation, et aussi pourquoi son axe tend à tourner par rapport au point de contact P (phénomène qu'on appelle "précession"). Une analyse plus poussée permettrait de

comprendre un phénomène supplémentaire: l'oscillation de l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation par rapport à la direction verticale (mouvement de "nutation").

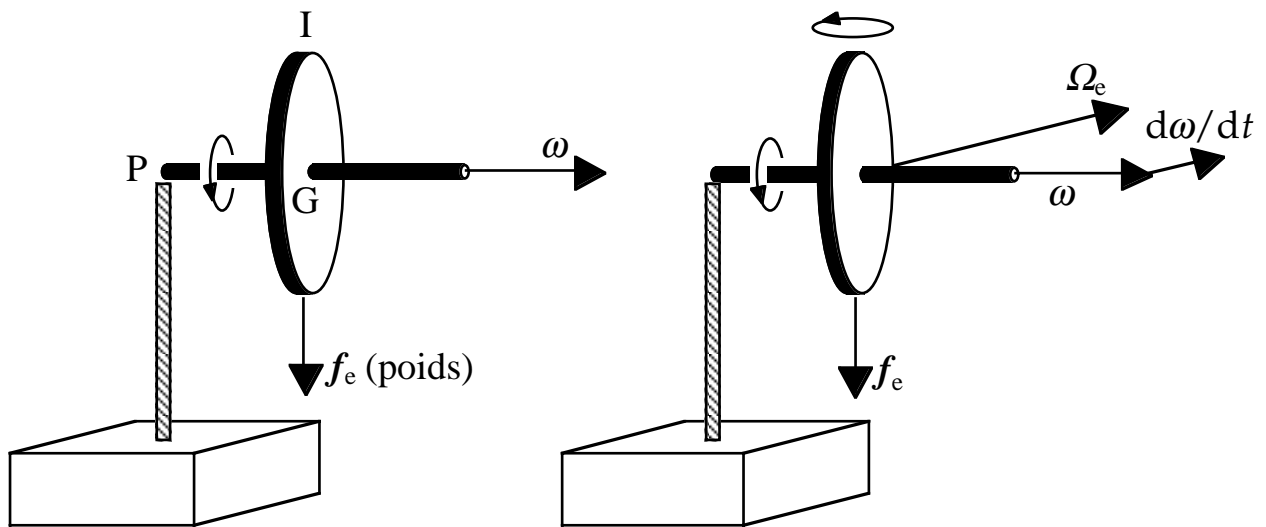


Fig. 47: Exemple de phénomène du type "gyroscope".

La partie droite de la Fig. 48 montre le principe de fonctionnement du compas gyroscopique. Dans ce cas, l'axe du gyroscope est obligé de se trouver dans le plan horizontal de la Terre, par exemple en flottant sur un liquide. Prenons tout d'abord la situation A, dans laquelle l'axe (à l'équateur) est dans la direction Est-Ouest. La rotation de la Terre, et la rotation correspondante du plan horizontal, correspondent à une rotation du vecteur ω . Cet effet est équivalent à celui du moment d'une force externe, moment dans la direction verticale.

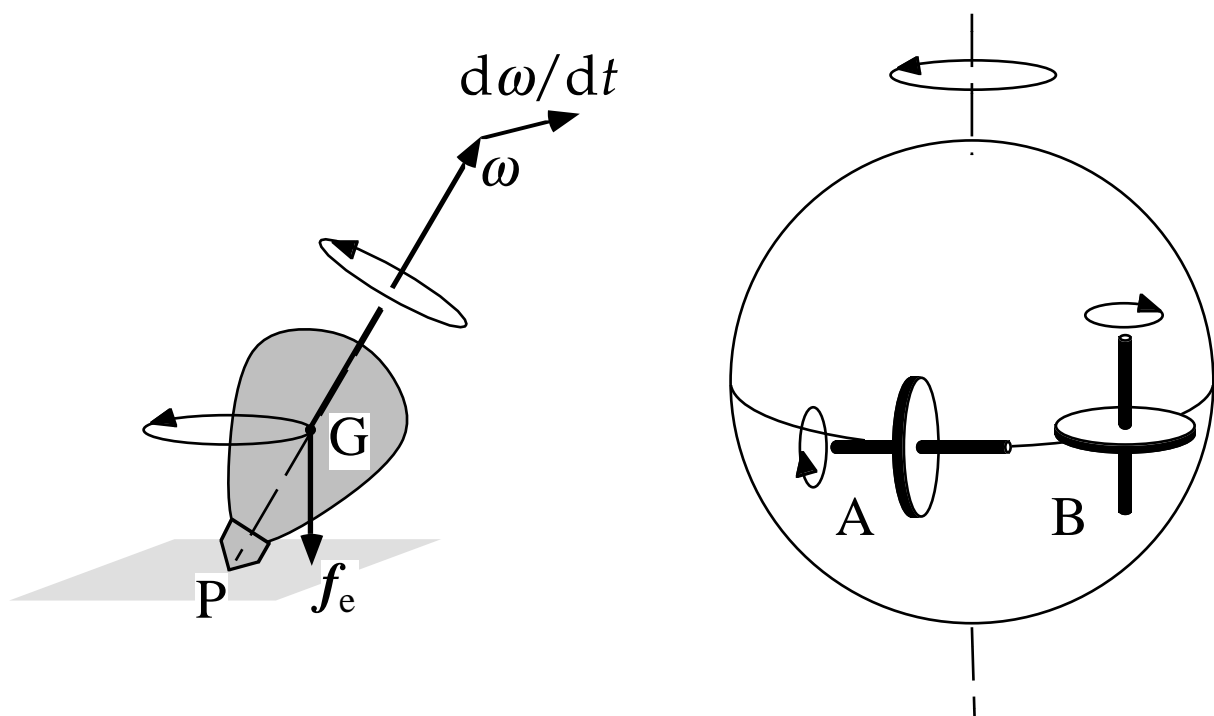


Fig. 48: Deux applications du "principe" du gyroscope: la toupie et le compas gyroscopique.

Mais ce moment cause aussi la rotation du gyroscope dans le plan horizontal, avec une tendance de son axe à s'orienter dans la direction Nord-Sud. Par conséquent, le compas tend à se trouver dans la situation B, et son axe révèle la direction Nord-Sud, sans les problèmes qui affectent les compas magnétiques (par exemple, les champs magnétiques locaux).

Passons maintenant à une dernière application des gyroscopes: le cyclisme! Comment faire tourner une bicyclette à droite ou à gauche? Ne répondez pas qu'on tourne les roues, car le résultat serait plutôt de balayer le pavé avec des parties délicates du corps. Ce qu'on fait est de déplacer doucement le corps (y compris les parties délicates mentionnées ci-dessus) de manière à créer une inclinaison du vélo par rapport à la verticale.

Et pourquoi cela? Analysons les deux roues de la bicyclette, qui se comportent comme des gyroscopes. L'inclinaison permet à la force externe (le poids) d'agir avec un moment par rapport au point de contact avec le sol, qui s'annule si la position est parfaitement verticale. Le moment est dans la direction de mouvement de la bicyclette, et tend à faire changer la direction des vecteurs ω des roues, ce qui correspond également à faire tourner la bicyclette. Voilà donc la stratégie permettant de tourner l'engin, encore plus valable en remplaçant le placide vélo avec une formidable Harley-Davidson.

VII.4. Energie mécanique d'un solide

Dans le cas de forces (externes et internes) conservatives, la loi de conservation de l'énergie mécanique totale s'ajoute aux autres équations de la dynamique des solides et nous aide à trouver la solution de problèmes pratiques. Il faut alors trouver des expressions pour l'énergie cinétique des solides.



Einstein utilise la deuxième loi fondamentale gouvernant le mouvement des corps solides pour faire tourner sa bicyclette.

Prenons encore une fois en considération le cas de la Fig. 46, et calculons l'énergie cinétique pour des rotations à vitesse angulaire (grandeur) ω par rapport aux deux axes. En ce qui concerne l'axe (a), le résultat est $(1/2)(m(R\omega)^2 + m(R\omega)^2) = (1/2)(mR^2 + mR^2)\omega^2 = I\omega^2/2$.

Maintenant, l'axe (b): le résultat est $(1/2)(m((3R/2)\omega)^2 + m((R/2)\omega)^2) = (1/2)(5mR^2/2)\omega^2 = I\omega^2/2$. L'énergie cinétique de rotation est donc donnée par $I\omega^2/2$ tant pour un axe de rotation principale d'inertie, (a), que pour un axe moins spécifique.

Ce résultat peut être généralisé, tout d'abord, pour une rotation sans translation, l'énergie cinétique est toujours donnée par:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (145)$$

Prenons maintenant un mouvement plus général d'un solide. Nous avons vu qu'il peut toujours être considéré comme la combinaison d'une translation du centre de gravité et d'une rotation par rapport à ce centre. On peut alors écrire l'énergie cinétique comme la somme des énergies cinétiques correspondant à ces deux mouvements:

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (146)$$

où v_c est la grandeur du vecteur vitesse du centre de gravité, ($d\mathbf{R}_c/dt$). On pourrait interpréter l'Eq. 146 en disant que l'énergie cinétique de mouvement d'un solide est la somme de l'énergie cinétique qu'aurait sa masse totale si elle se déplaçait comme le centre de gravité, plus l'énergie cinétique de rotation par rapport à ce centre.

En ce qui concerne les applications pratiques de la loi de conservation de l'énergie mécanique, il faut mentionner un effet curieux et important qu'on constate pour les phénomènes tels que le mouvement d'une roue. Normalement, les forces de frottement empêchent l'énergie mécanique totale de se conserver. Mais si nous passons à la limite dans le cas d'une roue, leur rôle est paradoxalement renversé: elles permettent la conservation de l'énergie mécanique.

Normalement, le mouvement d'une roue comprend tant la rotation que le glissement du point de contact avec la route; le glissement est affecté par des forces de frottement, et l'énergie mécanique ne se conserve pas à cause du travail fait par celles-ci. A la limite, par ailleurs, le frottement empêche tout glissement (Fig. 49); le point de contact entre roue et route change d'un instant à l'autre, et sa vitesse instantanée est toujours nulle.

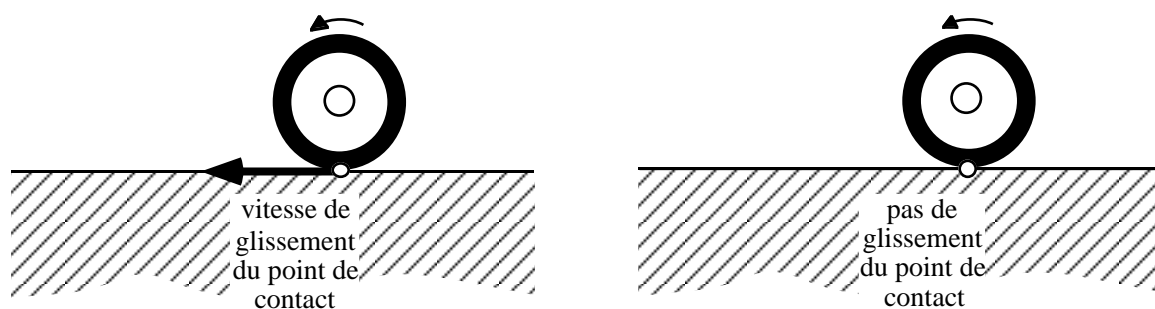


Fig. 49: Mouvement d'une roue avec (à gauche) et sans glissement (à droite). Dans le deuxième cas, les forces de frottement au point de contact de la roue ne font pas de travail, et ne peuvent pas empêcher la conservation de l'énergie mécanique totale.

Or, le travail élémentaire fait par la force de frottement est le produit scalaire de la force par le déplacement élémentaire; à vitesse nulle, le déplacement élémentaire est

également nul, et la force de frottement ne fait pas de travail. Donc, elle ne peut pas influencer le bilan d'énergie, et l'énergie mécanique totale peut se conserver.

Le Coin Yankee:

Moment d'inertie *Moment of inertia*

Gyroscope *Gyroscope*
Compas *Gyroscopic*
gyroscopique *compass*

“One could then interpret Eq. 146 by saying that the kinetic energy for the motion of a solid is the sum of the kinetic energy that its total mass would have if it moved like the center of gravity, plus the kinetic energy of the rotation around the center of gravity.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
I (moment d'inertie)	kg m ²	
T (température)	K	C

Ordres de grandeur:

Moment d'inertie de la Terre: en utilisant la masse $M \approx 6 \times 10^{24}$ kg et le rayon $R \approx 6,4 \times 10^6$ m, on obtiendrait pour une sphère: $I \approx 9,8 \times 10^{37}$ kg m².

VIII. Statique et mouvement des fluides

La notion de base de ce chapitre, tant pour la statique des fluides que pour leur dynamique, est celle de pression, facile à comprendre à l'aide de la Fig. 50. Prenons un récipient rempli d'eau, et imaginons deux volumes (a) et (b) du liquide en contact avec la surface S. Imaginons maintenant que l'eau du volume (B) est éliminée: les particules d'eau du volume (A) proches de la surface S tendront à être poussées vers l'espace laissé vide. Donc, ces particules sont soumises à une certaine force. Quand le volume (B) est rempli d'eau, cette force est annulée par une force d'égale grandeur dans la direction opposée.

La constatation de l'existence de ces forces équilibrées suggère une expérience: on remplace le volume (B) avec un appareil I qui mesure la force agissant sur la surface S. En déplaçant l'appareil d'un point à l'autre et en changeant ainsi la position et l'orientation de la surface S, on constate que la force mesurée ne change pas.

La grandeur F de la force mesurée augmente de façon proportionnelle à l'aire de S. Il est alors préférable de définir une quantité normalisée par l'aire, et on arrive ainsi à la notion de "pression":

$$p = \frac{F}{S} . \quad (147)$$

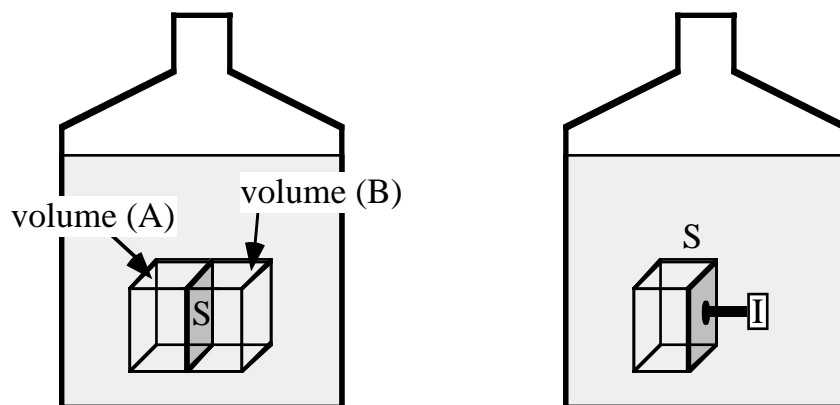


Fig. 50: A gauche, introduction élémentaire à la notion de pression dans un liquide. A droite: exemple de mesure de pression.

Il faut noter que, si la surface S se trouve sur une de ses parois, la pression correspond à la force agissante sur celle-ci. Le liquide ne sort pas de la bouteille parce que cette pression est compensée par les forces créées par les parois.

Cette analyse nous amène directement à ce qu'on appelle le "principe d'Archimède". La dérivation peut se faire à l'aide de la Fig. 51; on y voit en haut et à droite un objet de masse m et poids mg flottant dans l'eau. A gauche, on remplace l'objet par une masse d'eau de même forme.

Il est évident que cette masse est en équilibre avec le reste de l'eau. Cela veut dire que l'action combinée de la pression sur la surface idéale entre la masse et le reste de l'eau doit équilibrer le poids de la masse; si M est la masse d'eau et Mg son poids, l'action de la pression est alors équivalente à une force "d'Archimède" de grandeur $f_A = Mg$, dans la direction opposée au poids.

Maintenant "remettons" l'objet à sa place: la force causée par l'eau ne change pas, et doit être combinée à la force-poids mg de l'objet. Cela veut dire que si $M < m$ l'objet tend à descendre, l'inverse si $M > m$, et on a une situation d'équilibre si $M = m$. A noter que les deux forces, poids et force d'Archimède, ne sont pas appliquées au même point: la première est appliquée au centre de gravité de l'objet et la seconde au centre de gravité G_A de l'eau que l'objet "déplace". Pourtant, si l'objet est parfaitement homogène, alors les deux points coïncident.

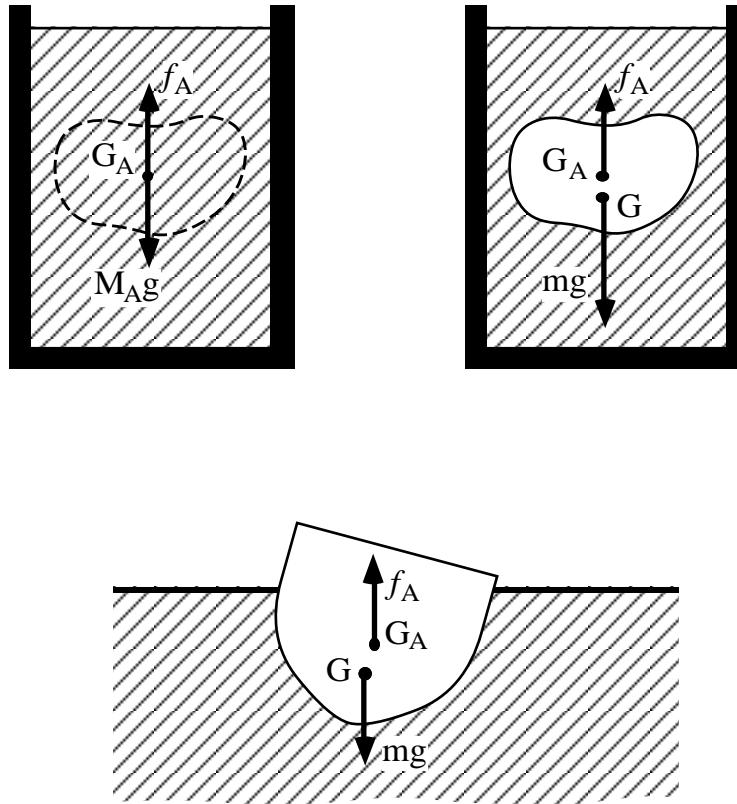


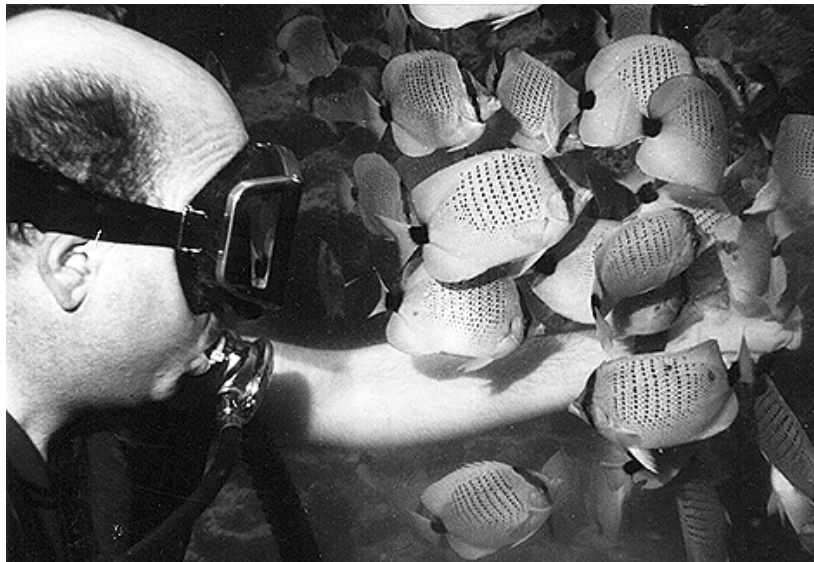
Fig. 51: En haut: dérivation du "principe" d'Archimède. En bas: application de cette notion pour comprendre la stabilité d'un bateau.

La partie inférieure de la Fig. 51 montre l'application de ce résultat à un bateau. Le bateau est conçu de manière (1) avoir un grand volume dans l'eau et "déplacer" un grand volume d'eau; il peut ainsi équilibrer son poids avec la force d'Archimède; (2) avoir son centre de gravité plus bas que celui de l'eau "déplacée". La raison de cette deuxième condition ressort clairement de la Fig. 51: si le bateau est incliné par rapport à la verticale, le moment des deux forces tend dans ce cas à le remettre droit (ce qui - assurément - constitue un "must" pour goûter une croisière en *yacht* dans les Caraïbes).

VIII.1. Relation entre profondeur et pression

A propos de Caraïbes, les personnes qui, comme l'auteur de ces notes, aiment la plongée "bouteille" qui permet de découvrir les merveilles sous-marines des régions tropicales, connaissent bien une propriété de la pression hydraulique: plus l'on descend, plus elle augmente. Cela peut créer des problèmes, car pendant la plongée (bouteille) la pression interne du corps équivaut à celle de l'eau; si l'on remonte trop vite, le corps n'a pas le temps de s'adapter à la diminution de pression, ce qui peut causer des graves syndromes, parfois fatals. D'autre part, on peut aussi utiliser la relation entre pression et profondeur afin de mesurer cette dernière.

Quelle est donc cette relation? Prenons un point sous-marin à la distance H du niveau de la mer. Imaginons une colonne d'eau, dont la base se trouve à ce point et le sommet au niveau de la mer. Le poids de cette colonne est ρVg , où ρ est la densité de l'eau et $V = SH$ est le volume de la colonne (S est sa section).



Expériences sur la loi profondeur-pression.

La colonne ne "chute" pas, donc son poids doit être équilibré par la force correspondant à la pression (n'oublions pas que celle-ci ne dépend pas de l'orientation de la surface de mesure). On a donc:

$$pS = \rho SHg ,$$

d'où la relation (linéaire) entre pression et profondeur:

$$p = \rho Hg ; \tag{148}$$

il faut pourtant remarquer que cette équation donnerait une pression nulle pour $H = 0$ m; cela n'est pas vrai, parce que au niveau de la mer on doit tenir compte de la pression atmosphérique, p_0 . L'Eq. 148 doit alors être corrigée pour obtenir:

$$p = \rho Hg + p_0 ; \tag{149}$$

si, par exemple, vous effectuez une plongée à 20 m de profondeur, la pression y dépasse la pression atmosphérique de $\rho Hg \approx 10^3 \times 20 \times 9,8 \approx 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, soit $2 \text{ kg/cm}^2 \approx 2$ atmosphères. Vous pouvez aussi utiliser les équations 148 et 149 pour comprendre quelle est la performance réelle d'une montre étanche; par exemple, une garantie à 10 atmosphères signifie que vous pourriez plonger jusqu'à 100 mètres; ce qui serait de la folie, parce que seuls quelques "scuba divers" ultraprofessionnels peuvent atteindre une telle profondeur, les autres ne dépassant normalement pas les 30-50 m. Alors, si l'on vous demande un prix épouvantable pour une montre en raison de son étanchéité jusqu'à 30 atmosphères...

VIII.2. Le "principe de Pascal" et ses applications pratiques

Nous généraliserons maintenant l'analyse précédente, en considérant le cas d'une pression supplémentaire appliquée à la superficie externe du liquide. Prenons la Fig. 52:

dans sa partie supérieure, on voit à gauche un cylindre rempli d'un liquide et muni d'un piston. Une pression externe p_o est appliquée sur le piston. Cette pression est intégralement transmise au liquide, et doit être égale à la pression de celui-ci à la surface en contact avec le piston. Par conséquent, en calculant la pression p au fond du récipient avec l'Eq. 149, il faut prendre pour p_o la pression du piston.

Ce résultat est une conséquence du "principe de Pascal": à cause de l'impossibilité (du moins en première approximation) de comprimer un liquide, la pression qui lui est appliquée est transmise à toute sa masse et dans toutes les directions.

La partie supérieure droite de la Fig. 52 montre une autre conséquence de ce "principe" et de l'Eq. 149 (p_o étant ici la pression atmosphérique). L'aire de base des deux récipients est la même, ainsi que la hauteur du liquide. Par conséquent, tant la pression que la force sur le fond ne changent pas d'un récipient à l'autre. Cela pourrait paraître paradoxal, vu la forme différente des récipients; mais la logique qui nous a amenés à l'Eq. 149 élimine tout paradoxe.

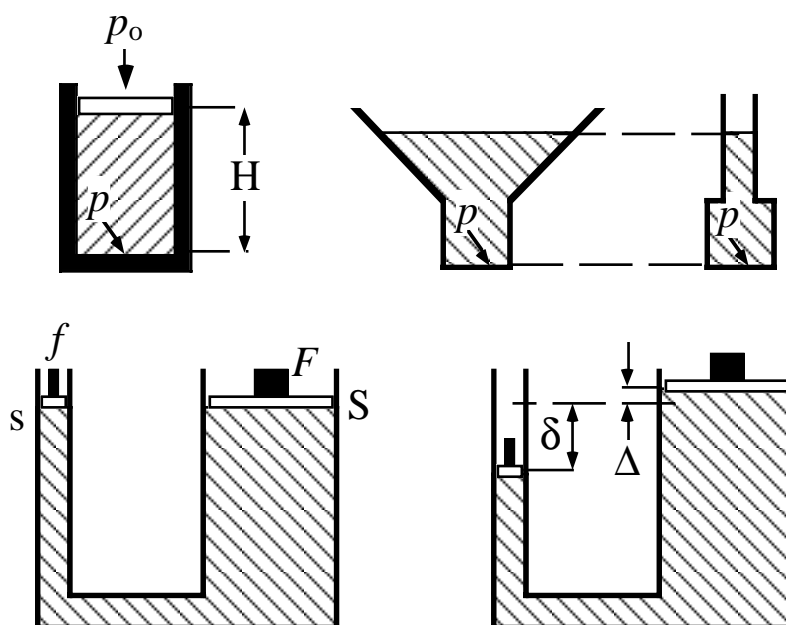


Fig. 52: Quelques exemples d'applications du "principe de Pascal" de la statique des fluides.

La partie inférieure de la Fig. 52 montre le "principe de Pascal" dans une application pratique: la presse hydraulique. Deux cylindres remplis d'un liquide sont connectés par un tube; chaque cylindre est muni d'un piston. Il faut noter la grande différence entre les sections des cylindres $S \gg s$. Un certain poids cause une force f sur le petit piston: la pression correspondante est f/s . Si les deux pistons sont à la même hauteur, alors on doit retrouver la même pression au grand piston, et donc une force $F = S(f/s) = f(S/s) \gg f$.

Ce résultat est appliqué afin de soulever de grands poids en appliquant une force limitée, notamment dans les garages (voir la partie inférieure droite de la Fig. 52). Il faut remarquer qu'il n'est pas en conflit avec le principe de conservation de l'énergie mécanique (en négligeant les pertes causées par les forces non conservatives). Le travail fait par la force f est $f\delta$, et celui fait par la force F est $-F\Delta$. Vu que le volume d'eau à gauche, $s\delta$, doit être égal à celui à droite, $S\Delta$, le travail total est nul. Cette conclusion ne change pas si l'on tient aussi compte du travail fait par les poids des deux volumes d'eau.

VIII.3. Dynamique des fluides: mouvements stationnaires, loi de continuité

L'analyse de la dynamique des fluides doit commencer par le type le plus simple de mouvement d'un liquide: un mouvement "stationnaire". Imaginons un liquide en mouvement, composé de particules microscopiques. Chaque particule change en général sa vitesse pendant son mouvement.

Cependant, on constate souvent que chaque point touché par le liquide correspond à une vitesse bien déterminée; autrement dit, en analysant un certain point, on voit que toutes les particules qui y transitent ont la même vitesse; la même propriété est valable pour tous les points, mais la vitesse peut changer d'un point à l'autre. On peut alors définir un vecteur $v(\mathbf{r})$ pour chaque position \mathbf{r} ; la fonction $v(\mathbf{r})$ est appelée un "champ vectoriel".

Le mouvement correspondant est un mouvement stationnaire. Cela implique en particulier que la fonction $v(\mathbf{r})$ demeure constante par rapport au temps.

L'analyse des mouvements stationnaires doit tenir compte d'une propriété fondamentale des liquides: le fait qu'ils sont peu compressibles, et idéalement incompressibles. Il faut également remarquer que le mouvement, tout en déplaçant des particules de liquide, ne peut ni en créer ni en détruire: la "quantité" de liquide doit se conserver.

Analysons alors l'exemple de la Fig. 53: un liquide en mouvement stationnaire dans un tube. La vitesse des particules change en passant de la section S_1 à la section S_2 (nous simplifierons l'analyse en supposant que la vitesse est la même pour tous les points d'une section). Pendant une période de temps Δt , la quantité de liquide qui entre dans l'espace limité par S_1 et S_2 est proportionnelle au volume ($S_1 v_1 \Delta t$). La conservation de la quantité totale de liquide exige qu'une quantité égale sorte de ce même espace en passant par S_2 : $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$, et:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (150)$$

Ce résultat, qui correspond à la "loi de continuité" ou de conservation de la masse d'un liquide, a une conséquence intéressante, qui ne correspond parfois pas à l'intuition: la vitesse est plus élevée quand la section est plus étroite!

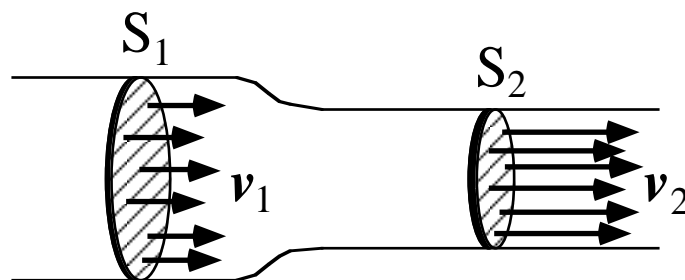


Fig. 53: Analyse de la propriété d'incompressibilité d'un liquide et de ses conséquences sur un mouvement stationnaire: loi de continuité.

Le même type de phénomène peut être observé pour un "liquide" incompressible qui n'a rien à voir avec l'eau ou d'autres liquides réels: l'ensemble des voitures dans le trafic. Il s'agit bien d'un "liquide" incompressible (n'essayez pas avec votre voiture de

tester ce principe)! Imaginez que vous vous trouvez sur l'autoroute après un accident qui a presque bloqué le trafic; pendant une demi-heure, vous avancez à la vitesse d'un escargot, en maudissant les automobilistes qui vous précèdent, les considérant incapables de conduire à une vitesse plus ou moins acceptable. Ensuite, vous arrivez sur le lieu de l'accident, où le trafic est canalisé sur une seule piste et... miracle! La vitesse augmente instantanément, fait pour lequel vous remerciez les mêmes automobilistes qui vous précèdent, supposant qu'ils ont récupéré tout d'un coup leurs facultés intellectuelles.

La réalité est pourtant différente: le comportement des autres automobilistes n'a aucune influence sur le phénomène. Le secret est tout simplement caché dans l'Eq. 150.

VIII.4. Théorèmes de Bernoulli et de Torricelli

Passons maintenant à l'analyse de l'énergie mécanique dans les mouvements stationnaires. Prenons un liquide soumis à la gravité terrestre (voir la Fig. 54). Considérons le volume qui se trouve à un instant donné entre les sections S_1 et S_2 , puis la même masse de liquide après un intervalle de temps δt : elle occupera le volume entre S_1' et S_2' .

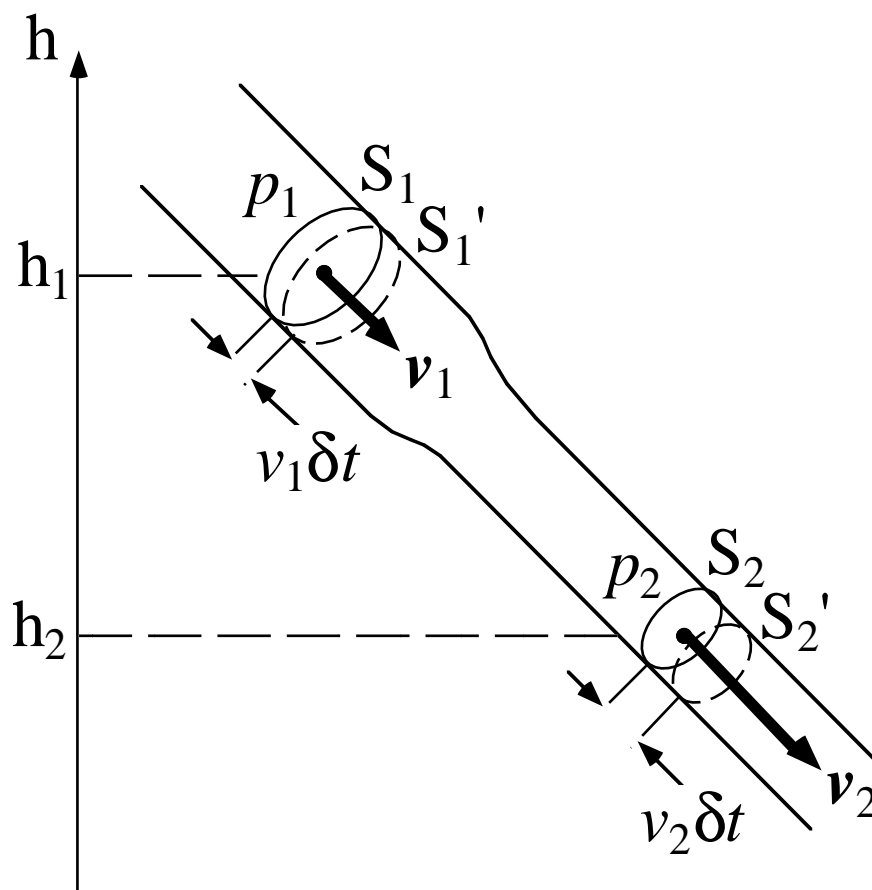


Fig. 54: Dérivation du théorème de Bernoulli concernant le bilan d'énergie du mouvement stationnaire d'un liquide.

Le bilan d'énergie doit tenir compte de trois points: (1) le changement d'énergie cinétique; si ρ est la densité du liquide, la masse du volume entre S_1 et S_1' est $\rho S_1(v_1\delta t)$ et celle du volume entre S_2 et S_2' est $\rho S_2(v_2\delta t)$, qui est égal à $\rho S_1v_1\delta t$ en raison de l'incompressibilité du liquide; l'énergie cinétique a donc changé de $\rho\delta t S_1v_1(v_2^2 - v_1^2)/2$;

(2) la différence d'énergie potentielle de gravitation; le changement de situation du liquide est équivalent au déplacement d'une masse $\rho S_1 v_1 \delta t$ de h_1 à h_2 , avec un changement d'énergie potentielle $\rho S_1 v_1 \delta t g (h_2 - h_1)$; (3) le travail produit par les forces de pression; pour le déplacement $v_1 \delta t$, le travail est $(p_1 S_1) v_1 \delta t$; pour le déplacement $v_2 \delta t$, il est $-(p_2 S_2) v_2 \delta t$; le travail total est donc $(p_1 S_1) v_1 \delta t - (p_2 S_2) v_2 \delta t = (p_1 - p_2) S_1 v_1 \delta t$.

Le bilan de l'énergie donne alors: $\rho \delta t S_1 v_1 (v_2^2 - v_1^2)/2 + \rho S_1 v_1 \delta t g (h_2 - h_1) = (p_1 - p_2) S_1 v_1 \delta t$, donc $\rho v_2^2/2 + \rho g h_2 + p_2 = \rho v_1^2/2 + \rho g h_1 + p_1$, d'où:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{constante} . \quad (151)$$

L'Eq. 151, qui exprime le théorème de Bernoulli, a des conséquences intéressantes. Tout d'abord, à vitesse nulle on retrouve le résultat statique de l'Eq. 148 (notez le changement de signe entre hauteur et profondeur).

Deuxièmement, le problème d'un liquide qui sort d'un récipient par un orifice (Fig. 55) est facile à résoudre. La pression (externe) est la même tant à l'orifice que à la surface libre du liquide, pour laquelle la vitesse des particules de liquide est (approximativement) nulle. Alors, l'Eq. 151 donne $\rho g h + p = \rho v^2/2 + p$, d'où:

$$v = \sqrt{2g h} ; \quad (152)$$

on appelle cette célèbre équation le "théorème de Torricelli".

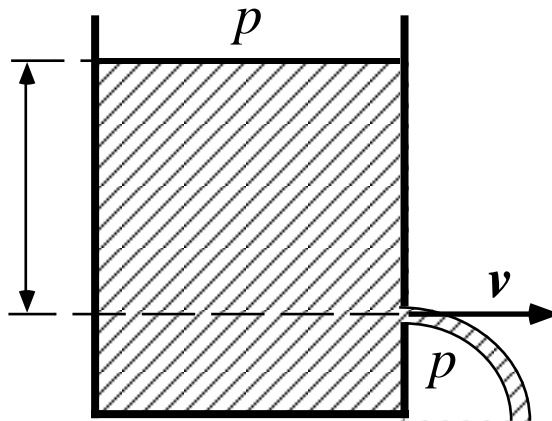


Fig. 55: Dérivation du théorème de Torricelli à partir du théorème de Bernoulli.

Enfin, l'Eq. 151 nous permet de comprendre (quoique très approximativement) le fonctionnement d'un avion, ou même d'un oiseau. Si la hauteur (et donc l'énergie potentielle) reste constante, l'Eq. 151 devient:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{constante} , \quad (153)$$

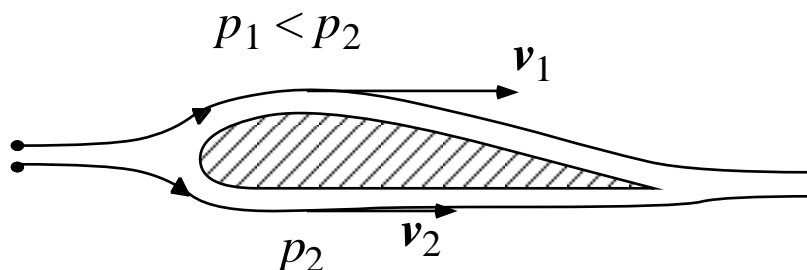
ce qui veut dire qu'à une plus grande vitesse doit correspondre une diminution de pression et inversement. Prenons alors la Fig. 56, montrant la section de l'aile d'un avion en mouvement dans l'atmosphère. Plusieurs aspects de ce phénomène sont équivalents à ceux du phénomène complémentaire: le mouvement du fluide (air) par rapport à l'aile. Supposons qu'il s'agit d'un mouvement stationnaire auquel s'applique l'Eq. 153.

Le parcours d'une molécule de fluide qui passe au-dessus de l'aile est plus long que celui d'une molécule qui passe au-dessous. Par conséquent, sa vitesse est plus élevée, et la pression au-dessus de l'aile est plus petite qu'au-dessous. La conséquence de la différence de pression est une force dans la direction verticale, qu'on appelle la "poussée", et qui permet tant aux avions qu'aux oiseaux de voler.

VIII.5. Mouvement laminaire et turbulence

Le bilan énergétique qui nous a amenés au théorème de Bernoulli n'a pas tenu compte du travail d'éventuelles forces de frottement. Il existe pourtant des forces de ce type, tant internes au liquide qu'entre le liquide et les objets avec lesquels il est en contact (parois etc.). Nous avons déjà traité des phénomènes de ce type, lorsque nous avons introduit la notion de viscosité.

Fig. 56: Analyse du fonctionnement de l'aile d'un avion à l'aide du théorème de Bernoulli.



En présence de viscosité, on peut avoir deux types de mouvement, illustrés par la Fig. 57 dans le cas d'un tube. Le premier cas est celui du mouvement laminaire, illustré par la partie supérieure de la figure. On peut noter une série de couches concentriques; chaque couche est caractérisée par une vitesse spécifique; sa grandeur change d'une couche à l'autre et devient maximale au centre du tube. Pendant le mouvement, les particules d'une couche donnée restent dans celle-ci sans la quitter pour entrer dans d'autres couches.



Les protagonistes de la mécanique des fluides: Blaise Pascal, Johann Bernoulli et Evangelista Torricelli.

Pour le deuxième type de mouvement (Fig. 57, en bas) il n'y a plus de couches ni de relation constante entre vitesse et position. Les mouvements de ce type sont des phénomènes avec turbulence.

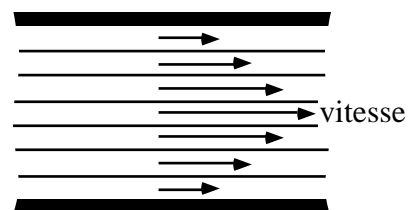
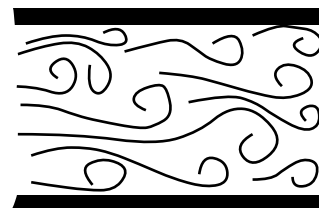


Fig. 57: Mouvement en présence de viscosité: le cas laminaire et le cas de turbulence.



Le passage d'un type de mouvement à l'autre est déterminé par plusieurs facteurs: la vitesse moyenne des particules, la viscosité et la densité du liquide, les caractéristiques géométriques du système (le diamètre du tube dans notre exemple). Les phénomènes de turbulence jouent un rôle d'importance capitale dans la dynamique des véhicules et des avions, ainsi que dans toute une série d'applications pratiques.

Le Coin Yankee:

Pression Pressure
Profondeur Depth
Stationnaire Steady-state
Laminaire Laminar
Turbulence Turbulence

This result is a consequence of the "Pascal principle": because of the impossibility (at least in first approximation) to compress a liquid, the applied pressure is transferred to the entire liquid and in all directions".

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
p (pression)	N/m ²	atmosphère (atm) $\approx 9,8 \times 10^4$ N/m ² ≈ 1 kg-poids/cm ²

“Ma Physique”
Deuxième partie:

Thermodynamique

Table des matières

	Page
IX. La thermodynamique, le réalisme appliqué à la physique	106
X. Les objectifs de la thermodynamique	110
XI. Le gaz "parfait": le point de vue macroscopique	113
XII. Le gaz "parfait": le point de vue microscopique	116
XIII. L'art de calculer les moyennes	121
XIV. Les moyennes pour le gaz parfait	124
XV. La chaleur spécifique et le principe d'équipartition	127
XVI. Généralisation: la probabilité et la loi de Boltzmann	131
XVII. La mesure de la hauteur	135
Appendice: un chemin abrégé vers la physique quantique	137
XVIII. Le gaz de Van der Waals	143
XIX. Transitions de phase du gaz Van der Waals	147
XX. Transitions de phase en général	151
XX.1. La règle de Gibbs ou règle des phases	151
XXI. Les diagrammes de phase	154
XXII. La chaleur latente	158
XXIII. Le premier principe de la thermodynamique	160
XXIII.1. Les signes de la première loi de la thermodynamique	161
XXIII.2. L'énergie interne est une fonction d'état	162
XXIII.3. La question de l'état de référence	163
XXIV. Exemples de transformation pour les gaz; chaleurs spécifiques	165
XXIV.1. Les isothermes	165
XXIV.2. Les transformations à volume constant	166
XXIV.3. Les transformations à pression constante	167
XXIV.4. Les transformations adiabatiques	168
XXV. La chaleur spécifique des solides	170
XXV.1. Chaleurs spécifiques: les limites du traitement classique	171
XXVI. Le deuxième principe	173
XXVII. L'entropie	176
XXVII.1. Une soirée au casino	176
XXVII.2. Du casino aux gaz	176
XXVII.3. L'entropie du point de vue microscopique	177
XXVIII. Entropie, température et chaleur	180
XXIX. Le zéro de l'entropie: principe de Nerst.	184
XXX. L'entropie et le rendement des moteurs thermiques	186
XXXI. Qu'est-ce que réellement la température?	189
XXXII. Applications du deuxième principe	191
XXXIII. L'équation Clausius-Clapeyron	193
XXXIV. Entropie, ordre, désordre et information	196
XXXV. Energie libre et autres fonctions d'état	199
XXXVI. Le transfert de chaleur	201
XXXVII. Diffusion de chaleur : loi de Fourier	204
XXXVII.1. Equation de continuité et équation de diffusion	206
XXXVIII. Transfert de chaleur par rayonnement	213
XXXVIII.1. La loi de Kirchhoff	215
XXXVIII.2. Le corps noir	216
XXXIX. Les phénomènes de diffusion en général	222

IX. La thermodynamique, le réalisme appliqué à la physique.

La deuxième partie de notre cours de physique est consacrée à la thermodynamique. Son objectif principal est d'expliquer aux étudiants/es les notions fondamentales de la physique des systèmes complexes, pour lesquels la partie de la physique qu'on appelle mécanique n'est pas capable de donner des solutions pratiques, mais qui sont d'autre part les plus intéressants pour la technologie, l'ingénierie et les applications.

Le passage de la mécanique à la thermodynamique est stimulé par une exigence pratique: la solution d'un problème dont on a déjà constaté l'existence lorsque nous avons traité les systèmes formés par un très grand nombre de particules. Prenez, par exemple, une bouteille de gaz, qui contient un nombre très élevé de particules: l'ordre de grandeur est donné par la constante d'Avogadro, 6×10^{23} . En principe, la mécanique nous donne les règles pour prévoir le mouvement de chacune de ces particules, si nous connaissons les forces qui agissent sur lui et aussi sa position et sa vitesse à un temps donné.

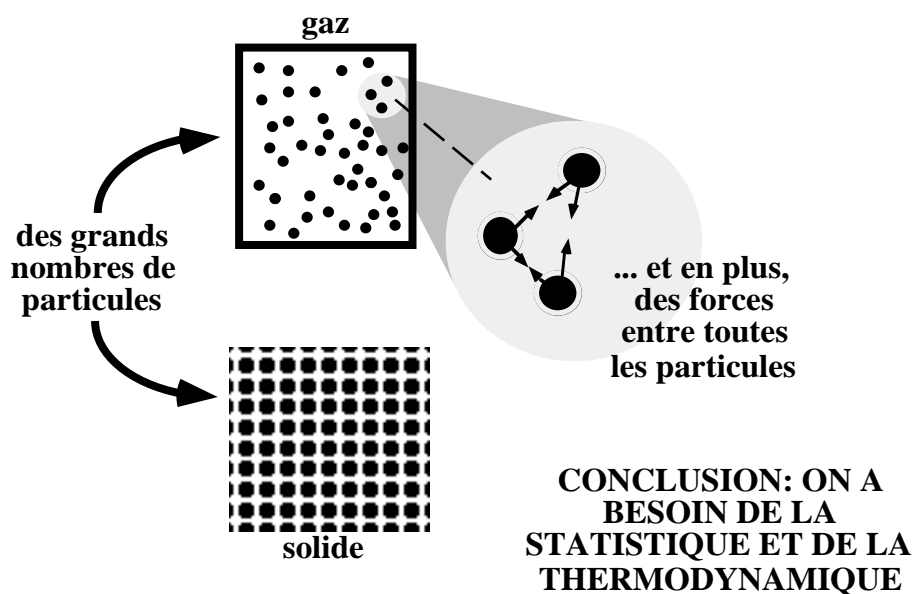


Fig. 58: L'exigence de passer de la mécanique à la thermodynamique et à la théorie statistique est requise tant par le grand nombre de microcomposantes des systèmes réels que par les forces entre ces microcomposantes.

Mais nous ne pouvons pas, évidemment, calculer le mouvement d'un nombre si grand de particules. Le problème se complique du fait que chaque particule engendre des forces qui agissent sur les autres particules - par exemple des forces de gravitation - et qui dépendent de leur position. Ce fait amène presque un paradoxe: pour calculer l'évolution de la position d'une particule de gaz, nous devons connaître les forces qui agissent sur elle, mais pour connaître ces forces nous devrions d'abord savoir quelles sont les positions de toutes les particules, en particulier de celle-là même que nous analysons. La solution est donc mélangée aux données: le traitement d'un problème de ce type devient rapidement plus compliqué si nous augmentons le nombre des particules. En pratique, des solutions, même avec des approximations, sont impossibles à calculer si le nombre de particules n'est pas très limité; le cas d'une bouteille de gaz ne sera jamais calculé particule par particule.

Sommes-nous, d'autre part, vraiment intéressés à connaître la position et la vitesse de chacune des molécules dans une bouteille de gaz? Bien sûr que non: nous sommes plutôt intéressés, pour des raisons pratiques, à l'état global du gaz. Puisque nous parlons de physique, cet "état global" n'est pas une entité vague, mais une notion très pratique,

qui est définie par des quantités que nous mesurons avec des instruments; enfin, par des nombres. Pour notre bouteille de gaz, ces quantités sont le volume V , la pression p et la température T . La pression est définie par le résultat d'une mesure de force divisé par celui d'une mesure de superficie. Quant à la définition de la température, nous devons l'analyser après avoir discuté les propriétés du gaz parfait.

Volume, pression et température sont des propriétés collectives de toutes les particules, et donnent l'état global du gaz. Elles s'appellent donc *variables d'état*. L'état du gaz dans la bouteille est spécifié si nous donnons les trois nombres qui correspondent à la pression, au volume et à la température.

Notez que l'état global du gaz ne suffit pas à identifier l'état de chacune de ses particules. Nous verrons, par exemple, que la température du gaz correspond à l'énergie cinétique moyenne de ses particules. Mais une température donnée et l'énergie cinétique moyenne correspondante peuvent être produites par plusieurs situations diverses en ce qui concerne le mouvement des particules. La pression correspond également à une moyenne, celle des forces causées par les particules de gaz qui frappent la superficie de l'instrument de mesure; une pression donnée peut être produite encore une fois par plusieurs situations de mouvement des particules individuelles, qui correspondent à la même moyenne. Cela correspond à une propriété générale des quantités moyennes; prenez, par exemple, dix personnes dont l'âge moyen est 25 ans: elles peuvent toutes être âgées de 25 ans, ou bien la moitié âgées de 20 ans et l'autre de 30 ans, ou encore une quantité d'autres *distributions* possibles.

La science qui étudie les propriétés moyennes, celles de la physique mais aussi celles de l'économie, de la politique etc., est la *statistique*. La thermodynamique est donc fondée sur la mécanique statistique. Le passage de la mécanique à la mécanique statistique donne parfois des problèmes d'ordre psychologique: la mécanique des masses ponctuelles et des corps solides est d'une simplicité logique très engageante, et paraît capable de fournir des solutions exactes aux problèmes. Par contre, la thermodynamique et la mécanique statistique donnent l'impression d'être plus approximatives et compliquées, sans la beauté formelle de la mécanique.

Cette impression est en contradiction avec la réalité. Les masses ponctuelles et les corps solides de la mécanique, au fond, n'existent pas. Même les particules les plus élémentaires, telles que les électrons et les protons, ont une structure interne et ne fonctionnent pas comme des masses ponctuelles. Et les corps solides! Même si nous les appelons "solides", il sont formés par des atomes dont les positions changent à grand vitesse sous l'effet des vibrations thermiques. Nous ne pouvons pas échapper à la réalité: pour traiter les systèmes pratiques de l'ingénierie, la mécanique ne suffit pas, et nous avons besoin de la thermodynamique avec ses variables du type statistique.

D'autre part, il ne faut pas avoir l'impression que "moyenne" ou "statistique" implique un manque de précision. Au contraire, des faits de la vie quotidienne nous montrent la précision vraiment formidable de quantités moyennes telles que la pression ou la température d'un gaz.

Prenez, par exemple, la pression de l'air sur notre corps. La pression est une force par unité de surface; la pression atmosphérique correspond à une force d'environ 1 kg/cm^2 . La superficie de notre corps est de l'ordre de 1 mètre carré, soit 10^4 cm^2 . Et donc, la pression atmosphérique correspondrait à une force globale de l'ordre de 10000 kg! Nous ne nous sentons pas "poussés" dans une direction particulière par cette force hypothétique, parce que l'action de la pression sur les diverses parties de notre corps est toujours en équilibre, et donne une force globale nulle. Et l'action de la pression externe est également annulée à chaque instant par celle de la pression interne dans notre corps: la moindre rupture de cet équilibre impliquerait l'explosion ou l'implosion.

Mais qu'est-ce qui garantit ces équilibres qui sont si essentiels pour notre vie? La mécanique statistique montre que ce que nous appelons "pression" est l'effet du bombardement continu des surfaces par les particules de gaz, par exemple le bombardement de notre corps par les molécules d'air. L'équilibre qui donne une force globale nulle exige donc que l'effet moyen du bombardement soit toujours le même dans toutes les directions.

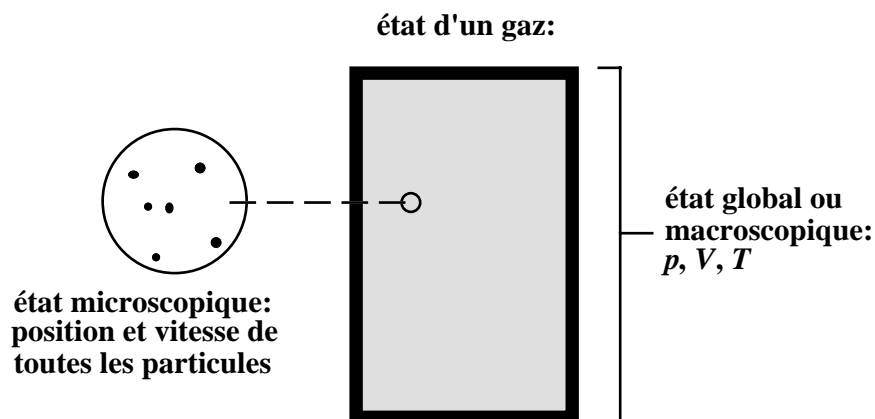


Fig. 59: En considérant un système avec un très grand nombre de microcomposantes, tel qu'un gaz, on doit distinguer son état microscopique de son état global ou macroscopique.

Cela est possible seulement parce que le bombardement est toujours donné par un nombre de particules très grand. Les *fluctuations* statistiques des effets du bombardement sont moins importantes, par rapport à la grandeur des effets, si le nombre de particules est grand, comme le nombre d'Avogadro. Ce résultat correspond à une propriété statistique générale: l'importance relative des fluctuations diminue si le nombre des objets pour lesquels une moyenne est calculée augmente. Ce principe fondamental règle tous les domaines de la science, de la technologie et aussi de notre vie quotidienne.

Pour essayer de comprendre l'importance relative des fluctuations d'une quantité moyenne, prenez par exemple une pièce d'un franc, et donnez aux deux côtés les valeurs 1 et 0. Si vous jetez la pièce sur la table plusieurs fois, disons N fois, la moyenne des résultats approchera évidemment 0,5, mais sans être précisément égale à 0,5. Si vous répétez l'expérience N fois encore, la moyenne du second groupe de résultats approchera aussi 0,5, mais sera différente de la moyenne du premier groupe. D'une manière similaire, un troisième groupe de N résultats donnera une troisième moyenne proche de 0,5. En continuant les expériences, on constatera donc qu'il existe des fluctuations de la moyenne de chaque groupe de résultats par rapport à la valeur 0,5. D'une manière quantitative, on peut estimer l'importance des fluctuations en calculant la moyenne de la grandeur de la différence entre les moyennes et 0,5.

Après avoir répété la série d'expériences avec une valeur plus grande que N , on constatera que la grandeur des fluctuations diminue. On peut montrer que cette diminution suit approximativement la loi $N^{-1/2}$. Ce résultat est assez général; et donc, si vous prenez les fluctuations de température d'un gaz, elles diminueront avec le nombre des particules, et deviendront extrêmement faibles pour un nombre tel que le nombre d'Avogadro.

En résumant, on peut mesurer les variables du type statistique telles que la température d'une bouteille de gaz avec une grande précision grâce au nombre très élevé de

particules de gaz. La température est une des trois *variables d'état* qui décrivent l'état global ou macroscopique du gaz, les deux autres étant la pression et le volume.

On doit noter que les trois variables d'état de la bouteille de gaz ne sont pas toutes du même type: il y a une différence fondamentale entre le volume d'une part et la pression et la température d'autre part. Ces deux dernières variables sont de type *statistique*, étant définies par des moyennes. Au contraire, le volume n'est pas une variable statistique, tout en étant une variable globale du gaz, puisqu'il est précisément donné par la géométrie de la bouteille.

Le Coin Yankee:

Thermodynamique Thermodynamics

Gaz Gas

Particule Particle

Volume Volume

Température Temperature

Etat State

Moyenne Mean, average

Statistique Statistics

Moyenne Statistical average

statistique

Distribution Distribution

Fluctuation Fluctuation

“Volume, pressure and temperature are collective properties of all gas particles, and define the global state of the gas. They are called, therefore, the state variables. The state of the gas in the bottle is specified if we communicate the three numbers that correspond to the pressure, to the volume and to the temperature.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
V (volume)	m ³	litre = 10 ⁻³ m ³
T (température)	K	C

Ordres de grandeur:

N_A (Nombre d'Avogadro): 6 × 10²³

Dimension (linéaire) d'un atome: 10⁻¹⁰ m (1 ångstrom)

Volume d'un atome: 10⁻³⁰ m³

Masse d'un électron: 9 × 10⁻³¹ kg

Masse d'un atome d'hydrogène (ou masse d'un proton ou d'un neutron):
1,7 × 10⁻²⁷ kg

Charge électrique d'un électron (ou d'un proton): 1,6 × 10⁻¹⁹ coulomb

Vitesse de la lumière: 3 × 10⁸ m/s

X. Les objectifs de la thermodynamique.

Quels sont les objectifs de la thermodynamique? Afin de répondre à cette question, il est souhaitable d'analyser la même question dans le cas de la mécanique. Quels sont, par exemple, les objectifs de la mécanique d'une masse ponctuelle? Il y en a deux: premièrement, comprendre et prévoir les conditions d'équilibre, deuxièmement comprendre et prévoir l'évolution du système "masse ponctuelle" en fonction du temps. Dans le premier cas, il s'agit de comprendre les conditions pour avoir une masse dont l'état ne change pas en fonction du temps; cela porte aussi à la *prévision* d'un état constant si les conditions susmentionnées sont vérifiées. Dans le deuxième cas, il s'agit de trouver les relations entre cause et effet en ce qui concerne le mouvement.

Quand nous parlons de l'état de la masse ponctuelle, nous devons évidemment nous référer à des quantités mesurables: sa position (donnée par les trois coordonnées dans l'espace) et sa vitesse (vecteur donné par ses trois composantes). Donc, l'état de la masse est une entité très concrète, l'ensemble de six résultats numériques. Cet état ne change pas en fonction du temps si (1) la force totale est nulle, et (2) la vitesse est aussi nulle à n'importe quel moment. Voilà donc la solution du premier problème, celui de la statique ou de l'équilibre.

D'autre part, le deuxième problème, celui du mouvement ou de la dynamique, est résolu à l'aide de l'équation 14:

$$f = ma ,$$

qui donne la relation entre cause et effet; l'intégration de cette équation nous permet de prévoir le mouvement futur de la particule.

Prenons par exemple le cas particulier de la chute d'une masse, initialement à l'origine du référentiel et à vitesse nulle, soumise à la force de gravité qui cause une accélération constante g dans la direction verticale de l'axe z . L'intégration de l'Eq. 14 porte aux relations $z = gt^2$ et:

$$v_z = (2gz)^{1/2}, \tag{154}$$

où v_z est la vitesse. Cette dernière équation nous permet d'identifier les états possibles de la particule en mouvement. Considérons par exemple l'état défini par les valeurs $z = 1$ m et $v_z = 2$ m/s des variables d'état position et vitesse. Vu que $g \approx 9,8$ m/s², ces deux valeurs sont en conflit avec l'Eq. 154; donc, l'état proposé n'est pas un état possible du système. Par contre, l'état pour lequel $z = 1$ m et $v_z = 4,43$ m/s est en accord avec l'Eq. 154, et donc il est un état possible.

Passons maintenant de la mécanique et des masses isolées à la thermodynamique et aux gaz. L'état d'une bouteille de gaz est donné, comme nous l'avons déjà vu, par les valeurs des trois variables d'état p , V et T . Mais comment est-il possible de discriminer les états possibles de ceux qui ne le sont pas?

Prenons au hasard trois valeurs des variables p , V et T . Est-ce qu'elles définissent un état possible du gaz dans la bouteille? La réponse est fournie par une équation qu'on appelle l'*équation d'état* du système, dont la forme générale est la suivante:

$$f(p, V, T) = 0; \tag{155}$$

où f est une fonction des variables d'état, ce qu'on appelle une *fonction d'état*.

Si les valeurs des variables p , V et T sont en accord avec cette équation, l'état correspondant est un des états possibles du système. Par contre, si les valeurs sont en conflit avec l'équation d'état, elles ne correspondent pas à un état possible.

Le premier objectif de la thermodynamique est donc d'identifier pour chacun des systèmes qui nous intéressent son équation d'état, nous donnant la possibilité d'identifier les états possibles du système. Il est nécessaire de clarifier un point subtil dans la définition de ce qu'est un état "possible" d'un système thermodynamique tel qu'une bouteille de gaz. D'abord, il est nécessaire de pouvoir définir, c'est-à-dire mesurer, les variables d'état statistiques; par exemple, si on parle de la température de la bouteille, on admet que la température est la même partout dans la bouteille, donc qu'il y a une situation homogène.

De plus, les états possibles définis par l'équation d'état ont la propriété de ne pas changer sans des interventions de l'extérieur. Admettez par exemple qu'une bouteille de gaz se trouve dans l'état correspondant à trois valeurs données de p , V et T qui sont en accord avec son équation d'état; ces valeurs ne changent pas en fonction du temps, sauf s'il y a une cause externe. Au lieu d'utiliser le mot état *possible*, on préfère donc parler d'état *d'équilibre*. Mais attention: il ne s'agit pas d'équilibre dans le sens de la mécanique; les particules de gaz sont toutes en mouvement! Il s'agit au contraire d'un équilibre global, d'un équilibre thermodynamique, qui touche seulement les variables globales du système et non ses microcomposantes individuelles (les particules de gaz).

L'équation d'état fournit donc la solution au premier problème de la thermodynamique, celui de la statique ou manque d'évolution. Mais nous sommes bien sûr aussi intéressés à l'évolution d'un système: on ne peut pas construire des moteurs avec la statique! Le deuxième problème de la thermodynamique est donc de trouver les règles qui gouvernent l'évolution des systèmes compliqués.

Ces règles concernent encore une fois les états du système analysé, et plus spécifiquement le changement d'un état à l'autre. Ces règles du jeu sont donc données à l'aide de fonctions d'état, c'est-à-dire de fonctions des variables d'état. Nous verrons, par exemple, que les deux règles principales concernent les deux fonctions d'état qu'on appelle *énergie interne* et *entropie*.

Avant de terminer cette discussion préliminaire, je vous invite à noter que l'évolution d'un état d'équilibre à l'autre peut avoir lieu de deux manières différentes. Premièrement, elle peut passer par des états intermédiaires qui sont tous des états d'équilibre du système, c'est-à-dire en accord avec l'équation d'état. Mais il y a aussi la possibilité qu'au moins une partie des états intermédiaires ne soient pas des états d'équilibre. Prenez, par exemple, une explosion à l'intérieur d'une bouteille de gaz: les états intermédiaires du changement qu'elle produit ne donnent même pas la possibilité de définir des variables statistiques comme la température, à raison du manque d'homogénéité dans le gaz.

Cette distinction est très importante pour des raisons que nous clarifierons plus tard; pour l'instant, il suffit de mentionner qu'on appelle *réversibles* les changements du premier type, et *irréversibles* ceux du deuxième. Encore une fois, il faut utiliser ces mots avec prudence: une transformation "irréversible" selon cette définition n'est pas une transformation qu'on ne peut pas inverser. Il est, au contraire, toujours possible de remettre le système à l'état initial à l'aide d'actions appropriées de l'extérieur. "Irréversible" en thermodynamique veut dire qu'on ne peut pas suivre en sens inverse la même série d'états intermédiaires, la raison étant que ces états ne sont pas définis parce qu'ils ne sont pas des états d'équilibre.

En ajoutant la finesse à la finesse, notons que les états intermédiaires d'un changement réversible ne peuvent pas être des états de *parfait* équilibre, parce qu'ils ne changeraient pas du tout; on doit avoir une petite perturbation de l'extérieur qui stimule l'évolution. On dit donc que les états intermédiaires sont "infiniment proches" des états d'équilibre. Ce qui veut dire, en pratique, que la perturbation est assez grande pour causer le changement d'état, mais aussi assez faible pour ne pas influencer la précision de la mesure des variables d'état.

Le Coin Yankee:

<i>Equilibre</i>	<i>Equilibrium</i>
<i>Equation</i>	<i>Equation</i>
<i>Equation d'état</i>	<i>State Equation</i>
<i>Fonction</i>	<i>Function</i>
<i>Fonction d'état</i>	<i>State function</i>
<i>Energie interne</i>	<i>Internal energy</i>
<i>Entropie</i>	<i>Entropy</i>
<i>Changement</i>	<i>Change</i>
<i>Réversible</i>	<i>Reversible</i>
<i>Irréversible</i>	<i>Irreversible</i>

"Irreversible in thermodynamics means that one cannot follow in reverse the same sequence of intermediate states, the reason being that such states are not defined, because they are not equilibrium states."

XI. Le gaz "parfait": le point de vue macroscopique.

Passons maintenant des généralités aux cas particuliers, et tout d'abord, au problème de l'état d'une bouteille de gaz: quelle est la forme spécifique de l'équation d'état pour ce système? On peut arriver à ce résultat, comme nous le verrons plus tard, avec une analyse statistique du mouvement des molécules de gaz. Mais la solution avait été obtenue bien avant la formulation de cette théorie statistique, à l'aide d'une série d'expériences et de constatations empiriques. L'équation d'état qu'on avait trouvée avait la forme générale de l'Eq. 155, avec $f(p, V, T) = pV - nRT = 0$. et donc:

$$pV = nRT, \quad (156)$$

où R est une constante, dite constante du gaz parfait, et n est la quantité de gaz dans la bouteille. Cette quantité est mesurée en utilisant comme unité la *mole*, qui est la quantité de gaz correspondant à un nombre de particules égal au *nombre d'Avogadro*,

$$N_A \approx 6,02 \times 10^{23}; \quad (157)$$

si le gaz analysé est formé de N particules, nous avons évidemment en ce qui concerne le nombre de moles:

$$n = N/N_A. \quad (158)$$

Quant à la constante R , sa valeur dans le système SI est de 8,31 Joule/K, où le symbole "K" correspond aux degrés Kelvin.

La version graphique de l'Eq. 156 est montrée par la Fig. 60. Les courbes de cette figure sont des *isothermes*, c'est-à-dire les fonctions $p(V)$ données par l'Eq. 156 si on garde la température constante. On observe dans la figure une série d'isothermes calculées pour une série de valeurs de la température. Chaque isotherme est une courbe hyperbolique du type $pV = \text{constante}$, qui correspond au phénomène bien connu de diminution du volume d'un gaz lorsque la pression augmente à température constante.

L'équation 156 a deux points qui sont particulièrement intéressants:

1. La composition chimique du gaz ne joue aucun rôle dans l'équation: tous les gaz se comportent de la même manière.
2. La pression et le volume ne pouvant pas devenir négatifs, l'Eq. 156 implique que la température T est aussi positive.

Ce deuxième point veut dire que la température dans l'Eq. 156 n'est pas mesurée avec les unités ordinaires, les degrés Celsius (C), qui donnent des valeurs tant positives que négatives. Elle est mesurée au contraire à partir de la température du zéro absolu, qui est donnée par exemple par la pression nulle. Le zéro absolu correspond à $-273,16$ C, et on passe donc des degrés Celsius aux degrés Kelvin de l'Eq. 156 en augmentant la valeur de 273,16.

Cette réflexion nous amène aussi à l'analyse de la définition même de température. En tant que quantité physique, la température doit être définie en spécifiant la méthode pour la mesurer. On peut donc commencer à définir la température avec les méthodes empiriques de mesure, qui se basent sur les thermomètres comme ceux à mercure. Mais cette définition n'est pas rigoureuse, parce qu'elle dépend du thermomètre qu'on utilise, et donc elle ne nous donne pas la possibilité de communiquer la définition à une

autre personne sans spécifier quel thermomètre celle-ci doit utiliser pour arriver à des mesures de température conformes aux nôtres.

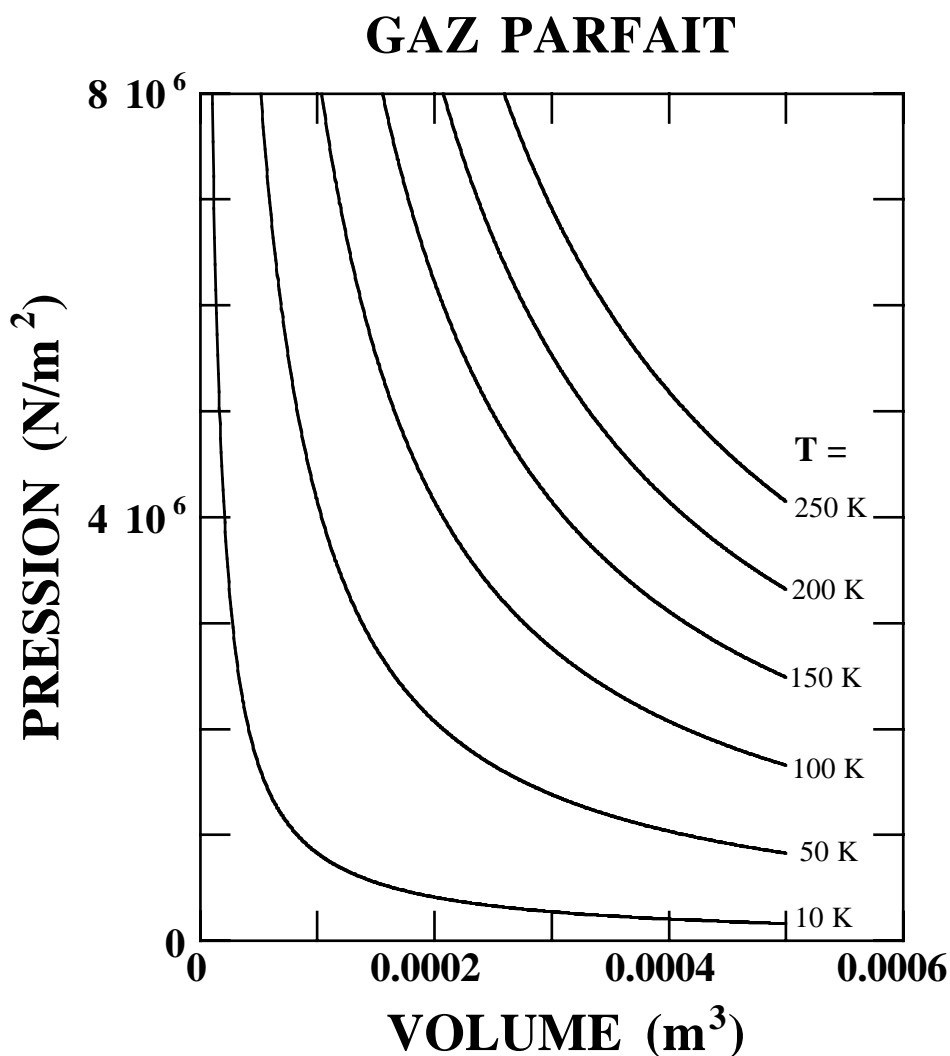


Fig. 60: Version graphique de l'Eq. 156 pour le gaz parfait.

L'Eq. 156 nous donne une solution à ce problème: elle est, effectivement, une bonne *définition de la température*. Elle nous dit que pour mesurer la température d'un système, on doit le mettre en contact thermique avec un gaz, et ensuite mesurer son volume et sa pression. Avec ces mesures géométriques ou mécaniques, l'Eq. 156 nous donne la température. L'avantage par rapport à la définition empirique est que le "thermomètre", c'est-à-dire la bouteille de gaz, est universel: on peut le construire avec n'importe quel gaz puisque tous les gaz sont gouvernés par la même loi, et donc on n'est pas forcé de préciser le type de gaz lorsqu'on essaie de communiquer la définition de température à une autre personne.

En ce qui concerne les applications pratiques, on peut calibrer tous les types de thermomètres à l'aide du thermomètre à gaz, et donc donner un caractère d'universalité à toutes les mesures empiriques de température. Nous reprendrons plus tard la question fondamentale de définition de la température.

Enfin, il y a des limites à la validité de l'Eq. 156. Pratiquement parlant, les résultats des mesures montrent que les gaz se comportent à peu près comme il est prévu par l'Eq. 156. On constate en plus que le comportement est plus conforme aux prévisions de l'Eq. 156 si le gaz est assez raréfié et/ou à haute température. Les raisons de ces propriétés deviendront claires après avoir discuté les gaz du point de vue microscopique.

On doit donc conclure que l'Eq. 156 donne un comportement limite, auquel celui des gaz réels est plus ou moins similaire. Pour un gaz donné, l'Eq. 156 fonctionne avec plus de précision si on diminue la densité et/ou si on augmente la température. Le cas limite de validité parfaite de l'Eq. 156 est connu sous le nom de "gaz parfait" ou "gaz idéal". Un gaz parfait est donc un gaz qui est précisément décrit par l'Eq. 156. Les conséquences microscopiques de cette définition seront clarifiées par la discussion microscopique qui suit.

Le Coin Yankee:

<i>Gaz parfait</i>	<i>Ideal gas</i>
<i>Mole</i>	<i>Mole</i>
<i>Isotherme</i>	<i>Isotherm</i>
<i>Degrés Kelvin</i>	<i>Kelvin degrees</i>
<i>Zéro absolu</i>	<i>Absolute zero</i>
<i>Thermomètre</i>	<i>Thermometer</i>

“Every isotherm is a hyperbolic curve of the type $pV = \text{constant}$, corresponding to the well-known phenomenon of the decrease in volume of a gas when the pressure increases at constant temperature.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

Ordres de grandeur:

R (constante du gaz parfait) = 8,31 joule/K.

XII. Le gaz "parfait": le point de vue microscopique

Quelle sont les propriétés dominantes d'un gaz quelconque lorsque sa densité diminue? Considérons la composition microscopique d'un gaz: il s'agit d'une collection de N particules en mouvement. Chaque particule a un volume a , et donc le volume total du gaz, sans le mouvement des particules, serait Na . Mais le volume réel V est beaucoup plus grand; à la limite, pour un gaz très raréfié on peut négliger Na par rapport à V .

Deuxièmement, considérons les forces qui agissent sur les particules. Elles sont de deux types: les forces internes et les forces externes. Mais comment peut-on distinguer les unes des autres? Il est nécessaire de tenir compte d'une des propriétés fondamentales de la nature: les forces entre deux objets *diminuent si leur distance augmente*. Par exemple, tant l'attraction de gravitation entre les masses que les forces électrostatiques entre les charges électriques diminuent avec l'inverse du carré de la distance.

Afin de distinguer les forces internes et les forces externes du système, on peut donc prendre chaque particule et l'éloigner des autres particules de gaz, et contrôler à la limite de grande distance quelle est la force qui continue à agir toujours sur la particule. On comprend donc que la propriété de diminution des forces avec la distance est essentielle pour définir la différence entre forces internes et externes, et également pour arriver à l'idée d'un système isolé de l'extérieur.

La même procédure logique nous dit que pour un gaz raréfié, dont les particules se trouvent à de grandes distances les unes des autres, les forces internes diminuent. A la limite, pour un gaz parfait nous ne considérerons que les forces externes.

Cette analyse nous mène à une modélisation microscopique du comportement du gaz parfait, défini par l'Eq. 156. Les hypothèses de ce modèle sont que les particules de gaz ont un volume négligeable, et qu'elles ne sont pas soumises à des forces internes. On fait en plus l'hypothèse qu'on n'a pas de forces externes au système bouteille + gaz. En ce qui concerne les forces entre les parois de la bouteille et le gaz, nous ferons l'hypothèse qu'elles sont de type *élastique*, c'est-à-dire qu'une particule de gaz qui arrive sur la paroi est reflétée sans perte d'énergie cinétique.

Quelle est donc la nature microscopique de ce qu'on appelle *pression*, la force par unité de superficie qu'on peut mesurer sur les parois de la bouteille? Cette force est évidemment causée par la multitude de particules qui frappent la paroi par unité de temps. Le nombre et les vitesses des particules changent continuellement, mais ces fluctuations sont modérées en raison du nombre très élevé des particules impliquées.

Essayons de mettre ce dernier point dans une forme quantitative: combien de particules sont impliquées dans une mesure typique de pression? Supposons que la mesure dure $t = 10$ s, et qu'elle a lieu sur une superficie $S = 0,01$ m² de la paroi. Supposons également, pour simplifier notre analyse, que toutes les particules de gaz se déplacent à la même vitesse, v . Cette quantité doit évidemment correspondre à une moyenne des vitesses réelles des particules; mais quel type de moyenne? Ce point sera clarifié plus tard.

Quelles sont les particules qui arrivent sur S pendant le temps t ? Considérons la direction z perpendiculaire à S : pour arriver, une particule ne peut pas être à une distance de S de plus de $v_z t$, v_z étant la vitesse pour la direction z . Notez que:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (159)$$

Notez également que la direction z n'est pas une direction avec des propriétés particulières par rapport aux deux autres directions x et y , en ce qui concerne les

particules de gaz. Au contraire, les trois directions ont des propriétés équivalentes puisqu'il n'y a pas de forces externes. On est donc forcé de conclure que $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$, et l'Eq. 159 donne par conséquent:

$$v_z^2 = v^2/3. \quad (160)$$

Les particules qui arrivent sur la surface S pendant le temps t sont celles qui se trouvent dans un volume de gaz dont la base est S et la hauteur $v_z t = vt/\sqrt{3}$. Combien de particules trouve-t-on dans ce volume $Svt/\sqrt{3}$? Si le nombre total de particules de gaz est N , et son volume est V , la densité (nombre de particules par unité de volume) est N/V ; dans le volume $Svt/\sqrt{3}$ on trouve donc $(Svt/\sqrt{3})(N/V)$ particules.

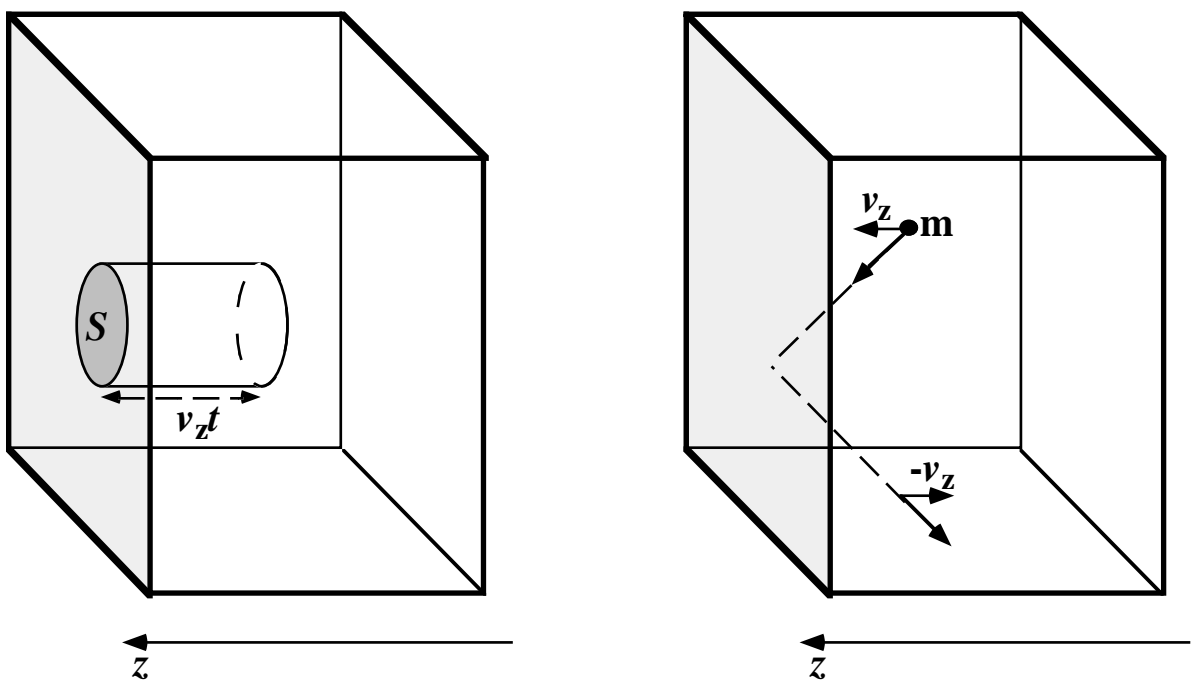


Fig. 61: (Gauche) seules les particules qui se trouvent dans un cylindre de hauteur $v_z t$ peuvent arriver sur la surface S pendant le temps t . (Droite) la réflexion des particules (avec conservation de l'énergie cinétique et de la grandeur de la vitesse) donne la pression.

Notez toutefois que seulement une partie de ces particules arriveront sur la surface pendant le temps t : celles dont la vitesse est orientée *vers* la paroi. Encore une fois, il n'y a pas de différence entre cette direction et la direction opposée en ce qui concerne les particules de gaz, et donc statistiquement 50% des particules du volume $Svt/\sqrt{3}$ voyageront dans la direction correcte pour arriver sur la paroi. La conclusion est que pendant le temps t on a $(Svt/\sqrt{3})(N/V)/2$ particules qui arrivent sur la surface S .

Sur le plan quantitatif, supposons que N est égal au nombre d'Avogadro, que le volume est d'un litre, soit $0,001 \text{ m}^3$, et que la vitesse moyenne est de 500 m/s (ce dernier ordre de grandeur sera justifié plus tard). On trouve donc que le nombre de particules qui arrivent sur la surface S est $(0,01 \times 500 \times 10/\sqrt{3})(6 \times 10^{23}/0,001)/2 \approx 10^{28}$: un nombre sûrement assez élevé pour avoir des fluctuations statistiques de grandeur très limitée.

Le calcul précédent nous donne aussi les instruments logiques pour comprendre la cause de la pression sur la paroi avec notre modèle microscopique. Chaque particule qui rebondit sur la paroi change sa quantité de mouvement; en ce qui concerne la direction perpendiculaire à la paroi, la quantité de mouvement garde sa grandeur, mais sa direction est inversée. Donc, le changement est de $mv_z - (-mv_z) = 2mv_z =$ [voir l'Eq. 160] $= 2mv/\sqrt{3}$, où m est la masse de chaque particule. Pendant le temps t , le changement total de quantité de mouvement de toutes les particules qui arrivent sur la paroi est $(Svt/\sqrt{3})(N/V)/2$, le nombre de ces particules, multiplié par $2mv/\sqrt{3}$. En conclusion, le changement par unité de temps de la quantité de mouvement est donné par $((Svt/\sqrt{3})(N/V)/2)(2mv/\sqrt{3})/t = (mSv^2/3)(N/V)$.

La bouteille de gaz n'étant pas soumise à des forces externes, ce changement de quantité de mouvement doit être compensé par la force de la paroi sur le gaz: voilà donc l'origine de la "pression". La force, selon le théorème de la quantité de mouvement, est égale au changement de quantité de mouvement par unité de temps, et donc:

$$\text{force} = (mSv^2/3)(N/V). \quad (161)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la pression, qui est la force divisée par la superficie:

$$p = \frac{\text{force}}{S} = mv^2N/3V, \quad (162)$$

et donc:

$$pV = mv^2N/3. \quad (163)$$

Comparons maintenant l'Eq. 163 à l'Eq. 156, c'est-à-dire à la loi du gaz parfait:

$$pV = nRT .$$

Nous arrivons immédiatement à une conclusion fondamentale: il y a une correspondance directe entre la température et la quantité mv^2 ! Mais nous connaissons bien cette quantité: divisée par deux, elle est l'énergie cinétique de la particule, $mv^2/2$.

On peut maintenant combiner les équations 163 et 156, ce qui nous donne $mv^2N/3 = nRT$, et donc:

$$N \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} nRT. \quad (164)$$

L'interprétation de ce dernier résultat est à la fois simple et très intéressante. La quantité v^2 étant donnée par une moyenne statistique sur toutes les particules de gaz, on trouve que $mv^2/2$ est l'énergie cinétique moyenne des mêmes particules. L'Eq. 164 révèle donc une relation entre ce qu'on appelle "température" et l'énergie cinétique moyenne du gaz. Pour préciser cette relation, nous écrivons l'Eq. 164 comme suit:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (165)$$

où la constante k , dite constante de Boltzmann, est donnée par $(n/N)R$, et donc [voir l'Eq. 158]:

$$k = R/N_A = 1,38 \times 10^{-23} \text{ Joule/K.} \quad (166)$$

L'Eq. 165 nous dit que l'énergie cinétique moyenne d'une particule de gaz parfait est *déterminée seulement par la température*. Et donc, la température sur le plan microscopique est une mesure de l'énergie moyenne.

Quelle est, par exemple, l'énergie cinétique moyenne des molécules d'un gaz parfait à la température ambiante, qui est par convention de 300 K (27 C environ, ce qui donne une température confortable)? L'Eq. 165 nous donne $mv^2/2 = 3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 300/2 \approx 6 \times 10^{-21}$ Joule. Afin de comprendre la grandeur de cette énergie cinétique, comparez la à celle d'une personne qui court à la vitesse (digne des jeux olympiques!) de 100 m en 10 s, soit 10 m/s. Admettons que le poids de cette personne soit de 70 kg: son énergie cinétique est de $70 \times 10^2/2 = 3,5 \times 10^3$ Joule, ce qui représente 24 ordres de grandeur de plus que l'énergie des particules de gaz.

Notez toutefois que cette différence est principalement causée par la différence des masses entre la personne et la particule. Essayons de calculer cette différence à la vitesse, en estimant combien de "particules" se trouvent dans une personne type. On modélisera cette personne avec un volume d'environ $2 \times 0,2 \times 0,3 = 0,12 \text{ m}^3$; nous savons que l'ordre de grandeur de la largeur d'un atome est d'un angström, c'est-à-dire de 10^{-10} m , et donc celui de son volume est de 10^{-30} m^3 . Mettons que la particule type d'une personne soit composée par 10 atomes, avec un volume total de l'ordre de 10^{-29} m^3 ; le nombre total de particules de la personne est approximativement $0,12/10^{-29} \approx 10^{28}$. La masse de la personne est répartie entre ces 10^{28} particules, ce qui donne une masse par particule de l'ordre de $70/10^{28} \approx 10^{-26} \text{ kg}$.

Voilà donc que la différence d'énergie cinétique entre la personne et la particule de gaz est presque entièrement liée à la différence de masse: la vitesse de la particule doit être même plus élevée que celle de la personne, pour arriver au rapport susmentionné des énergies cinétiques. Afin de compenser les 26 ordres de grandeur de différence entre les masses et arriver aux 24 ordres de grandeur de différence entre les énergies cinétiques, on doit augmenter la vitesse de deux ordres de grandeur, passant de 10 à 10^3 m/s . Et donc notre hypothèse précédente, d'une vitesse de l'ordre de 500 m/s pour une molécule de gaz, est raisonnable.

Notre calcul approximatif de la masse d'une particule de gaz est aussi raisonnable; on peut arriver à un résultat similaire en considérant la masse d'un atome, qui est essentiellement la masse des protons et des neutrons dans son noyau. La masse d'un proton ou d'un neutron est de $1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, et le nombre de protons et neutrons dans le noyau peut varier de 1 à 248, donc la masse d'un atome est dans le domaine de $1,7 \times 10^{-27}$ à $4 \times 10^{-25} \text{ kg}$, comprenant la valeur de 10^{-26} kg que nous avons utilisée pour notre analyse précédente.

Le Coin Yankee:

Microscopique *Microscopic*
Macroscopique *Macroscopic*
Rarefié *Rarefied*
Quantité de *Momentum*
mouvement
Atome *Atom*

“Equation 165 says that the average kinetic energy of a particle of ideal gas is only determined by the temperature. From the microscopic point of view, therefore, the temperature measures the average energy.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

Ordres de grandeur:

k (constante de Boltzmann) = $R/N_A = 1,4 \times 10^{-23}$ Joule/K.

XIII. L'art de calculer les moyennes.

La dérivation de l'Eq. 165, c'est-à-dire de la relation entre énergie cinétique moyenne et température, se base sur l'hypothèse que la vitesse v est une moyenne calculée sur les vitesses des particules de gaz. Il est en fait nécessaire d'analyser plus précisément cette idée de moyenne. On peut bien comprendre, par exemple, que v ne peut pas être la moyenne des vitesses, parce que cette moyenne est simplement nulle. Cette conclusion est immédiate et donnée par la mécanique: si toutes les particules ont la même masse, la vitesse moyenne est aussi celle du centre de masse du gaz. Mais sans forces externes et sans mouvement initial du centre de masse, celui-ci a une vitesse nulle.

Donc, quel type de moyenne peut donner v ? Afin de répondre à cette question, il est d'abord nécessaire d'analyser en général la méthode pour calculer les moyennes. Considérez par exemple la moyenne d'âge d'un groupe donné de personnes. Le groupe comprend dix personnes, avec les âges suivants:

18, 18, 19, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 22;

pour calculer l'âge moyen, on prend la somme des âges individuels divisée par le nombre des personnes:

âge moyen = $(18 + 18 + 19 + 19 + 19 + 20 + 21 + 21 + 22 + 22)/10 = 19,9$.

Le même calcul peut néanmoins être exécuté en groupant d'abord les personnes qui ont le même âge; on arrive à la *distribution* suivante:

Age	Nombre de personnes
18	2
19	3
20	1
21	2
22	2

La moyenne est calculée en prenant la somme de chaque âge multiplié par un coefficient donné par le nombre des personnes qui ont le même âge, divisé par le nombre total de personnes:

âge moyen = $18 \times (2/10) + 19 \times (3/10) + 20 \times (1/10) + 21 \times (2/10) + 22 \times (2/10) = 19,9$.

Essayons maintenant de généraliser; prenons un système (tel qu'un groupe de personnes) avec N microcomposantes (telles que des personnes individuelles). Nous devons calculer la moyenne d'une quantité caractéristique ξ (telle que l'âge) sur tout le système. Supposons que cette quantité peut avoir les valeurs $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, généralement ξ_i . Nous devons d'abord trouver la *fonction de distribution* de cette quantité; pour chaque valeur ξ_i la fonction de distribution $G(\xi_i)$ est donnée par le nombre de microcomposantes $n(\xi_i)$ qui ont cette valeur, divisé par le nombre total de microcomposantes N . D'autre part, N est aussi donné par:

$$N = \sum_i n(\xi_i), \quad (167)$$

la somme étant calculée pour toutes les valeurs ξ_i . La définition de la fonction de distribution est donc la suivante:

$$G(\xi_i) = \frac{n(\xi_i)}{\sum_i n(\xi_i)} . \quad (168)$$

La moyenne de la quantité ξ est évidemment donnée par:

$$\langle \xi \rangle = \sum_i \xi_i G(\xi_i). \quad (169)$$

L'avantage de cette approche est qu'elle peut être facilement généralisée. Supposons qu'au lieu de devoir calculer la moyenne de ξ , nous devons calculer la moyenne d'une fonction de ξ , par exemple de ξ^2 . Si vous considérez l'analyse précédente, vous réalisez que la fonction de distribution est la même pour ξ et pour ξ^2 , et donc:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sum_i \xi_i^2 G(\xi_i). \quad (170)$$

Ce résultat peut être généralisé à une fonction quelconque $f(\xi)$:

$$\langle f(\xi) \rangle = \sum_i f(\xi_i) G(\xi_i). \quad (171)$$

L'analyse précédente concerne des variables qui ont des valeurs discrètes; par exemple, on n'a considéré pour la variable "âge" que des valeurs entières 18, 19, 20, 21 et 22. Mais on peut aussi passer aux variables qui ne sont pas discrètes.

L'âge même nous en fournit un exemple: on peut commencer à considérer les âges tels que 18,5 ou 18,1 ans. On arrive à réaliser que l'âge est une variable continue, qui peut avoir une valeur réelle positive quelconque et non pas seulement des valeurs entières. Comment peut-on définir la fonction de distribution pour une variable continue?

D'abord, on doit prendre l'intervalle des valeurs possibles pour la variable ξ , de la valeur minimum ξ_m à la valeur maximum ξ_M . Dans le cas de l'âge, la limite minimum de l'intervalle est évidemment zéro; mettons que, pour le groupe de personnes considéré, l'âge maximum soit de 23 ans; l'intervalle est donc de 0 à 23 ans. Ensuite, on doit imaginer de diviser l'intervalle $\xi_m - \xi_M$ en parties égales de largeur $\Delta\xi$. Prenons la partie qui comprend les âges de ξ à $\xi + \Delta\xi$; le nombre $n(\xi)$ de personnes dans cette tranche d'âge augmente évidemment avec la largeur $\Delta\xi$, et il peut donc être écrit comme suit:

$$n(\xi) = g(\xi)\Delta\xi. \quad (172)$$

Si nous passons à la limite de très petites largeurs, $\Delta\xi \rightarrow d\xi$, l'Eq. 172 devient:

$$dn(\xi) = g(\xi)d\xi, \quad (173)$$

et l'Eq. 168, c'est-à-dire la définition de la fonction de distribution, peut être transformée de la manière suivante pour le cas d'une variable continue:

$$G(\xi) = \frac{g(\xi_i)}{\int_{\xi_m}^{\xi_M} g(\xi)d\xi} . \quad (174)$$

Les autres formules concernant les moyennes sont également transformées en remplaçant les sommes de quantités discrètes par des intégrales:

$$\langle \xi \rangle = \int_{\xi_m}^{\xi_M} \xi G(\xi) d\xi; \quad (175)$$

$$\langle f(\xi) \rangle = \int_{\xi_m}^{\xi_M} f(\xi) G(\xi) d\xi. \quad (176)$$

Afin de clarifier l'utilisation de ces formules, considérons l'exemple suivant. Nous avons une quantité de voitures, sur l'autoroute Lausanne-Genève, dont la distribution de vitesses est uniforme entre les limites 60 et 130 km/h; quelle est la vitesse moyenne?

Evidemment, la fonction $g(\xi)$ est, entre ces limites de 60 et 130 km/h, une constante que nous appellerons g_0 . L'Eq. 176 donne:

$$G(\xi) = g_0 / \int g_0 d\xi = g_0 / g_0(\xi_M - \xi_m) = 1 / (\xi_M - \xi_m).$$

La vitesse moyenne donnée par l'Eq. 176 est:

$$\int \xi G(\xi) d\xi = \int \xi (1 / (\xi_M - \xi_m)) d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) \int \xi d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) ((\xi_M^2 - \xi_m^2) / 2) = (\xi_M + \xi_m) / 2 = (130 + 60) / 2 = 95 \text{ km/h.}$$

Passons maintenant au temps moyen pour arriver de Lausanne à Genève, dont la distance D est approximativement de 70 km. Le temps pour une voiture qui roule à la vitesse ξ est D/ξ ; il s'agit donc de trouver, à l'aide de l'Eq. 176, la moyenne de la fonction $f(\xi) = D/\xi$. On trouve:

$$\langle D/\xi \rangle = \int (D/\xi) ((1 / (\xi_M - \xi_m)) d\xi = (1 / (\xi_M - \xi_m)) \int (D/\xi) d\xi = (D / (\xi_M - \xi_m)) \ln(\xi_M / \xi_m) \approx 0,77 \text{ h.}$$

Notons que ce temps moyen est supérieur au temps minimum de $70/130 \approx 0,54$ h, et inférieur au temps maximum de $70/60 \approx 1,17$ h. Notez toutefois que la moyenne de la fonction D/ξ n'est pas égale au rapport de D et de la moyenne de ξ , qui donnerait $70/95 \approx 0,74$.

Le Coin Yankee:

<i>Centre de masse</i>	<i>Center of mass</i>
<i>Fonction de distribution</i>	<i>Distribution function</i>
<i>Continu</i>	<i>Continuous</i>
<i>Discrète</i>	<i>Discrete</i>
<i>Intégrale</i>	<i>Integral</i>

“First, we must find the distribution function of this quantity; for each value x_i the distribution function $G(x_i)$ is given by the number of microcomponents $n(x_i)$ that have that value, divided by the total number of microcomponents, N .”

XIV. Les moyennes pour le gaz parfait.

Passons maintenant du cas général au cas spécifique des molécules d'une bouteille de gaz. L'Eq. 165 a été dérivée en supposant que les particules, même si elles se déplacent dans des directions différentes, ont toutes des vitesses de la même grandeur v . En réalité, la grandeur de la vitesse change d'une particule à l'autre. Une dérivation plus générale qui tient compte de cette distribution des vitesses montre que l'Eq. 165 est toujours valable, mais sous la forme:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (177)$$

qui est une relation entre la température et la moyenne de la fonction v^2 . Notez que le carré élimine le signe du vecteur vitesse, ce qui permet à la fonction v^2 d'avoir une moyenne non nulle.

Analysons donc la fonction de distribution $G(v)$ pour la grandeur v de la vitesse des particules, afin d'arriver à la moyenne de v^2 . Nous ne dériverons pas cette fonction de distribution, et mentionnerons seulement que la dérivation se base sur des propriétés fondamentales du gaz, telles que la conservation de son énergie et du nombre de particules.

Le résultat de la dérivation est le suivant:

$$G(v) = G_0 (v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT), \quad (178)$$

où G_0 est une constante (c'est-à-dire une quantité indépendante de v et de la température T), donnée par:

$$G_0 = \sqrt{2/\pi} N(m/k)^{3/2}, \quad (179)$$

et m , N sont la masse de chaque particule et le nombre total de particules.

La distribution de l'Eq. 179, dite distribution de Maxwell, est montrée par la Fig. 62 pour une série de valeurs de la température. On peut constater que le maximum de la distribution se déplace à des valeurs plus hautes lorsqu'on augmente la température du gaz.

En ce qui concerne la moyenne de v^2 , on trouve:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} G(v) v^2 dv = \frac{3kT}{m}, \quad (180)$$

en accord avec l'Eq. 177.

Notez que la distribution de Maxwell s'applique à n'importe quel système dont le comportement est équivalent à celui du gaz parfait. Comme par exemple, avec quelques approximations, aux électrons libres dans un échantillon métallique.

La dérivation théorique de la distribution de Maxwell doit être confirmée par les résultats expérimentaux avant d'être acceptée. Comment peut-on donc mesurer une fonction de distribution? On ne peut évidemment pas mesurer le nombre de particules dont la vitesse se trouve dans un intervalle infiniment petit $v - v + dv$. Ce qu'on fait est

de filtrer les particules dont la vitesse se trouve dans un intervalle petit mais pas "infiniment petit", $v \rightarrow v + \Delta v$, de mesurer leur nombre, et de répéter la mesure pour une série d'intervalles. La Fig. 63 montre un appareil pour effectuer des mesures de ce type.

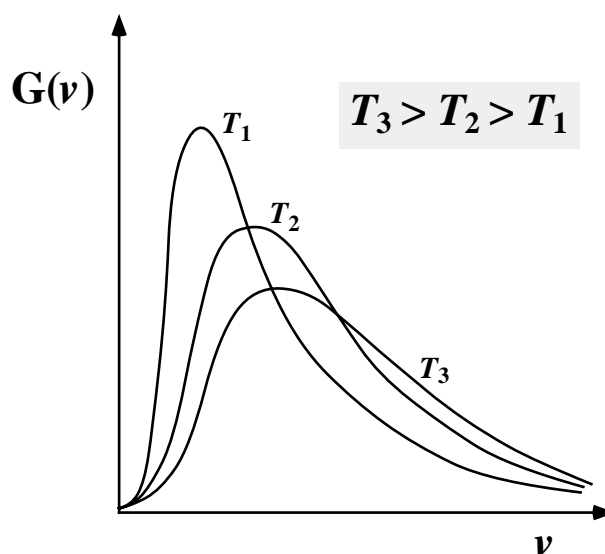


Fig. 62: Version graphique de la distribution de Maxwell, Eq. 178; les courbes correspondent à trois températures du gaz.

mesure de $G(v)$

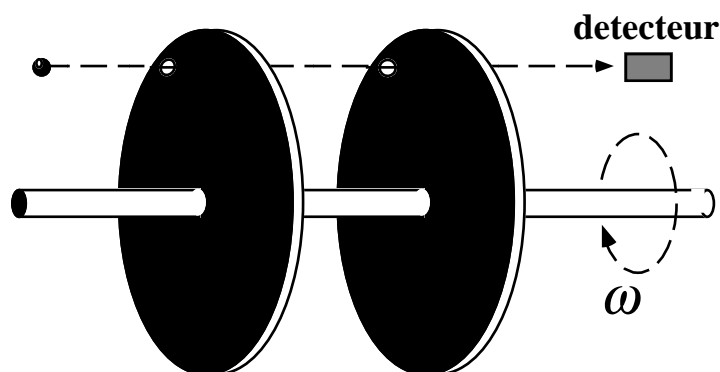


Fig. 63: Schéma d'un instrument pour la mesure de la distribution des vitesses des particules d'un gaz. Seules les particules d'une vitesse donnée sont en mesure de passer par les deux fentes des deux disques en rotation rapide.



James C. Maxwell, qui découvrit la "distribution de Maxwell" des grandeurs des vitesses des particules d'un gaz. Nous retrouverons M. Maxwell et ses grandes découvertes dans la partie du cours consacrée à l'électromagnétisme.

Après avoir divisé le nombre de particules dans chaque intervalle par le nombre total de particules dont nous avons mesuré la vitesse, nous obtenons de cette manière une estimation de la distribution G en fonction de la position v de l'intervalle. La précision de l'estimation dépend de la largeur Δv . On doit donc calibrer la largeur Δv utilisée pour la mesure à la précision qu'on souhaite atteindre.

Notez que la distribution de Maxwell est aussi une propriété statistique du gaz parfait. Elle ne nous dit pas que telle particule a précisément telle vitesse: elle nous dit que, en moyenne, la fraction de particules dont la grandeur de la vitesse se situe dans l'intervalle $v - v + \Delta v$ est approximativement donnée par $G(v)$. La précision de cette conclusion augmente avec le nombre de particules, et à la limite elle devient infinie si le nombre est également infini.

En pratique, on ne peut pas faire de mesure sur un nombre infini de particules, et on aura donc des fluctuations statistiques: la fraction de particules dans l'intervalle $v - v + \Delta v$ est donnée approximativement, mais non pas précisément, par $G(v)$. Ce désaccord est néanmoins très limité puisque le nombre de particules est très élevé.

Le Coin Yankee:

Distribution de Maxwell
Maxwell distribution
Electron Electron
Instrument Instrument
Intervalle Interval

“Note that Maxwell’s distribution is valid for any system whose behavior is equivalent to that of the ideal gas. For exemple, with some approximations it is valid for the free electrons in a metallic sample.”

XV. La chaleur spécifique et le principe d'équipartition.

La validité du modèle microscopique que nous avons développé pour le gaz parfait peut être vérifiée à l'aide d'un deuxième type de mesures: celles de *chaleur spécifique*. Prenez une bouteille pleine de gaz parfait (N particules), et supposez que vous voulez augmenter sa température de T_1 à T_2 . L'Eq. 177 prévoit une augmentation de l'énergie du gaz. L'augmentation moyenne est de $(3/2)k(T_2 - T_1)$ par particule, total $N(3/2)k(T_2 - T_1)$ pour le gaz.

En tenant compte de la loi de conservation de l'énergie (sur laquelle nous reviendrons plus tard), on doit supposer que cette énergie supplémentaire soit fournie au gaz de l'extérieur. Supposons que la bouteille ne change pas, et que la seule communication avec l'extérieur est ce qu'on appelle chauffage, c'est-à-dire la transmission de chaleur.

Notre analyse précédente prévoit que la quantité de chaleur nécessaire pour passer de T_1 à T_2 est $N(3/2)k(T_2 - T_1)$. La quantité nécessaire pour augmenter d'un degré la température d'un gaz qui contient N_A (nombre d'Avogadro) particules est donc:

$$C_v = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R. \quad (181)$$

La quantité de gaz qui correspond à N_A particules est une *mole* de gaz. La quantité C_v est par définition la *chaleur spécifique* pour une mole ou *chaleur molaire*. L'indice "V" indique que la chaleur molaire a été mesurée à volume constant, puisqu'effectivement nous avons supposé que la bouteille - et donc son volume - ne change pas pendant le chauffage.

L'Eq. 181 nous donne une bonne occasion de vérifier la théorie microscopique du gaz parfait. On doit simplement mesurer des chaleurs spécifiques pour des gaz divers, et voir si le résultat devient raisonnablement similaire à la prévision de cette formule lorsque les conditions se rapprochent de celles du gaz parfait (haute température, basse densité).

Les résultats pratiques de cette vérification ne sont que partiellement positifs, et très intéressants. L'Eq. 181 fonctionne assez bien pour des gaz tels que l'hélium ou l'argon aux conditions limites du gaz parfait. Par contre, des gaz tels que le chlore ou l'hydrogène donnent une valeur de C_v proche de $5R/2$ au lieu de $3R/2$, et la vapeur d'eau donne $3R$. Comment peut-on comprendre ces différences?

Voyons quelles sont les différences entre hélium et argon, chlore et hydrogène, et vapeur d'eau. Hélium et argon sont des éléments de la famille des gaz nobles, qui ne forment pas de liaisons chimiques. Cela implique que chaque particule de gaz n'est pas une molécule formée par plusieurs atomes liés les uns aux autres, mais un atome isolé. Par contre, les particules de chlore et d'hydrogène sont des molécules, chacune formée par deux atomes: H_2 et Cl_2 . Quant à la vapeur d'eau H_2O , ses molécules contiennent trois atomes.

Argon et hélium se comportent donc comme un gaz parfait composé de particules dont le seul mouvement possible est le déplacement, comme nous l'avons supposé pour notre modèle microscopique. Par contre, une particule avec deux ou trois atomes peut avoir deux types de mouvement: *déplacement* et *rotation*; elle peut donc posséder tant de l'énergie cinétique de déplacement que de l'énergie cinétique de rotation.

Comment peut-on décrire le mouvement de ces particules? Voyons: le déplacement est décrit à l'aide des coordonnées du centre de masse, qui sont trois quantités scalaires.

Mais ces trois coordonnées ne suffisent pas à donner la position dans l'espace d'une molécule qui peut avoir des rotations, et donc ne suffisent pas à décrire sa position en fonction du temps, c'est-à-dire son mouvement.

Prenez une molécule avec deux atomes. Comment peut-on donner complètement sa position? Il faut utiliser les résultats du chapitre VII (voir la Fig. 39). On peut commencer, par exemple, en donnant la position du premier atome, avec trois coordonnées. Ensuite on peut donner la position du deuxième atome, trois coordonnées de plus, total six. La position de la molécule est parfaitement spécifiée, apparemment avec un total de six quantités scalaires. Mais attention! En réalité nous n'avons pas besoin de trois coordonnées pour spécifier la position du deuxième atome! La distance entre les deux atomes est fixe, et donc après avoir donné la position du premier atome, celle du deuxième peut être donnée avec deux coordonnées, et le total des coordonnées dont on a besoin pour spécifier la position de la molécule est de *cinq*, et non pas de six.

Prenons maintenant une molécule avec trois atomes ou plus dont les distances sont fixes. Il s'agit d'un solide et donc pour fixer sa position on a besoin de six coordonnées.

Voilà donc une très jolie relation, que nous résumons dans cet tableau:

Nombre d'atomes dans chaque particule	Nombre de coordonnées, η	Chaleur molaire, C_V
1	3	$3R/2$
2	5	$5R/2$
3 ou plus	6	$3R$

On peut donc bien voir que la chaleur molaire est toujours donnée par η fois $R/2$.

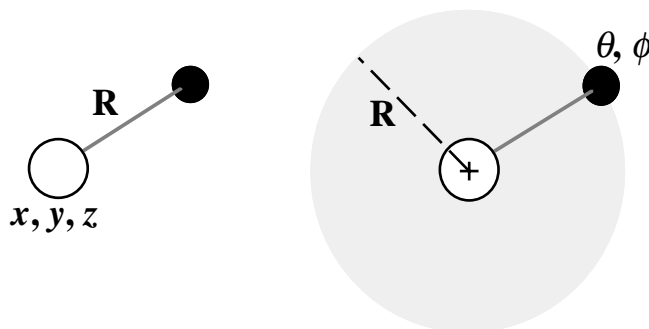


Fig. 64: Estimation du nombre de degrés de liberté d'une molécule biatomique. Nous avons besoin de trois coordonnées (x, y, z) pour préciser la position d'un des atomes, et de deux en plus (les coordonnées polaires θ et ϕ) pour préciser celle du deuxième atome, puisque la distance R des deux atomes est constante, et donc après avoir donné la position d'un atome, le deuxième ne peut que se trouver sur une sphère de rayon R .

Comment peut-on justifier cette relation? L'Eq. 181, qui est valable pour un gaz monoatomique, a été dérivée du fait que l'énergie cinétique moyenne pour une particule (monoatomique) est $3kT/2$. On est amené à émettre l'hypothèse que cette énergie est divisée entre les trois coordonnées de la particule, et que la partie qui correspond à chaque coordonnée est $kT/2$. Avec cette hypothèse, si on passe de 3 à 5 coordonnées avec la même énergie cinétique moyenne par coordonnée, l'énergie cinétique moyenne totale de la molécule (biatomique), donnée par les mouvements de déplacement et rotation, devient $5kT/2$; l'énergie totale d'une mole de gaz biatomique

est donc $(5kT/2)N_A = 5RT/2$ et la chaleur molaire à volume constant $5R/2$, en accord avec les résultats expérimentaux.

On peut directement passer aux particules à plus de deux atomes: avec $kT/2$ d'énergie moyenne par coordonnée, on trouve facilement que la chaleur molaire à volume constant est de $3R$, encore en accord avec les expériences.

Ces résultats dévoilent une des propriétés fondamentales des systèmes thermodynamiques, c'est-à-dire des systèmes avec un grand nombre de microcomposantes: le *principe d'équipartition*. Pour le cas que nous venons d'analyser, ce principe peut être formulé en disant que l'énergie cinétique moyenne de chaque coordonnée est $kT/2$. Pour un gaz avec N_A molécules, le nombre total de coordonnées est ηN_A et l'énergie cinétique totale est $\eta N_A kT/2 = \eta RT/2$.

On appelle le nombre total de coordonnées le nombre de *degrés de liberté* du système. Une molécule biatomique a 5 degrés de liberté. Une molécule avec 3 atomes ou plus, comme une chaise ou une pierre macroscopique, a six degrés de liberté. Un gaz avec N molécules biatomiques a $5N$ degrés de liberté. Le principe d'équipartition nous dit que:

L'énergie d'un système dans un état d'équilibre thermodynamique est partagée entre tous ses degrés de liberté, l'énergie cinétique moyenne de chaque degré de liberté étant la même, et égale à $kT/2$.

Le Coin Yankee:

Chaleur Heat
Chaleur spécifique Specific heat
Chaleur molaire Molar heat
Chauffage Heating
Molécule Molecule
Degrés de liberté Degrees of freedom
Equipartition Equipartition

"The equipartition principle tells us that the energy of a system in a state of thermodynamic equilibrium is divided among all of its degrees of freedom, with the same average kinetic energy $kT/2$ per degree of freedom."

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Q (chaleur)	joule	calorie \approx 4,2 joule
Chaleur spécifique	joule/(K kg)	
Chaleur molaire	joule/(K mole)	

Ordres de grandeur:

Energie "thermique" kT à la température ambiante (≈ 300 K):

$$4,2 \times 10^{-21} \text{ joule.}$$

Chaleur molaire à volume constant du gaz parfait monoatomique:

$$3R/2 \approx 12,4 \text{ joule/K/mole.}$$

XVI. Généralisation: la probabilité et la loi de Boltzmann

Le fait que l'énergie *moyenne* d'une particule de gaz doit suivre le principe d'équipartition ne donne pas beaucoup d'informations sur l'énergie que possède *chacune* des particules, qui peut varier de zéro à l'infini. Quelle est donc la fonction de distribution $G_B(E)$ pour l'énergie E ? Nous attaquerons le problème sur un plan formel, et passerons ensuite à une discussion plus physique. Le point de départ de notre analyse est la fonction de distribution pour la grandeur de la vitesse, qui est donnée par les équations 178 et 179:

$$G(v) = G_0(v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT);$$

$$G_0 = \sqrt{2/\pi} N(m/k)^{3/2}.$$

Afin de traduire la distribution des grandeurs des vitesses en distribution des énergies, il est nécessaire de rappeler que, vu les hypothèses que nous avons adoptées pour le modèle microscopique du gaz parfait, l'énergie d'une particule est purement cinétique; dans le cas de particules monoatomiques:

$$E = \frac{1}{2} mv^2; \tag{182}$$

il est également nécessaire de rappeler la définition de fonction de distribution: le nombre de particules avec une énergie dans l'intervalle $E - E+dE$ est donné par $G_B(E)dE$; à son tour, le nombre de particules dont la grandeur de la vitesse se trouve dans l'intervalle $v - v+dv$ est donné par $G(v)dv$. Pour passer d'une distribution à l'autre, on doit réaliser que le nombre de particules dans l'intervalle $E - E+dE$ est le même que celui dans l'intervalle $v - v+dv$, si le premier intervalle correspond à l'autre selon l'Eq. 182. Et donc:

$$G_B(E)dE = G(v)dv; \tag{183}$$

d'autre part, l'Eq. 182 donne $v = \sqrt{2E/m}$ et donc $dv = \sqrt{1/(2mE)} dE$, ce qui avec l'Eq. 183 amène à $G_B(E)dE = G(v)\sqrt{1/(2mE)} dE$, et ensuite, puisque l'Eq. 168 donne $G = G_0(v^2 T^{-3/2}) \exp(-mv^2/2kT) = [vu, \text{ encore une fois, l'Eq. 182}] = G_0((2E/m)T^{-3/2}) \exp(-E/kT)$, nous arrivons l'équation suivante:

$$G_B(E) = A\sqrt{E} \exp(-E/kT), \tag{184}$$

où A est une constante. Ce résultat est un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale des systèmes physiques compliqués, avec un grand nombre de microcomposantes: la fonction de distribution en énergie des microcomposantes est dominée par le facteur exponentiel $\exp(-E/kT)$:

$$G_B(E) \propto \exp(-E/kT). \tag{185}$$

L'Eq. 185 est connue comme *distribution de Boltzmann*, et correspond à une des lois les plus générales de la nature. Notez que le facteur de proportionnalité peut bien être une fonction de l'énergie (dans le cas du gaz parfait, Eq. 184, il contient la racine carrée de l'énergie); mais la fonction qui change le plus rapidement, et qu'on trouve toujours dans la distribution en énergie, est le facteur exponentiel de Boltzmann, $\exp(-E/kT)$.

Avant de passer à une application pratique de la loi de Boltzmann, nous souhaiterions comprendre plus précisément le sens des fonctions de distribution. Nous avons déjà vu une manière de mesurer une fonction de distribution, celle des grandeurs des vitesses d'un gaz parfait, avec l'appareil illustré par la Fig. 63. Mais nous avons aussi vu qu'on n'arrive pas à mesurer précisément la fonction de distribution, parce que les fluctuations causent quelques désaccords entre les résultats de chaque mesure et la fonction théorique. Quelle est donc la manière de donner une base expérimentale, et donc physique, à la fonction de distribution?



Ludwig Boltzmann, protagoniste tragique de la naissance de la mécanique statistique. Souffrant de dépression, probablement à cause des attaques auxquelles ses théories étaient soumises, il se suicida à Luino (proche de Trieste) en 1906.

Afin d'essayer de répondre à cette question, nous analyserons un problème de jeu qui est lié à celui des fonctions de distribution. Supposons que nous jetons une pièce d'un franc sur la table, et que nous étudions le résultat; essayons de donner une image scientifique à notre jeu, en appelant "0" et "1" les deux résultats possibles de notre variable "pièce" ou P . On peut bien prévoir que si la pièce n'est pas pipée (nous sommes entre *ladies* et *gentlemen*, après tout), les résultats seront distribués *fifty-fifty* entre 0 et 1. Comment peut-on vérifier cette prévision en pratique?

On peut, par exemple, lancer la pièce plusieurs fois et mesurer la fréquence de chaque résultat; ou bien on peut prendre un grand nombre de pièces, les lancer toutes d'un coup, et encore mesurer la fréquence de chaque résultat. Ce qu'on note est que la fréquence tend vers 50% pour chacun des deux résultats possibles, et que cette tendance s'accroît si le nombre de mesures individuelles augmente. Mais on note également que la mesure de la fréquence ne donne presque jamais *exactement* 50%, comme il serait prévu en théorie.

Cela ne nous surprend pas: nous savons que la prévision théorique donne la *probabilité* de chaque résultat, et que la fréquence mesurée tend à coïncider avec la probabilité, sans toutefois arriver à garantir l'égalité parfaite, si le nombre de résultats utilisés pour la mesure est élevé.

Ce que nous devons réaliser est que cette procédure nous donne une manière parfaitement rigoureuse d'effectuer des mesures. Cela est peut-être un peu difficile à accepter, parce qu'on a parfois une idée mythologique des mesures. Dans la réalité, nous avons déjà vu que toute mesure s'accompagne d'une limite de précision; ce qui est raisonnable est d'essayer d'atteindre justement le niveau de précision qui est exigé par l'application pratique de la mesure, sans perdre ni temps ni argent à obtenir une précision trop élevée dont on n'a pas besoin.

Et donc, dans le cas de la mesure de la probabilité à l'aide des mesures de fréquence des résultats, on peut augmenter la précision et atteindre le niveau nécessaire en augmentant le nombre de résultats individuels: dans le cas des pièces, en lançant la pièce individuelle plusieurs fois ou en lançant un nombre élevé de pièces toutes ensemble. De cette manière la précision peut être calibrée aux exigences spécifiques de chaque projet de mesure.

En passant des jeux à la physique, on peut réaliser qu'une fonction de distribution est une prévision théorique de la probabilité: dans le cas de l'Eq. 185, par exemple, le produit $G_B(E)dE$ correspond à la probabilité que la mesure de l'énergie d'une particule donne un résultat dans l'intervalle $E - E+dE$.

Afin de mettre en relation la fonction de distribution ou fonction de probabilité et les mesures, on doit effectuer les mesures pour un nombre élevé de particules, et estimer quelle est la fréquence des résultats qui tombent dans l'intervalle $E - E+dE$ (c'est-à-dire, le rapport entre le nombre de résultats de ce type et le nombre total de mesures). La fréquence donne la probabilité et donc la fonction de distribution, avec une précision qui dépend du nombre total de mesures, et peut donc être calibrée aux exigences spécifiques de la mesure.

Exemple pratique: vous allez à un casino illégal pour jouer aux dés. Mais en tant qu'ingénieur diplômé, vous ne voulez pas passer pour un pigeon, et donc vous voulez faire des mesures préliminaires pour voir si le dé qu'on vous propose est pipé. La fonction de distribution ou de probabilité théorique prévoit une probabilité de $1/6$ pour chacun des six résultats possibles. Un écart important de cette prévision pourrait révéler que le dé est malheureusement pipé.



Laboratoire consacré à des recherches en relation avec la physique statistique.

Vous commencez donc à faire des mesures, c'est-à-dire à noter la fréquence des résultats sans pourtant parier. Mais quand est-ce que vous pouvez soit vous sentir à l'aise et commencer à parier, soit vous forcer à quitter l'endroit à toute vitesse pour éviter de perdre votre argent? Vous n'arriverez jamais, bien sûr, à une précision absolue et donc à l'assurance absolue que le dé est ou n'est pas pipé. Mais vous pouvez décider, par exemple, qu'une précision de 1% est tout à fait acceptable.

Les fluctuations statistiques sont de l'ordre de la racine carrée du nombre des événements individuels. Donc, si on lance le dé n fois, chacun des six résultats arrive à approximativement $n/6$ fois, avec une fluctuation de l'ordre de $\sqrt{n/6}$, qui correspond à

une précision de $\sqrt{n/6}/(n/6) = \sqrt{6/n}$. Afin d'arriver à une précision de 1%, soit de 0,01, on a $\sqrt{6/n} = 0,01$, et donc $n = 6/0,01^2 = 60'000$.

Malheur! Vous constatez que chaque lancer de dé prend une demi-minute; pour arriver à 60'000 essais, vous devriez attendre 30'000 minutes, soit 21 jours! Vous décidez donc de modérer vos exigences, et d'attendre au plus une heure, effectuant $n = 120$ mesures.

La précision est de $\sqrt{6/n} \approx 22\%$, pas grand chose mais mieux que rien du tout. La probabilité théorique pour chacun des six résultats possibles est $1/6 \approx 0,17$, donc 22% correspond à une précision de $\pm(0,22 \times 0,17) \approx \pm 0,04$. Après une heure, vous constatez par exemple que la fréquence du résultat "2" est 0,25, donc la différence (0,08) par rapport à la probabilité théorique de 0,17 dépasse largement la limite de précision (0,04). Vous avez de bonnes raisons de quitter l'endroit et aller vous faire voler votre argent ailleurs.

Si, au contraire, après une heure vous constatez que les fréquences des six résultats possibles tombent dans l'intervalle $0,17 \pm 0,04$, vous pouvez décider de commencer à parier: au moins, si le dé a été tout de même pipé, votre argent sera volé conformément aux règles de la statistique et à la dignité professionnelle d'un ingénieur diplômé.

Le Coin Yankee:

Distribution de Boltzmann

Boltzmann distribution

*Facteur Exponential
exponentiel factor*

Fréquence Frequency

Probabilité Probability

Dé pipé Loaded dice

"The function that changes most rapidly, and which is always found in the energy distribution, is Boltzmann's exponential factor, $\exp(-E/kT)$."

XVII. La mesure de la hauteur

Passons maintenant du jeu de dés à la technologie, afin de discuter une jolie application de la loi de Boltzmann. J'essayerai de donner une touche personnelle au problème à l'aide d'un souvenir: une fois, je me suis trouvé dans un avion qui a manqué son atterrissage (non, ce n'était pas un vol Swissair). La *flight attendant*, dont l'anglais était malheureusement rudimentaire, essaya de nous tranquilliser en disant "Sorry for the delay. We could not land because we did not have the landing gear. But we'll try again shortly". Annonce qui suscita bien sûr la terreur générale jusqu'à l'atterrissage. Face à la fin possible de ma vie à cause d'un maudit *landing gear*, j'adoptai un point de vue stoïque, et essayai de passer le temps entre l'annonce terrifiante et l'heureux atterrissage en me relaxant (disons) avec le petit calcul suivant, lié au problèmes de notre avion.

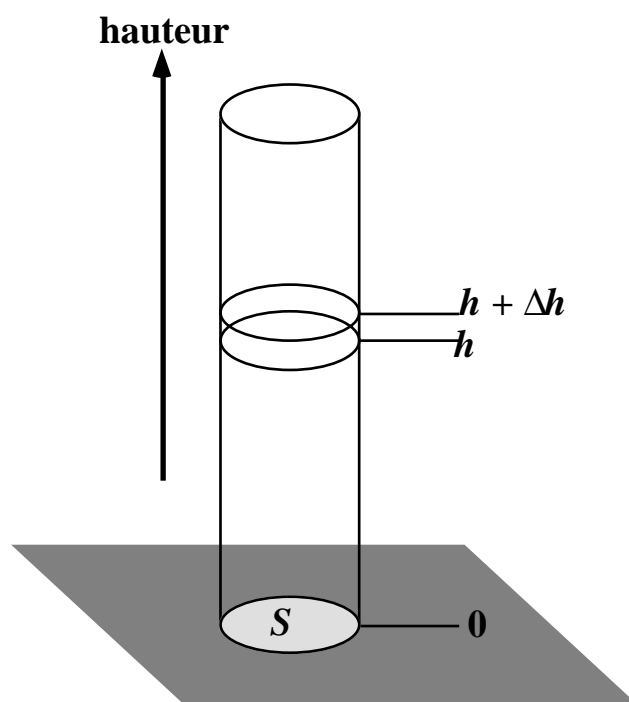


Fig. 65: Schéma théorique pour mettre en relation la hauteur et la pression atmosphérique.

Comment peut-on donc mesurer la hauteur h à laquelle se trouve un avion? Une méthode consiste à la dériver d'une mesure de pression atmosphérique, puisqu'il y a une relation directe entre les deux variables. Prenez effectivement une colonne d'air de section S (voir la Fig. 65). Et prenez ensuite une couche d'épaisseur Δh .

Supposez que le nombre de molécules dans la couche est $N(h)$. Afin de simplifier le problème, supposez également que l'air est composé d'un seul type de molécules; la masse m de ces "molécules" est une moyenne sur les composantes réelles de l'atmosphère. Supposez enfin que la température T est la même pour toute la colonne, dans l'intervalle de hauteur qui nous intéresse.

L'équation d'état du gaz parfait, Eq. 156, nous donne:

$$pV = nRT ,$$

et donc, pour une série de couches du type susmentionné, toutes de volume $V = S\Delta h$, à diverses hauteurs, nous avons $p(h) \propto n(h)$. A son tour, le nombre de moles $n(h)$ dans la

couche à la hauteur h est proportionnel au nombre de molécules dans la couche, $N(h)$. Donc, $p(h) \propto N(h)$.

Chacune de ces molécules a une énergie totale donnée par l'énergie cinétique - dont la moyenne est la même pour toutes les hauteurs puisque la température est constante - plus l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle de la force de gravité est donnée par mgh , où g est l'accélération de la gravité. La loi de Boltzmann, Eq. 185, nous donne immédiatement:

$$N(E) \propto \exp(-E/kT) \propto \exp(-mgh/kT); \quad (186)$$

Et donc:

$$p(h) \propto \exp(-mgh/kT), \quad (187)$$

équation qu'on peut aussi écrire sous la forme suivante:

$$p(h) = p_0 \exp(-mgh/kT), \quad (188)$$

où p_0 est évidemment la pression à la hauteur $h = 0$, c'est-à-dire la pression à la hauteur de référence.



Un instrument moderne permettant de mesurer l'altitude à partir de la pression.

Quantitativement, on peut calculer la masse moyenne m en considérant l'air comme composé seulement de O_2 (21%) et de N_2 (79%). On trouve $m \approx 4,8 \times 10^{-26}$ kg. Si nous prenons comme référence le niveau de la mer et la pression atmosphérique correspondante, L'Eq. 188 prévoit par exemple que la pression à $h = 1000$ m est de $p_0(\exp((-4,8 \times 10^{-26} \times 9,8 \times 1000)/(1,4 \times 10^{-23} \times 300))) \approx 0,9p_0$, ce qui est approximativement vérifié par les mesures expérimentales.

L'Eq. 188 nous donne évidemment la possibilité de dériver la hauteur à partir d'une mesure de pression de l'atmosphère:

$$h = -(kT/mg)\ln(p/p_0). \quad (189)$$

Notez cependant les limites de notre analyse. D'abord, nous avons supposé que la température est indépendante de h , ce qui n'est pas complètement vrai, surtout pour les hauteurs élevées. En plus, l'Eq. 187 montre que les molécules à masse faible ont une densité qui diminue moins rapidement avec h que celles à grande masse. Par exemple,

on a plus d'hydrogène à hauteur élevée qu'au niveau de la mer, par rapport à l'azote et à l'oxygène. Cela implique aussi un changement de la masse "moyenne" de l'Eq. 188 avec h , changement qui est pourtant assez modéré puisque les deux molécules majoritaires, oxygène et azote, ont presque la même masse.

Appendice: un chemin abrégé vers la physique quantique

La discussion suivante, quoiqu'un peu éloignée de la ligne principale du cours, pourrait être intéressante afin de comprendre les implications inattendues de l'introduction de la méthode statistique en physique.

Le traitement statistique des phénomènes de mouvement au niveau microscopique nous a permis de justifier les propriétés globales (thermodynamiques) des systèmes complexes. Mais notre approche était simplifiée, ce qui ne nous a pas permis d'identifier des problèmes fondamentaux affectant la méthode statistique.

Ces problèmes ont eu une importance capitale dans l'histoire de la science: ils ont révélé la nature quantique des phénomènes au niveau microscopique, ouvrant ainsi la voie aux premiers développements de la physique moderne, à partir des travaux de Max Planck et Albert Einstein.

Notre discussion n'aura pas de caractère historique: le but est plutôt de stimuler l'imagination des lecteurs et lectrices, les amenant au moins à pressentir les implications les plus imprévisibles de la méthode que nous avons exploitée de façon si efficace.

Malheureusement, à ce point du cours vous ne possédez pas encore toutes les notions nécessaires pour la discussion qui nous attend. Plusieurs de ces notions seront développées plus loin dans le cours. J'ai donc décidé de les présenter ici sans justification, en mentionnant les chapitres futurs où celle-ci peut être trouvée.

Première notion: lumière, ondes et fréquence (voir chapitre LII)

La lumière est une onde électromagnétique, c'est-à-dire une perturbation du champ électromagnétique qui se propage dans l'espace à la vitesse de la lumière, c . Dans la plupart des cas, un rayon de lumière est constitué par des ondes de différentes couleurs. Chaque couleur correspond à une valeur spécifique de la fréquence (pulsation) de l'onde, ω .

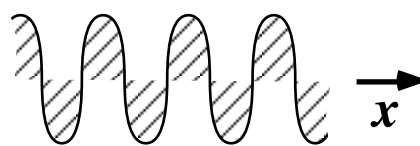
Deuxième notion: énergie et quantité de mouvement d'une onde électromagnétique (chapitre LI.4)

Un champ électromagnétique est associé à de l'énergie. La quantité de cette énergie par unité de volume (c'est-à-dire sa densité) est proportionnelle tant au carré de la composante électrique du champ électromagnétique qu'au carré de sa composante magnétique. La même conclusion s'applique à une région d'espace occupée par une onde électromagnétique: on peut affirmer que l'onde électromagnétique "transporte" de l'énergie. L'électromagnétisme montre que l'onde transporte aussi de la quantité de mouvement; la relation entre sa quantité de mouvement (grandeur) p et son énergie E est: $E = cp$.

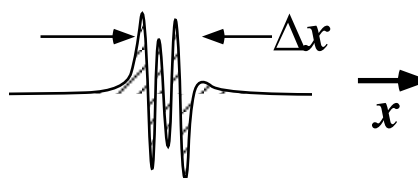
Troisième notion: localisation et délocalisation d'une onde

Cette notion s'applique à tous les types d'onde, et en particulier aux ondes de lumière. Mais elle peut être plus facilement comprise dans le cas des ondes sonores. La caractéristique qui correspond à la fréquence des ondes sonores est la tonalité. Prenez une onde sonore à une seule tonalité, possédant une seule fréquence ω : ce qu'on appelle un "son pur". Toute perturbation réduirait la pureté du son, donc un son strictement pur doit continuer pendant un temps infini et occuper tout l'espace, sans limites: il s'agit d'une onde totalement délocalisée.

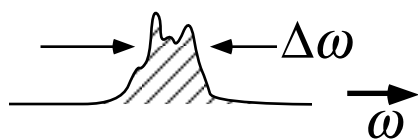
En haut: un son pur se propageant le long de l'axe x correspond à une onde sonore acoustique parfaitement sinusoïdale et à une seule fréquence (pulsation) ω . D'autre part, une onde sinusoïdale pure ne peut pas avoir de limites dans l'espace, donc elle est entièrement délocalisée.



Au centre: impulsion sonore ayant un certain degré de localisation. La mesure de cette localisation est donnée par la largeur de la région occupée par l'impulsion, qui est de l'ordre de Δx .



En bas: l'impulsion sonore ci-dessus ne correspond pas à une seule fréquence, mais à la superposition de fréquences sur une bande de l'ordre de $\Delta \omega$. Cette propriété est une manifestation concrète du "théorème de Fourier". Le même théorème prévoit aussi une relation entre Δx et $\Delta \omega$, qui est discutée dans le texte.



Supposons maintenant (voir la figure) que l'onde sonore ne correspond pas à un son pur: il s'agit d'une impulsion sonore de longueur (dans l'espace) Δx . Cette onde contient plusieurs fréquences, répandues sur une bande de largeur $\Delta \omega$. Il existe une relation entre la "localisation" Δx de l'onde et sa largeur de bande $\Delta \omega$. Cette relation, bien connue par les passionnés de *hi-fi*:

$$\Delta x \Delta \omega \approx \pi c$$

est une conséquence du "théorème de Fourier" en mathématiques.

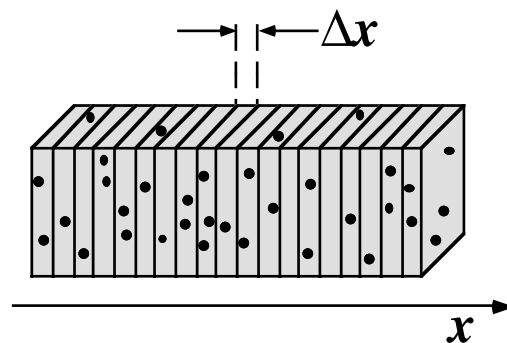
Quatrième notion: effet Doppler pour la lumière (chapitre LIV.2.1)

La fréquence d'une onde électromagnétique change en fonction du mouvement relatif de la source de l'onde et de l'observateur, à cause du célèbre effet Doppler. Supposez que tant la source que l'observateur se trouvent dans des référentiels d'inertie, leur vitesse relative (constante) étant de grandeur v_R et dans la direction de propagation de l'onde. Les fréquences ω et ω' dans les référentiels de la source et de l'observateur sont liées par l'équation:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v_R/c}{1 + v_R/c}} ;$$

Munis de ces quatre notions, nous pouvons maintenant affronter la discussion sur les problèmes de la méthode statistique en physique. Analysons tout d'abord la distribution dans l'espace de N particules d'un gaz parfait. Afin de simplifier l'analyse, nous réduirons comme d'habitude le problème à une dimension, en prenant comme récipient un long tuyau de dimensions latérales négligeables, aligné sur l'axe x (voir la figure). Il s'agit donc de déterminer la fonction de distribution $g(x)$.

Mesure de la fonction de distribution des particules d'un gaz le long d'un tuyau (aligné sur l'axe x).



Sur le plan expérimental, la procédure pourrait être la suivante. On peut idéalement partager la longueur du tuyau en petites tranches d'épaisseur Δx . On peut analyser ensuite un échantillon de n particules du gaz et observer pour chaque particule quelle est la tranche Δx où elle se trouve. A la limite, on mesure de cette façon la fonction de distribution $g(x)$.

Plus spécifiquement, $g(x)$ est donnée par la limite, pour $n \rightarrow N$ et pour $\Delta x \rightarrow 0$, du rapport $\Delta n(x)/\Delta x$, où $\Delta n(x)$ est le nombre des particules dans la tranche Δx située à la position x . Sur le plan pratique, la précision de cette mesure de la fonction $g(x)$ peut être augmentée en augmentant n et en diminuant Δx .

Mais attention: nous tombons sur un problème intéressant! En diminuant Δx , la valeur moyenne de $\Delta n(x)$ diminue aussi. Cela implique une augmentation des fluctuations statistiques et une diminution de la précision de la mesure; à la limite $\Delta x \rightarrow 0$, on aurait la divergence des fluctuations vers une valeur infinie, et un manque total de précision.

Un point de vue réaliste, d'autre part, peut éliminer ce problème. Les particules de gaz ne sont pas des masses ponctuelles, mais des atomes ou des molécules dont la dimension est de l'ordre des angstroms ou des dizaines d'angstroms. On ne peut pas faire diminuer la dimension Δx au-delà de cette dimension.^(*) Cela élimine le risque de divergence des fluctuations.

Il faut maintenant changer le sujet de notre analyse: nous prenons à nouveau le récipient-tuyau, mais sans le remplir de gaz. Tout ce que nous mettons dans le récipient, c'est de la lumière: quelle sera la distribution de celle-ci dans le récipient?

Si nous appliquons à ce problème l'approche que nous venons d'utiliser pour le gaz, nous tombons sur un obstacle: la théorie classique de la lumière ne considère pas celle-ci

^(*) Cette conclusion est valable pour la physique classique, mais elle devient un peu plus compliquée en physique quantique, puisque celle-ci attribue une nature ondulatoire aux particules. L'analyse que nous allons appliquer aux particules de lumière devrait donc être aussi utilisée pour les particules de gaz.

comme une sorte de gaz formé par des particules, mais comme un fluide continu composé d'ondes. On peut toutefois contourner cet obstacle grâce au truc suivant: on imagine la lumière comme si elle était composée de particules, et à la fin de l'analyse on passe au cas limite de particules infinitésimales.

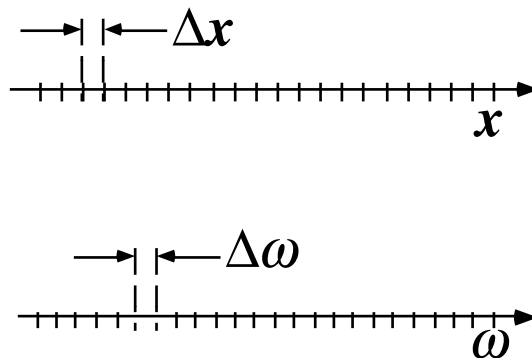
Imaginons alors que nous partageons l'énergie de la lumière en petits "morceaux" ou particules. Plus spécifiquement, on imagine que l'énergie totale des ondes d'une fréquence donnée ω est partagée entre des "morceaux" de grandeur $\varepsilon(\omega)$; à la fin du calcul, il faudra passer à la limite $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$.

Malheureusement, cette stratégie ne fournit qu'une solution partielle du problème: afin d'obtenir des "particules de lumière", il ne suffit pas de partager l'énergie en morceaux. Il faut aussi localiser les ondes de lumière, afin de les faire ressembler à des particules. Supposons que nous voulons construire une "particule de lumière" de dimension Δx le long de l'axe x . La troisième des notions mentionnées ci-dessus nous dit qu'il faut utiliser des ondes dans une bande de fréquences $\Delta\omega$ telle que $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$.

Vu cette relation entre localisation dans l'espace et bande de fréquences, il devient alors nécessaire d'analyser en même temps tant la distribution dans l'espace que la distribution par rapport aux fréquences. La fonction de distribution à considérer est donc $g(x, \omega)$. La condition $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$ nous fournit la garantie que les épaisseurs des "tranches" du récipient et de l'axe de fréquences ne peuvent pas simultanément s'annuler. Cela nous fournit également une garantie contre une éventuelle divergence des fluctuations statistiques.

Mais la limite de la dimension des "tranches" exprimée par la relation $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$ crée un autre problème: nous étions d'accord de passer, à la fin du calcul, à la limite $\varepsilon(\omega) \rightarrow 0$. Mais en partageant l'énergie totale entre des morceaux infinitésimaux, le nombre total $n(\omega)$ de ceux-ci diverge à l'infini.

Mesure de la fonction de distribution des "particules de lumière" dans le tuyau: il faut analyser en même temps la distribution en fonction de x et celle en fonction de la fréquence.



Cela ne poserait pas de problème si l'on pouvait passer à la limite $\Delta x \Delta\omega \rightarrow dx d\omega$. En fait, le nombre de particules dans une "tranche" $dx d\omega$ serait proportionnelle à $n(\omega) dx d\omega$, et la divergence de $n(\omega)$ serait compensée par la grandeur infinitésimale de $dx d\omega$. Mais cela ne peut pas nous aider: nous venons de découvrir qu'il est impossible de dépasser la limite $\Delta x \Delta\omega \approx \pi c$.

La conclusion est foudroyante: après avoir introduit les "particules de lumière", on ne peut pas les faire disparaître sans détruire les bases de la théorie. Donc, les "particules" de lumière ne constituent pas seulement un truc mathématique: elles doivent réellement exister !

Quelle sera alors l'énergie $\varepsilon(\omega)$ d'une de ces particules de lumière ou "photon"? Si nous ouvrons un petit trou dans le récipient contenant la lumière, et que nous en sortons un

seul photon d'énergie $\varepsilon(\omega)$, dont la quantité de mouvement est $p = \varepsilon(\omega)/c$. Observons ce photon du point de vue d'un référentiel d'inertie qui se déplace à vitesse v_R par rapport à la bouteille, dans la direction de propagation du photon. Quelle est l'énergie ε' du photon dans ce référentiel?

La réponse est donnée par la deuxième des équations 116 (transformations de Lorentz pour l'énergie et pour la quantité de mouvement): $\varepsilon' = (\varepsilon - v_R p) \sqrt{1 - v_R^2/c^2} = (\varepsilon - v_R \varepsilon/c) / \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$, et donc:

$$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - v_R/c}{1 + v_R/c}} ;$$

conclusion: l'énergie du photon subit le même changement que celui prévu par l'effet Doppler pour la fréquence! Cela nous suggère la relation directe énergie-fréquence:

$$\varepsilon \propto \omega, \text{ ou } \varepsilon = (h/2\pi)\omega,$$

c'est-à-dire la célèbre équation d'Einstein exprimant l'énergie du photon et contenant la constante de Planck, h .

Nous verrons dans la partie IV du cours comment l'on peut mesurer cette constante. Mais nous pouvons d'ores et déjà identifier son ordre de grandeur. Par exemple, la photochimie nous enseigne que les liaisons chimiques peuvent être détruites grâce à des photons ultraviolets, c'est à dire avec des fréquences de l'ordre de $\omega \approx 10^{16} \text{ s}^{-1}$.

L'énergie d'une liaison chimique peut être évaluée de façon approximative en prenant l'ordre de grandeur de la chaleur latente de fusion d'un solide - qui est l'énergie nécessaire pour rompre toutes ses liaisons chimiques - et en divisant cette valeur par le nombre des liaisons chimiques par unité de poids (nombre qui est lié au nombre d'atomes et déterminé par le type de liaisons chimiques). Le résultat est de l'ordre de 10^{-18} J par liaison. Par conséquent, la constante h doit être de l'ordre de $2\pi \times 10^{-18} / 10^{16} \approx 10^{-33} \text{ J s}$.

Enfin, notons que $p = \varepsilon/c = (h/2\pi c)\omega$, et donc la relation $\Delta x \Delta \omega \approx \pi c$ implique:

$$\Delta x \Delta p \approx h/2$$

comme limite inférieure pour le produit $\Delta x \Delta p$ et donc pour la précision simultanée des mesures correspondantes: il s'agit du célèbre "principe d'incertitude" de Heisenberg (Sect. LXI.1).

Un dernier point doit être soulevé. Toute notre analyse se base sur l'application de la méthode statistique à la lumière contenue dans un récipient. Mais sommes-nous réellement obligés de traiter la lumière de façon statistique? La réponse est positive, principalement parce que nous devons pouvoir définir la température de la lumière dans la cavité. En effet, nous verrons que la lumière (ou plus en général le rayonnement électromagnétique) est un des moyens de transfert de chaleur. Par conséquent, sans attribuer une température à une source de rayonnement en équilibre, on pourrait facilement violer le deuxième principe de la thermodynamique, que nous allons discuter à partir du chapitre XXVI.

Le Coin Yankee:

Hauteur Height
Atmosphère Atmosphere
Pression Atmospheric
atmosphérique Pressure
Colonne Column
Couche Layer
Azote Nitrogen
Oxygène Oxygen

“Equation 188 gives us, evidently, the possibility to derive the height from a measure of the atmospheric pressure.”

XVIII. Le gaz de Van der Waals

Nous avons vu que le traitement macroscopique et microscopique des propriétés du gaz parfait ne peut pas être appliqué aux gaz réels; néanmoins, ceux-ci se comportent approximativement comme le gaz parfait dans les limites de haute température et faible densité.

Essayons maintenant d'analyser comment on doit modifier le traitement théorique si ces conditions ne sont pas vérifiées. Essayons également de trouver quels sont les nouveaux phénomènes qui ne peuvent pas être prévus par la théorie du gaz parfait.

Le point de départ est fourni par la discussion au début du Chapitre XII. Nous avons vu que les conditions pour le développement du modèle microscopique du gaz parfait étaient:

- L'absence d'interactions entre les particules.
- La valeur négligeable du volume propre des particules, par rapport au volume du gaz.

Comment doit-on changer l'équation d'état du gaz parfait, Eq. 156:

$$pV = nRT$$

si ces deux conditions ne sont pas vérifiées? Prenons d'abord le volume: si le volume propre des particules n'est plus négligeable, le terme V dans l'Eq. 156 doit être remplacé par un terme diminué du volume total propre des particules: $V \rightarrow (V - nb)$. Notez que le volume propre des particules, nb , est proportionnel au nombre des moles, n .

Quelle est, par contre, la conséquence d'une interaction interne entre les particules? Par exemple, nous avons des forces d'attraction entre les molécules. Considérons les molécules qui frappent une paroi de la bouteille pendant une mesure de pression: il est évident que les forces d'attraction causées par les autres molécules *diminuent* la valeur de la pression par rapport à celle du gaz parfait. On doit donc remplacer le terme p de l'Eq. 156 par un terme augmenté de la quantité nécessaire pour compenser cette diminution: $p \rightarrow (p + c)$.

Notez cependant que la correction c est une fonction du volume V . Afin de comprendre ce point et de trouver la forme de cette fonction, considérons d'abord le fait que les forces dites de cohésion moléculaire entre les particules de gaz diminuent très rapidement avec la distance. Si vous considérez une particule à l'intérieur de la bouteille de gaz, les forces de cohésion qui agissent sur elle sont causées par les autres particules qui se trouvent dans une sphère assez petite, centrée sur la particule considérée. Le rayon R de cette sphère est le domaine d'action des forces particule-particule. La force moyenne est cependant nulle parce que celles causées par les particules individuelles de la sphère ont tendance à s'annuler les unes les autres.

Si, au contraire vous considérez une particule dont la distance de la paroi de la bouteille est inférieure à R , la sphère correspondante est partiellement située à l'extérieur, et donc on n'a plus l'équilibre moyen des forces particule-particule. La grandeur de la force totale est évidemment proportionnelle au nombre des particules qui serait nécessaire pour remplir la partie de la sphère située à l'extérieur; à son tour, ce nombre est proportionnel à la densité des particules de gaz, et donc au nombre total de ses particules divisé par V : voilà donc une fonction du type n/V (vu que le nombre total de particules est proportionnel au nombre de moles, n).

Mais attention! Pour arriver au terme c , qui est la correction de la pression, il faut répéter la même analyse pour toutes les particules qui se trouvent à une distance inférieure à R par rapport à la superficie (unitaire) utilisée pour la mesure de la pression. Ce nombre est aussi proportionnel à la densité et donc à n/V . La fonction c est donc du type $(n/V)(n/V) = n^2/V^2$. Nous écrivons la version corrigée de l'Eq. 156 de la manière suivante:

$$(p + an^2/V^2)(V - nb) = nRT, \quad (190)$$

qui pour une mole devient:

$$(p + a/V^2)(V - b) = RT. \quad (191)$$

Cette équation possède toute une série de propriétés très intéressantes, que nous essayerons de comprendre à l'aide d'une comparaison avec l'Eq. 156 (avec $n = 1$). Notez d'abord que si la densité du gaz est faible, le volume propre b des particules devient négligeable par rapport au volume de la bouteille; le terme a/V^2 est également négligeable, parce que nous avons vu qu'il est proportionnel au carré de la densité. L'Eq. 191 tend donc effectivement à devenir équivalente à l'Eq. 156 dans la limite de faible densité.

Si nous passons au cas des hautes températures, qui est aussi celui des hautes pressions et des hauts volumes, nous constatons encore une fois que les corrections b et a/V^2 sont négligeables, et l'Eq. 191 est pratiquement équivalente à l'Eq. 156.



Johannes Diderik van der Waals, découvreur de l'équation qui porte son nom ainsi que d'autres notions fondamentales telles que les forces de van der Waals.

Afin d'arriver à la même conclusion d'une manière graphique, considérez les courbes isothermes de la Fig. 66, c'est à dire les graphiques p - V de la fonction (191) pour une série de valeurs de la température. Il est évident que les hautes températures donnent des courbes approximativement hyperboliques ($pV = \text{constante}$), comme prévu par l'Eq. 156. On observe au contraire des écarts importants de ce comportement dans le cas de faibles températures.

Le passage d'un comportement à l'autre est marqué par le point K (dit *point critique*) dans la figure 67, qui est un point d'inflexion à tangente horizontale. Ce point est donc identifié puisqu'il correspond à des valeurs nulles des première et deuxième dérivées de la fonction $p = (nRT/(V - b)) - a/V^2$. Après quelques passages mathématiques, ces conditions donnent les expressions suivantes pour les coordonnées p_{cr} et V_{cr} du point critique:

$$V_{cr} = 3b; \quad (192)$$

$$p_{\text{cr}} = a/27b^2; \quad (193)$$

La température critique T_{cr} qui correspond à la courbe isotherme $p(V)$ du point K peut être dérivée de l'Eq. 191 avec les valeurs de p_{cr} et V_r ; on obtient:

$$T_{\text{cr}} = 8a/27Rb. \quad (194)$$

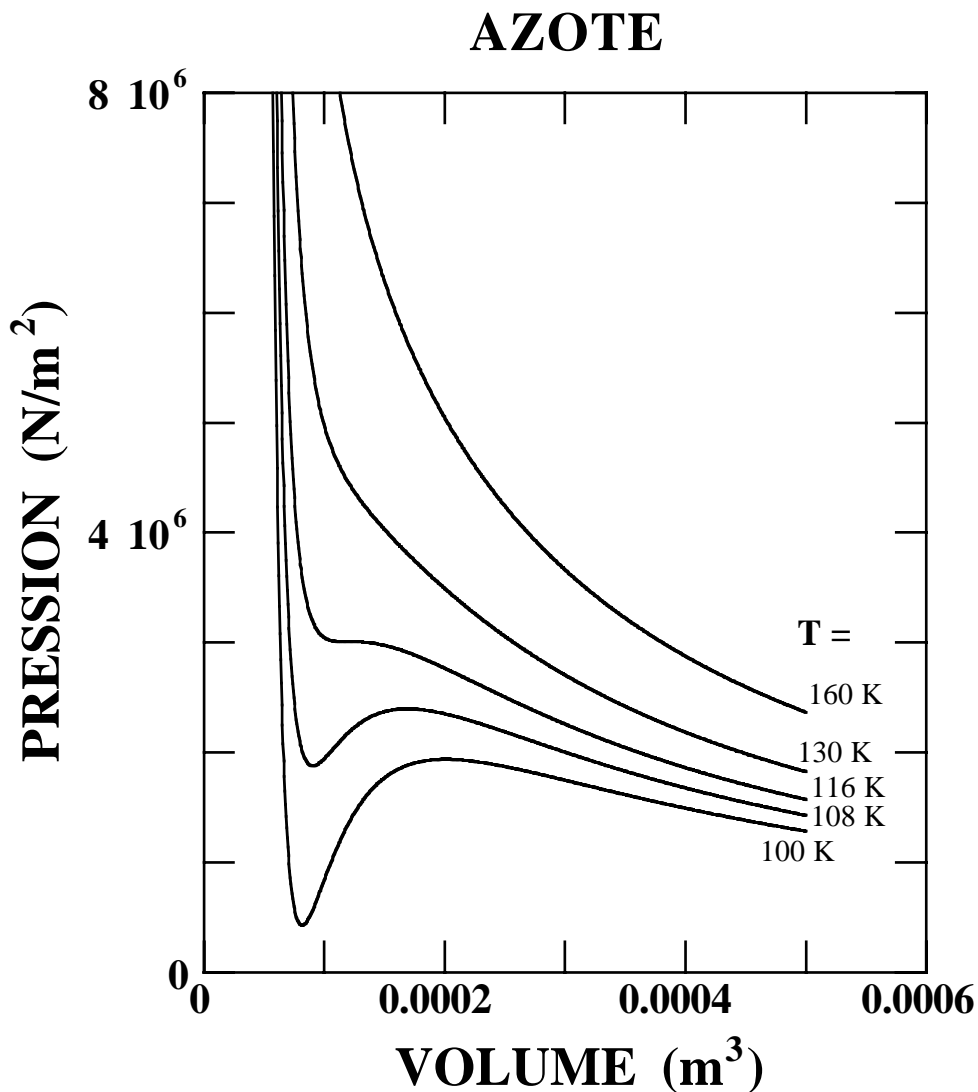


Fig. 66: Version graphique de la loi de Van der Waals, Eq. 191 (appliquée au cas de l'azote).

Prenons, par exemple, le cas de l'azote, qui correspond aux figures 66 et 67. Nous avons: $a \approx 0,13 \text{ Nm}^4$ et $b \approx 4 \times 10^{-5} \text{ m}^3$, et donc $T_{\text{cr}} \approx 116 \text{ K}$, $V_{\text{cr}} \approx 1 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ et $p_{\text{cr}} \approx 3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

Avant d'analyser la validité de ces résultats à l'aide de mesures, il est nécessaire de discuter et de comprendre la physique qui correspond au point critique et en général au comportement de l'équation d'état de Van der Waals.

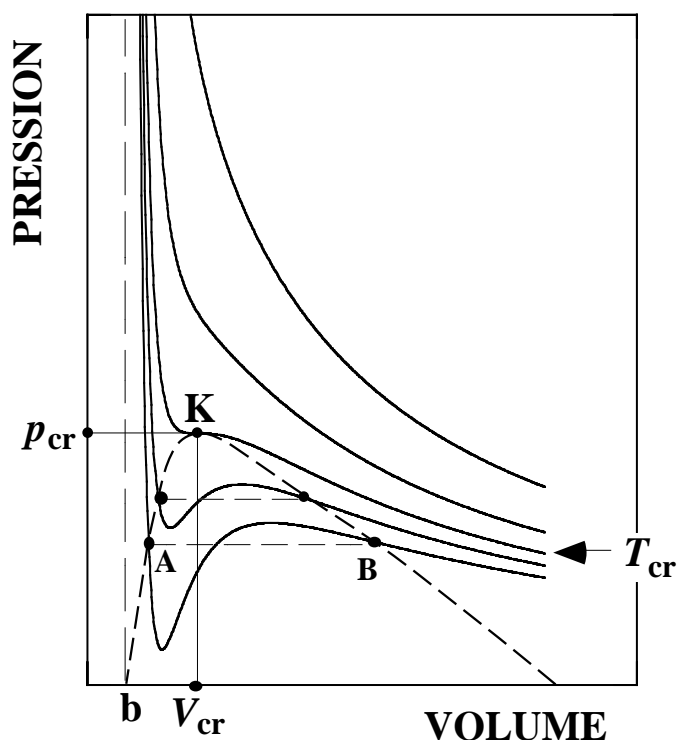


Fig. 67: La loi de Van der Waals et la loi réelle de la pression constante pendant la coexistence du gaz et du liquide.

Le Coin Yankee:

<i>Gaz de Van der</i>	<i>Van der Waals</i>
<i>Waals</i>	<i>gas</i>
<i>Cohésion</i>	<i>Molecular</i>
<i>moléculaire</i>	<i>cohesion</i>
<i>Point critique</i>	<i>Critical point</i>

“It is evident that high temperatures give nearly hyperbolic curves $pV = \text{constant}$, as predicted by Eq. 156. We note on the contrary that there are important deviations from this behavior at low temperature.”

Ordres de grandeur:

Volume propre pour une mole (b), $10^{-4} - 10^{-5} \text{ m}^3$.
 Paramètre des forces de cohésion (a), $5 - 10^{-1} \text{ Nm}^4$.

XIX. Transitions de phase du gaz Van der Waals

Imaginons donc d'effectuer des expériences à *température constante* sur un gaz de type Van der Waals. Supposons d'abord que nous nous trouvons sur la courbe à plus haute température de la Fig. 67; nous commençons l'expérience sur la partie droite, c'est-à-dire avec une faible pression et un grand volume. Une augmentation de pression cause une diminution de volume; cette diminution suit une loi qui est similaire à celle du gaz parfait.

Imaginons maintenant de passer de la courbe à plus haute température à celle à plus basse température. Avant d'arriver au point B, on observe encore une fois la diminution de volume causée par l'augmentation de pression, cependant selon une loi qui n'est plus très similaire à celle du gaz parfait. Mais lorsque nous arrivons au point B, nous commençons à observer une déviation beaucoup plus importante par rapport au comportement du gaz parfait: l'apparition de gouttes de liquide, et donc la coexistence de deux *phases* dans le système: la phase gazeuse et la phase liquide.

On constate aussi que, après avoir dépassé le point B le système à deux phases ne suit pas la courbe de l'équation Van der Waals. On constate au contraire que la loi valable correspond à la ligne étroite A-B, et donc que la diminution de volume a lieu à *pression constante*.

Quand nous arrivons au point A, il n'y a plus de phase gazeuse dans le système, mais seulement la phase liquide. En dépassant le point A, on se retrouve sur la courbe de la loi Van der Waals. Notez qu'une augmentation de pression pour cette phase ne comporte que de très petits changements de volume. Cela correspond à un fait bien connu: il est beaucoup plus facile de comprimer un gaz qu'un liquide; par exemple, si vous faites un plongeon dans la piscine, vous n'avez aucune difficulté à comprimer le gaz "air" pendant la première partie de l'expérience, mais comprimer l'eau est beaucoup plus difficile: elle peut frapper votre corps bien plus que votre esprit!

On note donc une différence fondamentale entre le comportement du système à haute et à basse température: dans le deuxième cas, on observe une transition de phase avec un régime intermédiaire de coexistence des deux phases; dans le premier, il n'y a pas de transition et on a seulement la phase gazeuse, même aux plus hautes valeurs de la pression. Cela nous dit qu'il n'est pas toujours possible de liquéfier un gaz par compression seulement: si la température est trop élevée, le gaz ne devient pas liquide.

La température la plus élevée à laquelle on peut liquéfier le gaz correspond à la courbe isotherme qui passe par le point K; il s'agit donc de la température critique T_{cr} que nous avons déjà discutée sans toutefois toucher ses implications physiques. Cette température, ainsi que la pression et le volume critiques qui correspondent au point K - le point critique - sont liés par les équations 192, 193 et 194 aux paramètres de la loi Van der Waals. Dans le cas de l'azote, nous avons vu que ces équations donnent $T_{cr} \approx 116$ K et $p_{cr} \approx 3 \times 10^6$ N/m²; les valeurs expérimentales de 127 K, et $3,3 \times 10^6$ N/m² sont assez en accord avec ces prévisions.

La discussion qui précède montre que le plan p-V peut être divisé en quatre régions - voir la Fig. 68 - en ce qui concerne les phases d'un gaz Van der Waals. D'abord, il est clair que la région (noire) où $V < V_{cr}$ ne correspond pas à des états physiques possibles du système, parce que l'équation Van der Waals, Eq. 191, donnerait des pressions négatives. Quant aux trois autres régions, la première (G) correspond à la seule phase gazeuse, la troisième (L) à la seule phase liquide, et l'intermédiaire (G + L) à la présence concomitante des deux phases.

Nous rencontrons pratiquement tous les jours des systèmes qui se trouvent dans une région du type G + L. Prenez par exemple l'atmosphère: une de ses composantes est la vapeur d'eau, c'est-à-dire la phase gazeuse de l'eau. Au lever du soleil, on constate qu'il y a de la rosée, et donc qu'une partie de la vapeur d'eau est passée à la phase liquide. Nous sommes donc dans une situation de coexistence des deux phases.

La région G + L possède une propriété intéressante: si on augmente la pression à température constante, on diminue le volume et on augmente la masse de la phase liquide en diminuant celle de la phase gazeuse ou vapeur. On dit que la vapeur est *saturée*: et toute augmentation de pression implique une transformation ultérieure en liquide.

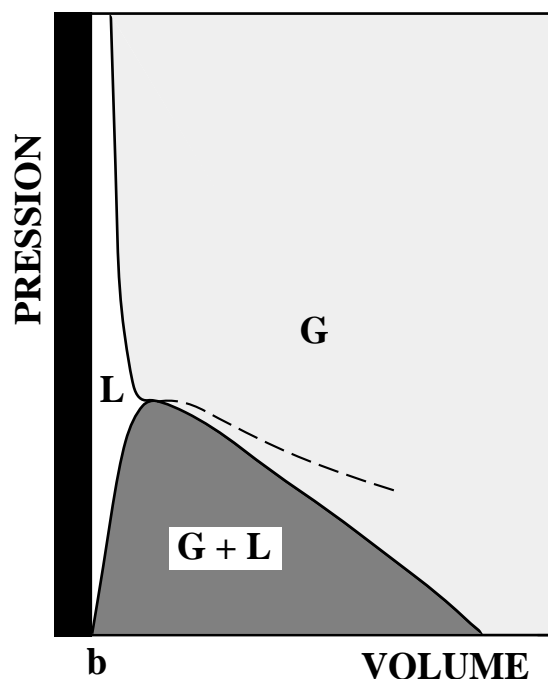


Fig. 68: Le diagramme de phase du gaz Van der Waals, avec ses régions L (liquide), G (gaz) et G+L (coexistence du gaz et du liquide).

Nous avons déjà vu que, dans la région G + L le système est à pression constante si la température est constante (trait A-B de la Fig. 67). La pression constante est dite *pression de vapeur saturante* pour la température donnée. Nous voyons par la Fig. 67 que la pression de vapeur saturante pour chaque température correspond à l'intersection de l'isotherme de Van der Waals pour la même température et de la courbe limite de la région G + L, c'est-à-dire la courbe des points de type A et B en Fig. 67. Nous verrons plus tard que la position de ces points doit être telle que les deux régions définies par l'isotherme Van der Waals et par la ligne étroite A-B aient la même superficie.

La courbe de pression de vapeur saturante en fonction de la température est qualitativement illustrée par la Fig. 69. Cette fonction n'est évidemment définie que pour des températures au-dessous de la température critique; la pression de vapeur saturante tend à la pression critique si la température tend à la température critique. Notez que le plan de la Fig. 69 est divisé en deux régions, L (liquide) et G (gaz ou vapeur). La courbe elle-même correspond à la région G + L de la Fig. 68.

Une des applications pratiques les plus importantes de l'idée de pression de vapeur saturante concerne la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Dans ce cas, la courbe de pression de vapeur saturante en fonction de la température prend le nom de *courbe des points de rosée*. Afin d'analyser le phénomène de formation de la rosée, c'est-à-dire de la phase liquide, il importe de réaliser que la pression qu'on doit considérer n'est pas la pression atmosphérique, mais seulement celle qui correspond à la composante vapeur d'eau de l'atmosphère.

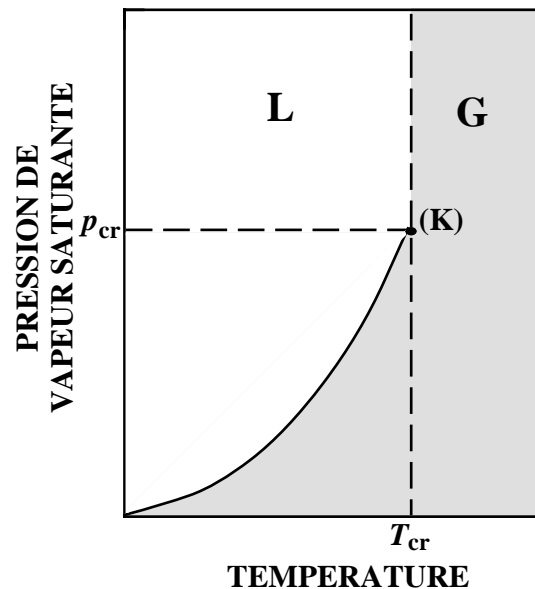


Fig. 69: Pression de vapeur saturante en fonction de la température.

Cette *pression partielle* est définie comme la pression qui aurait la composante considérée (vapeur d'eau) du mélange de gaz (atmosphère) si elle occupait le volume entier occupé par le mélange, à la même température. On peut donc constater qu'à une température donnée, on a la liquéfaction de la vapeur d'eau, c'est-à-dire la présence de la phase liquide, seulement si la pression partielle est plus grande que la pression de vapeur saturante à cette température.

La manière conventionnelle d'indiquer quel est le niveau de vapeur d'eau dans l'atmosphère est de donner l'humidité relative, qui est par définition le rapport entre la pression partielle de vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante à la température considérée. Un niveau unitaire d'humidité relative correspond donc à la liquéfaction de la vapeur d'eau.

La liquéfaction de la vapeur d'eau implique une grande série de conséquences pratiques. Par exemple, notre corps élimine de la vapeur d'eau, et cela plus rapidement si nous sommes occupés à une action fatigante; si l'humidité relative est élevée, cela conduit à la liquéfaction, c'est-à-dire à la formation de sueur. En général, l'ambiance par température élevée, par exemple pendant l'été, est moins confortable si l'humidité est aussi élevée, et nous suons beaucoup. Par contre, on supporte plus facilement les hautes températures si le climat est sec.

La liquéfaction de la vapeur d'eau peut également influencer le fonctionnement des machines. Dans une voiture, elle peut avoir lieu tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du pare-brise, diminuant ainsi la visibilité. Notez que l'objet sur lequel arrive la liquéfaction de vapeur d'eau peut être à température plus ou moins élevée par rapport à l'atmosphère, ce qui diminue ou augmente la liquéfaction comme on peut le déduire de la Fig. 69. Ainsi, le remède à la liquéfaction sur le pare-brise est d'augmenter sa

température à l'aide de la circulation forcée d'air chaud, de manière à augmenter la température locale, élever localement la pression de vapeur saturante et diminuer par conséquent l'humidité relative près du pare-brise.

Avant de compléter la discussion de l'équation Van der Waals, nous devons mentionner les phénomènes de *suprasaturation*. Considérons encore la Fig. 67, et supposons que nous nous trouvons au-dessous de la température critique, et que nous commençons à basse pression. Nous avons dit qu'après avoir dépassé le point B, la courbe Van der Waals ne correspond plus à la situation physique du système, puisque la pression réelle ne suit pas cette courbe mais demeure constante (ligne étroite A-B). On a parfois des exceptions à cette règle, et on est en mesure d'augmenter la pression avec diminution de volume suivant plus ou moins la courbe Van der Waals, *sans formation de phase liquide*: le gaz devient suprasaturé. Il s'agit d'une situation instable, qui disparaît par exemple avec des perturbations externes, et en tout cas n'intéresse que la région immédiatement au-delà du point B.

Le Coin Yankee:

<i>Liquide</i>	<i>Liquid</i>
<i>Faible pression</i>	<i>Low pressure</i>
<i>Grand volume</i>	<i>Large volume</i>
<i>Phase</i>	<i>Phase</i>
<i>Phase liquide</i>	<i>Liquid phase</i>
<i>Comprimer</i>	<i>To compress</i>
<i>Rosée</i>	<i>Dew</i>
<i>Point de rosée</i>	<i>Dew point</i>
<i>Vapeur saturée</i>	<i>Saturated vapor</i>
<i>Humidité relative</i>	<i>Relative humidity</i>
<i>Pression partielle</i>	<i>Partial pressure</i>
<i>Suprasaturation</i>	<i>Supersaturation</i>

“The G + L region has an important property: if one increases the pressure at constant temperature, one decreases the volume and one increases the mass of liquid, decreasing the mass of the gas phase or vapor. One says that the vapor is saturated, and any increase in pressure forces an additional transformation of gas into liquid.”

XX. Transitions de phase en général

La discussion du gaz Van der Waals nous amène à une discussion plus générale des phénomènes de transitions de phase. Il s'agit de phénomènes de la plus grande importance pour la technologie moderne, et aussi d'un des domaines les plus intéressants de la recherche fondamentale.

Essayons donc de généraliser les idées que nous avons trouvées pour le système gaz-liquide. Lorsqu'on considère un système thermodynamique, c'est-à-dire un système macroscopique formé par une grande quantité de microcomposantes, on doit distinguer:

- Ses *constituants*, et
- Ses *phases*.

Prenez par exemple l'eau: le système n'a qu'un constituant (eau), mais selon son état (pression-volume-température) il peut avoir une, deux ou trois phases, les phases possibles étant gaz, liquide ou solide (glace).

Si vous considérez l'atmosphère, le système a un grand nombre de constituants (azote, oxygène, vapeur d'eau, gaz nobles etc.) et un nombre également élevé de phases possibles (les phases liquides, gazeuses et solides de chaque constituant, plus des phases mixtes formées par plusieurs constituants).

Un système à deux constituants est dit *binnaire*. Par exemple, si on ajoute du sel de cuisine à de l'eau, on a un système binaire $\text{H}_2\text{O} + \text{NaCl}$. Les variables macroscopiques importantes pour ce système sont la concentration de sel et la température. Les phases possibles sont: solution homogène de sel dans l'eau, eau solide (glace), sel solide. Selon les valeurs des variables température et concentration, on peut avoir une seule phase, deux phases ou trois phases coexistantes.

Ces notions peuvent être étendues à une grande quantité de systèmes physiques. Par exemple, les électrons libres dans un métal se comportent un peu comme un gaz. On peut cependant distinguer entre deux phases possibles de ces "gaz": la phase normale et la phase supraconductrice, c'est-à-dire la phase des électrons dans un matériau qui n'a pas de résistance électrique. On a une transition de phase lorsque on diminue la température au-dessous de sa valeur critique.

Le tableau suivant résume la terminologie des changements de phase en ce qui concerne les phases solide, liquide et gazeuse:

SOLIDE → LIQUIDE:	FUSION
LIQUIDE → SOLIDE:	SOLIDIFICATION
GAZ → LIQUIDE:	LIQUEFACTION
LIQUIDE → GAZ:	VAPORISATION
SOLIDE → GAZ:	SUBLIMATION
GAZ → SOLIDE:	CONDENSATION

XX.1. La règle de Gibbs ou règle des phases

Tous les systèmes pour lesquels plusieurs phases sont possibles sont gouvernés par une règle dont tant la simplicité que la généralité sont surprenantes: la *règle des phases ou règle de Gibbs*.

Cette règle concerne trois quantités:

- Le nombre c de constituants du système.
- Le nombre ν des phases qui coexistent dans le système.
- Le nombre f de variables (thermodynamiques) indépendantes du système. Cela veut dire qu'après avoir fixé les valeurs de f variables, les autres sont automatiquement déterminées par les conditions du système.

Prenons par exemple le gaz Van der Waals, pour lequel $c = 1$. Les phases possibles sont au nombre de deux (gaz et liquide), et donc ν peut être 1 ou 2. Les variables sont au nombre de trois (p, V, T). De combien de ces variables pouvons-nous fixer les valeurs indépendamment? Supposons que nous sommes dans la région G de la figure 68, donc $\nu = 1$: on peut varier indépendamment p et V , mais après les avoir fixés, T est automatiquement déterminée par l'équation Van der Waals; on peut également fixer p et T ou V et T , la troisième variable étant toujours déterminée par la même équation: on est donc forcé à conclure que $f = 2$.



Josiah W. Gibbs, le physicien qui découvrit la règle des phases.

On note donc que dans ce cas la somme $\nu + f$ est égale à 2 plus le nombre c de constituants. Ce résultat est valable en général et constitue la règle des phases ou de Gibbs:

$$\nu + f = 2 + c. \quad (195)$$

Prenez par exemple le système sel de cuisine + eau ($c = 2$). Sans considérer ses propriétés en détail, cette règle nous permet immédiatement de faire des prévisions importantes, notamment qu'il n'y a qu'un état à pression atmosphérique pour lequel les trois phases possibles (glace, NaCl solide et solution) coexistent, puisque $f = 2 + 2 - 3 = 1$, et donc après avoir fixé la pression on n'a aucune latitude en ce qui concerne composition et température.

Le Coin Yankee:

<i>Constituant</i>	<i>Component</i>
<i>Binaire</i>	<i>Binary</i>
<i>Fusion</i>	<i>Melting, Fusion</i>
<i>Solidification</i>	<i>Solidification</i>
<i>Liquéfaction</i>	<i>Liquefaction</i>
<i>Vaporisation</i>	<i>Vaporization</i>
<i>Sublimation</i>	<i>Sublimation</i>
<i>Condensation</i>	<i>Condensation</i>
<i>Règle des phases</i>	<i>Phase rule</i>

“These ideas can be extended to a large quantity of physical systems. For example, the free electrons in a metal behave somewhat like a gas. One can in fact distinguish between two phases of this “gas”: the normal phase and the superconducting phase, that is the phase of the selectrons in a material which does not exhibit any electrical resistance.”

XXI. Les diagrammes de phase

La manière la plus efficace de traiter les problèmes des transitions de phase est fournie par les *diagrammes de phase*. Les figures 68 et 69 nous donnent déjà de bons exemples de ce type d'instrument formel. En généralisant, un diagramme de phase est une répartition du plan de deux des variables macroscopiques du système, dont les régions correspondent aux phases possibles, individuelles ou coexistantes. Par exemple, la Fig. 69 nous montre les deux régions des phases liquide et gazeuse du gaz Van der Waals sur le plan p - T , ainsi que la région où les deux phases coexistent.

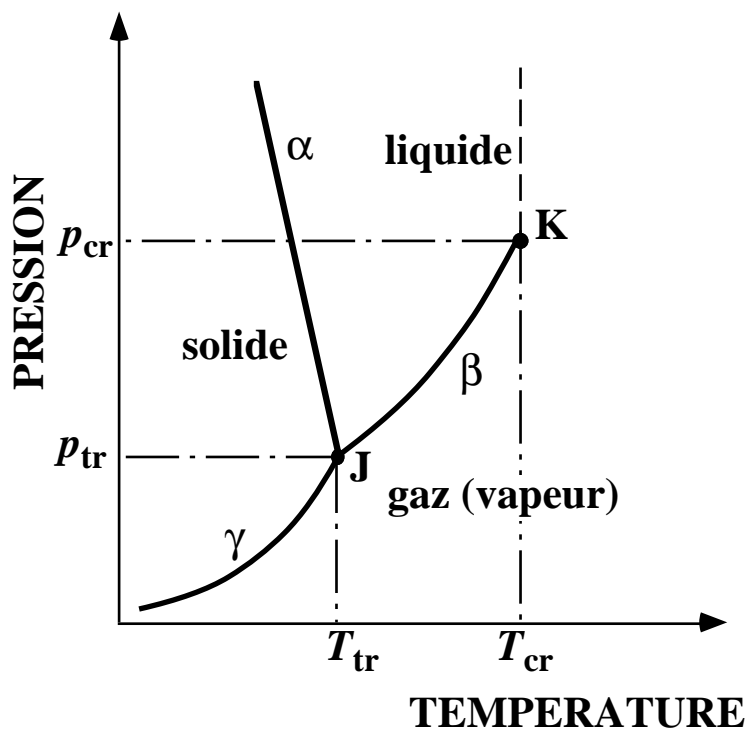


Fig. 70: Diagramme de phase d'un système tel que l'eau.

La figure 70 montre une version plus générale du diagramme de phase d'un système avec seulement un constituant, dont les phases possibles sont au nombre de trois (solide, liquide et gaz). Le plan est celui des variables p et T . On n'a pas dans ce plan des régions de coexistence de phases, et les régions des trois phases sont délimitées par les lignes α (courbe de transition solide-liquide ou courbe de fusion), β (courbe de vaporisation) et γ (courbe de sublimation). Sur chacune de ces courbes on trouve la coexistence de deux phases.

Le point K est encore une fois le point critique. Le point J est dit *point triple* parce qu'il s'agit du seul point du plan où les trois phases coexistent. Notez encore une fois la validité de la règle des phases, Eq. 195: $c = 1$, donc $v + f = 3$, et si $v = 3$, nous avons $f = 0$: aucune variabilité, et donc seulement un point fixe dans le plan des variables, justement le point triple J.

La figure 71 nous donne un exemple d'utilisation du diagramme de phase de la Fig. 70. Considérons un changement d'état de notre système, qui commence à l'état (a) et se termine à l'état (d); le changement a lieu à pression constante, en diminuant la température. Au début, le système se trouve en phase vapeur. Quand nous arrivons à l'état (b), nous traversons la courbe de vaporisation β : une transformation de phase a lieu, inverse de la vaporisation, qui porte de la phase vapeur à la phase liquide. A la fin

de la transformation, nous sommes au-delà du point-état (b), et le système est complètement liquéfié. Ensuite, nous trouvons le point (c) sur la ligne α : nouvelle transformation de phase (solidification). La trajectoire de (c) à (d) ne change pas la phase, et nous avons à la fin une phase solide. Notez que si vous essayez de liquéfier ou solidifier le gaz en partant du point (a) seulement avec une augmentation de la pression, vous n'arrivez à rien: le système reste en phase vapeur.

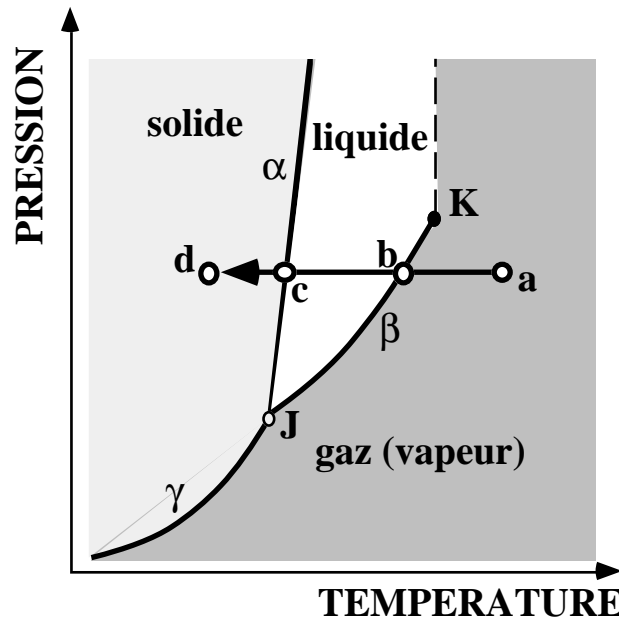


Fig. 71: Utilisation pratique d'un diagramme de phase.

Considérez encore la transformation de phase de liquide à solide et vice-versa (courbe α): une fois fixée la pression, la température est également fixée (ce qui est une conséquence de la règle de Gibbs). Application pratique: prenez à la pression atmosphérique de l'eau liquide avec de la glace, donc le système eau à la transition de phase susmentionnée: cela fixe la température, et peut être utilisé pour la définition d'une température de référence: il s'agit effectivement du zéro des températures Celsius. Une autre application pratique: la courbe β montre que la température de la transition de liquide à gaz (pendant laquelle l'eau bout) diminue avec la pression; conformément à cette prévision, il est plus facile de faire bouillir l'eau pour les *spaghetti* en haute montagne qu'au niveau de la mer, puisque la pression atmosphérique, nous l'avons vu, diminue avec la hauteur!

Mais puisque nous sommes, disons, en haute montagne, occupons-nous pour quelques instants des problèmes de circulation dûs à la neige sur les routes! Nous ferons cela à l'aide du diagramme de phase pour le système eau plus sel de cuisine, montré par la Fig. 72 sur le plan des variables température et concentration de sel, à la pression atmosphérique. Nous voyons sur ce diagramme les trois phases possibles susmentionnées: glace, NaCl solide et solution.

Nous trouvons également quatre régions, dont une avec une phase seulement (solution) et les autres avec coexistence de deux phases. En accord avec les prévisions de la règle de Gibbs, il n'y a qu'un point pour lequel les trois phases coexistent: le point E, dit *point eutectique*.

Notez que la ligne a-E marque la transition de la phase solution pure à la phase solution plus glace. Il est évident que la température de cette transition diminue avec la concentration de sel, en particulier par rapport à la situation de concentration nulle (neige pure et sans sel sur les routes). Voilà donc une manière de prévenir la formation

de la glace, ou bien de forcer la glace déjà formée à se liquéfier: il est nécessaire d'ajouter du sel à l'eau, c'est-à-dire à la neige sur la route.

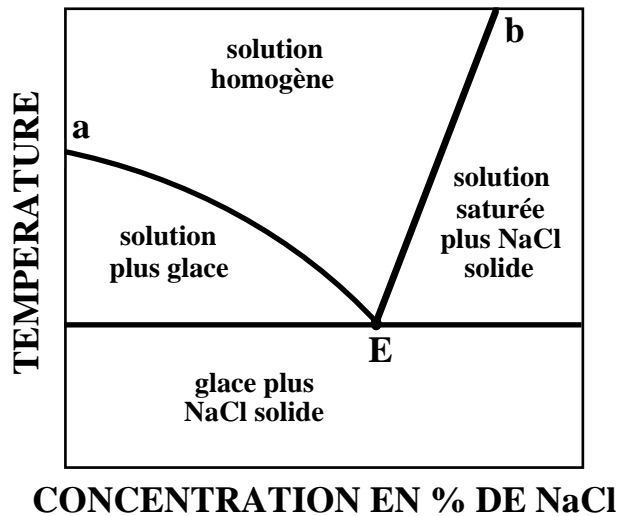


Fig. 72: Diagramme de phase du système sel de cuisine (NaCl) plus eau.

Notez aussi que si vous avez un état de la région "solution homogène", et commencez à augmenter la concentration en ajoutant du sel, vous arrivez à la ligne E-b, et donc au passage à la coexistence des phases solution et solide. On verra donc de petits cristaux de sel se former au fond de la solution. On peut également passer de la solution seule à la région "solution plus solide" à concentration constante, en diminuant la température. Cela est cependant possible seulement si, en diminuant la température, on passe par la ligne E-b, et donc si la concentration est suffisamment élevée. Des considérations de ce genre sont à la base de plusieurs méthodes de fabrication de cristaux, qui sont souvent utilisés par la technologie moderne, notamment en microélectronique.



Le diagramme de phase de la Fig. 72 peut bien sûr nous aider à circuler... mais il ne faut pas exagérer!

Les diagrammes de phase des alliages, utilisés en métallurgie, sont également riches d'application technologiques. La Fig. 73 en montre un exemple simple: le diagramme d'un système formé par deux métaux A et B, qui sont solubles à toute proportion. Le plan du diagramme est celui des variables température et concentration du métal A. La ligne b-c illustre la manière de "lire" un diagramme de ce type: si nous sommes dans la région de coexistence des deux phases liquide et solide, par exemple au point (a), le point correspondant (b) sur la courbe L (liquidus) donne la concentration du métal A dans la phase liquide, tandis que le point (c) sur la courbe S (solidus) donne la concentration de la phase solide.

Aux concentrations limites, 0% ou 100% de métal A, on passe simplement du liquide au solide à la température de transition, T_A pour le métal pur A et T_B pour le métal pur B. Notez cependant que si vous diminuez la température d'une mixture liquide des deux métaux à concentration constante, vous passez de la phase liquide pure à la coexistence de phases à une température inférieure à T_A . Vous passez ensuite à la phase solide à une température plus élevée que T_B .

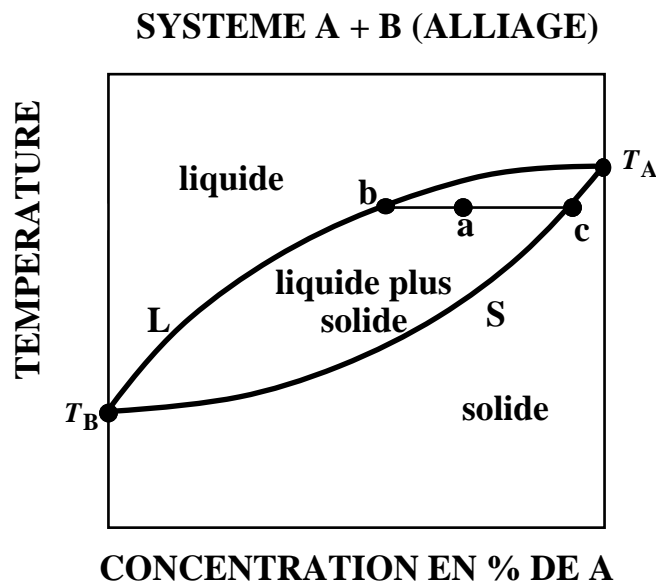


Fig. 73: Diagramme de phase simplifié d'un alliage binaire.

Des informations de ce type sont importantes pour la métallurgie. La plupart des diagrammes de phases en métallurgie sont cependant beaucoup plus compliqués que celui de la Fig. 73; par exemple ils peuvent présenter des phénomènes de non-solubilité et un nombre plus grand de phases possibles.

Le Coin Yankee:

<i>Diagramme de phase</i>	<i>Phase diagram</i>
<i>Point triple</i>	<i>Triple point</i>
<i>Point eutectique</i>	<i>Eutectic point</i>
<i>Alliage</i>	<i>Alloy</i>

“We also see four regions, one with only one phase (solution) and the others with coexistence of two phases. In agreement with the predictions of the Gibbs rule, there is only one point for which the three phases coexist: point E, which is called the eutectic point.”

XXII. La chaleur latente

Une transition de phase peut exiger l'absorption ou l'émission d'énergie par le système. La transmission d'énergie a lieu sous forme de chaleur, suivant les règles générales que nous discuterons plus tard.

La raison de la perte ou de l'acquisition d'énergie est assez facile à comprendre sur le plan microscopique. Prenez par exemple un solide, et considérez sa transition à la phase vapeur (sublimation). Cela implique la destruction des liaisons chimiques entre les atomes du solide, et l'émission de l'énergie emmagasinée dans les liaisons. Par contre, la transition symétrique exige la formation de liaisons chimiques et donc l'absorption de l'énergie nécessaire.

Afin de comprendre les ordres de grandeur, utilisons des exemples simplifiés. Le nombre de liaisons chimiques dans un solide est du même ordre de grandeur que le nombre d'atomes; nous avons déjà vu que la dimension linéaire d'un atome est de l'ordre d'un angström, soit 10^{-10} m; le "volume" occupé par un atome est de l'ordre de $(10^{-10})^3 = 10^{-30}$ m³. Dans 1 cm³ = 10^{-6} m³ de solide on trouve donc un nombre d'atomes dont l'ordre de grandeur est $10^{-6}/10^{-30} = 10^{24}$. Afin d'estimer l'énergie totale des liaisons chimiques correspondantes, nous avons besoin pourtant de l'ordre de grandeur de l'énergie de chaque liaison.

Considérons à ce propos un phénomène agréable tel que le bronzage d'une jolie fille au bord du lac ou de la mer, donné par le soleil d'été. Le bronzage est une transformation chimique qui a lieu dans la peau, et qui est stimulée par l'absorption de l'énergie des photons du soleil; plus spécifiquement, on a besoin de photons ultraviolets, dont l'énergie est de l'ordre de 10^{-18} joule. Cette énergie correspond à celle nécessaire pour détruire une liaison chimique; on peut donc dire qu'il s'agit de l'énergie typique d'une liaison chimique.

Les liaisons d'un centimètre cube de solide ont donc une énergie dont l'ordre de grandeur est $10^{-18} \times 10^{24} = 10^6$ joule. Comparez-la avec l'énergie cinétique typique d'un homme qui court (que nous avons déjà estimée), dont l'ordre de grandeur est 10^3 joule: on peut constater qu'il s'agit d'une énergie remarquable, essentiellement le même type d'énergie que nous extrayons de l'essence avec le moteur de notre voiture.

Notez que la formation ou la destruction de liaisons chimiques n'est pas la seule cause de passage d'énergie entre le système et l'extérieur pendant une transition de phase: on a aussi un changement de volume qui, comme nous le verrons prochainement, donne du travail.

L'absorption ou cession d'énergie est spécifiée par la grandeur qu'on appelle *chaleur latente* de la transformation de phase. La définition est la suivante:

$$L = \frac{Q}{m} , \quad (196)$$

où Q est la quantité de chaleur, donc de l'énergie, nécessaire pour forcer une masse m du matériau considéré à subir la transition de phase. Le signe de L est positif si la chaleur (énergie) est donnée au système de l'extérieur, négatif si elle est donnée *par* le système.

Considérez par exemple la chaleur latente de vaporisation de l'eau, $\approx 2,2 \times 10^6$ joule/kg. Nous utilisons cette chaleur latente très fréquemment. Mettons par exemple que vous

êtes sans air conditionné pendant une torride journée d'été. Vous essayez de vous rafraîchir un peu avec un éventail: comment est-ce que ça fonctionne?



Charmante application de la chaleur latente, vue par Kitagawa Utamaro.

Premièrement, avec l'éventail vous déplacez l'atmosphère près de votre peau, et éliminez de la vapeur d'eau produite par votre sueur; donc, vous réduisez localement l'humidité relative atmosphérique, et rendez plus facile la vaporisation de l'humidité de votre peau. Deuxièmement, cette vaporisation nécessite de l'énergie, celle qui correspond à la chaleur latente. Cette énergie est tirée de l'environnement qui comprend votre peau, et voilà donc un bien agréable refroidissement.

Le Coin Yankee:

Chaleur latente Latent heat

“A phase transition may require the absorption or emission of energy by the system.”

Ordres de grandeur:

Chaleur latente de fusion, $4 \times 10^3 - 5 \times 10^5$ joule/kg.
Chaleur latente de vaporisation, $4 \times 10^4 - 2 \times 10^6$ joule/kg.

XXIII. Le premier principe de la thermodynamique

Nous passons maintenant à un nouveau chapitre de la thermodynamique: celui qui s'occupe des transformations des systèmes. Nous avons déjà discuté une classe de transformations, celles qui concernent les phases d'un système, et nous avons trouvé une série de règles qui les gouvernent. Ce que nous souhaitons faire est de passer aux règles générales qui gouvernent les transformations de tous les types.

D'abord, qu'est-ce qu'une *transformation* en thermodynamique? Nous avons vu que l'état macroscopique ou global d'un système thermodynamique est défini par les valeurs de ses variables d'état, telles que p , V et T pour un gaz idéal ou pour un gaz Van der Waals. Nous avons également vu que les états possibles d'équilibre sont ceux pour lesquels les valeurs des variables d'état sont en accord avec l'équation d'état, par exemple l'équation du gaz parfait ou l'équation Van der Waals. Une transformation est simplement le passage du système d'un de ces états d'équilibre à un autre état d'équilibre.

Enfin, nous avons déjà discuté la différence entre les transformations dont les états intermédiaires sont aussi des états d'équilibre selon la définition susmentionnée, c'est-à-dire les transformations qu'on appelle *réversibles*, et les autres qu'on appelle transformations *irréversibles*.

Il y a une propriété générale de la nature qui est valable pour tout type de transformation: la loi de *conservation de l'énergie*. Cette règle nous dit tout simplement que le bilan de l'énergie donnée au système qui se transforme et de l'énergie cédée par le système doit correspondre précisément au changement - augmentation ou diminution - de l'énergie possédée par le système.

Admettez, par exemple, que nous changeons la pression, le volume et la température d'un gaz. Pendant le changement, nous prenons du gaz une énergie E_1 et lui donnons une énergie E_2 : l'énergie propre ou *énergie interne* du gaz, U , change d'une quantité ΔU telle que:

$$\Delta U = E_2 - E_1. \quad (197)$$

Cette loi est une généralisation de la loi de conservation de l'énergie qu'on a trouvée en mécanique; la loi de conservation de l'énergie mécanique était limitée aux systèmes pour lesquels on pouvait définir une énergie mécanique potentielle: l'énergie mécanique totale du système, donnée par la somme de cette énergie potentielle et de l'énergie cinétique, ne changeait pas pendant le mouvement du système.

La loi de conservation de l'énergie en mécanique ne fonctionnait pas si on ne pouvait pas définir une énergie potentielle, notamment en présence de forces de frottement. On pouvait cependant constater que l'action des forces de frottement conduisait à la production de ce qu'on appelle la *chaleur*. La généralisation de la loi de conservation de l'énergie, exprimée par l'Eq. 197, est achevée en thermodynamique en incluant la chaleur dans le bilan global de l'énergie.

Afin de comprendre cette inclusion, discutons le cas spécifique du gaz parfait. Prenons une bouteille de gaz dans le champ gravitationnel de la terre: en mécanique, on pourrait la considérer comme une masse ponctuelle, qui se déplace à la vitesse de son centre de masse. L'énergie mécanique de la bouteille en tant que masse ponctuelle est donnée par l'énergie potentielle du champ gravitationnel, plus l'énergie cinétique, qui à son tour est donnée par la masse totale de la bouteille multipliée par le carré de la vitesse du centre de masse et divisée par deux.

Cette analyse ne comprend pas une partie importante de l'énergie: celle qui correspond au mouvement *microscopique* des particules de gaz, qui est décrit globalement par la température. Nous sommes en mesure de changer cette énergie en *chauffant* le gaz, c'est-à-dire en lui donnant de la chaleur. Le chauffage ne change pas l'énergie cinétique de la bouteille considérée comme une masse ponctuelle, mais on doit cependant le prendre en considération si on veut arriver au bilan global de l'énergie.

On peut donc distinguer entre deux formes de cession ou extraction d'énergie: premièrement, la forme macroscopique, qui est produite par des forces macroscopiques qui font du *travail*; deuxièmement, la transmission de la chaleur, c'est-à-dire d'énergie au niveau des mouvements des composantes microscopiques du système. Appelons W le travail net d'une transformation (celui fait *par* le système moins celui fait *sur* le système), et Q la chaleur nette de la même transformation (celle donnée *au* système moins celle cédée *par* le système). Nous avons, en ce qui concerne le bilan des énergies prises et cédées par le système:

$$E_2 - E_1 = Q - W, \quad (198)$$

et donc, selon l'Eq. 197:

$$\Delta U = Q - W. \quad (199)$$

Cette équation est la généralisation de la loi de conservation de l'énergie, et correspond au *premier principe de la thermodynamique*.

Elle correspond également à une série énorme de conséquences pratiques, qui nous touchent chaque jour de notre vie. Avant de généraliser la loi de conservation de l'énergie, on pouvait avoir l'illusion d'être en mesure de créer de l'énergie, qui est nécessaire pour tous types d'applications pratiques. La loi 199 nous dit que cela est impossible: on peut transformer l'énergie, mais on ne peut pas la créer ou la détruire. Voilà donc l'importance énorme de trouver des sources d'énergie afin de les transformer pour les applications souhaitées: le rêve d'un mouvement perpétuel avec création d'énergie est justement cela: un rêve.

XXIII.1. Les signes de la première loi de la thermodynamique.

Le signe qui est utilisé pour le travail dans l'Eq. 199 est souvent une cause de confusion. La raison en est que nous avons deux conventions possibles, et que chaque texte de physique peut adopter l'une ou l'autre de ces conventions. Nous souhaitons donner un aide-mémoire simple pour la convention adoptée ici.

Avant de commencer notre discussion, il est important de réaliser que la convention des signes ne change pas la *physique* de la première loi, c'est-à-dire la conservation de l'énergie: on ne peut changer que la manière d'écrire les équations qui décrivent cette physique.

La convention en ce qui concerne la chaleur est toujours la même pour tous les textes: la chaleur échangée est *positive* si elle passe *de l'extérieur du système au système*, et vice versa.

La convention sur le travail n'est pas générale. Nous avons adopté celle qui se base sur le fonctionnement des moteurs: un moteur thermique prend de la chaleur de l'extérieur et la transforme, produisant du travail qu'il passe à l'extérieur, ce qui suggère un signe *positif* pour le travail qui passe *du système à l'extérieur*. Avec cette convention, la

première loi correspond à l'Eq. 199. Notez le signe négatif du travail dans cette équation; la raison en est simple: avec cette convention, du travail positif signifie de l'énergie qui passe du système à l'extérieur, et donc une *diminution* de l'énergie du système.

Au contraire, d'autres textes adoptent la convention suivante: le travail, comme la chaleur, est positif s'il correspond à une énergie donnée au système de l'extérieur. Avec cette convention nous devrions écrire l'Eq. 199 sous la forme suivante:

$$\Delta U = Q + W,$$

où le signe du travail est positif.

En ce qui concerne les exercices et les applications pratiques, on peut éviter la confusion et les erreurs en suivant deux règles:

1. Adoptez une des deux conventions sur le signe du travail au début, et ne la changez pas par la suite.
2. Afin de rappeler quelle est la forme de la première loi qui correspond à la convention que vous avez adoptée, utilisez la conservation de l'énergie. Supposons, par exemple, que la convention est "travail positif s'il est fait par le système". Cela implique une diminution de l'énergie du système pour un travail positif, et donc l'Eq. 199:

$$\Delta U = Q - W.$$

XXIII.2. L'énergie interne est une fonction d'état.

Le premier principe ou première loi fondamentale de la thermodynamique est valable pour une transformation quelconque. En particulier, pour les transformations qui ne correspondent qu'à des changements limités des valeurs des variables d'état. Supposons, par exemple, qu'un gaz subit une transformation infinitésimale, passant de l'état p, V, T à l'état $p+dp, V+dV, T+dT$. L'Eq. 199 peut être écrite:

$$dU = \delta Q - \delta W, \tag{200}$$

où dU signifie le changement infiniment petit d'énergie interne causé par la transformation, et δW et δQ sont les quantités, également infiniment petites, de travail et de chaleur échangées entre le système et l'extérieur au cours de la transformation.

Notez que l'Eq. 200 utilise deux symboles différents pour les quantités infinitésimales, "d" ou "δ". Cette différence formelle exprime une différence fondamentale plus profonde. Afin de comprendre cette différence, considérez un gaz parfait; le principe d'équipartition nous dit que l'énergie moyenne de chaque degré de liberté est $kT/2$. Supposons que le gaz est composé de $N = nN_A$ particules (n = nombre de moles), chacune avec η degrés de liberté; l'énergie interne est:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T. \tag{201}$$

Le point fondamental de cette relation est que l'énergie interne U ne dépend que de la température du gaz. La température est une variable d'état, et donc l'énergie interne est une fonction des variables d'état, donc elle est *une fonction d'état*. Cette conclusion est valable en général et non seulement pour le gaz parfait:

l'énergie propre ou interne U d'un système thermodynamique est une fonction d'état.

Qu'est-ce que cela implique? Une fonction d'état telle que U ne dépend que de l'état du système. Si on considère une transformation de l'état du système, les changements correspondants des fonctions d'état comme l'énergie interne U sont exclusivement déterminés par l'état initial et par l'état final.

Le changement d'une fonction d'état telle que U ne dépend pas des états intermédiaires de la transformation.

Par exemple, le changement d'énergie interne d'un gaz qui est donné par une transformation de l'état p_1, V_1, T_1 à l'état p_2, V_2, T_2 est toujours le même, indépendamment des états intermédiaires de la transformation. Par contre, la chaleur Q et le travail W qui sont échangés avec l'extérieur dépendent de la manière d'effectuer la transformation. Chaleur et travail ne sont pas des fonctions d'état.

On peut donc formuler le premier principe de la thermodynamique en lisant l'Eq. 199 de la manière suivante:

Au cours d'une transformation d'un état à l'autre, la chaleur Q et le travail W que le système échange avec l'extérieur dépendent des états intermédiaires, tandis que leur différence ne dépend que des états initial et final; cette différence correspond donc au changement d'une fonction d'état, qui est l'énergie interne du système.

Cette différence fondamentale de comportement entre la fonction d'état U et les quantités Q et W est évidemment présente aussi pour des transformations infinitésimales: d'où l'Eq. 200, pour laquelle on utilise des symboles différents, " δ " pour les quantités infinitésimales de chaleur et travail et " d " pour le changement infinitésimal d'énergie interne, afin de souligner la différence de comportement au cours de la transformation.

XXIII.3. La question de l'état de référence

Nous avons répété plusieurs fois que les mesures sont la base de toute la physique (et de toute la science et de la technologie): toutes les quantités physiques, par exemple, doivent être définies en décrivant la manière de les mesurer. Il y a à ce propos une question délicate concernant l'énergie interne et les fonctions d'état en général.

Au cours d'une transformation, les mesures sur le système nous donnent seulement les *changements*. Nous sommes en mesure, par exemple, de dire qu'une transformation donnée change l'énergie interne d'un gaz de 10 joules; donc, l'énergie de l'état final est 10 joules plus grande par rapport à l'énergie de l'état initial. Si nous admettons que l'énergie de l'état initial est nulle, alors celle de l'état final est de 10 joules.

Des mesures de ce type ne sont pas suffisantes pour nous donner la valeur *absolue* d'une fonction d'état telle que l'énergie interne. Nous donnons toujours l'énergie d'un état par rapport à celle d'un autre état; on utilise donc la convention, c'est-à-dire l'accord pratique, d'attribuer une énergie nulle à cet *état de référence*. La procédure est assez similaire à la définition des hauteurs: nous donnons généralement les hauteurs par rapport au niveau de la mer; donc, par convention, la hauteur de la mer est nulle.

Mais rien ne nous empêcherait de changer notre convention et d'avoir, par exemple, le point de hauteur nulle à 100 mètres au-dessus du niveau de la mer. Notons que ce

changement du point de hauteur nulle ne change pas les différences de hauteur d'un endroit à l'autre. Nous sommes principalement intéressés aux changements et nous mesurons d'ordinaire des changements, et donc la définition absolue de la hauteur et le point de hauteur nulle qui lui correspond n'ont qu'une importance secondaire.

D'une manière similaire, la définition absolue de la valeur d'une fonction d'état telle que l'énergie interne a une importance secondaire par rapport aux changements de cette fonction d'un état à l'autre. La définition absolue dépend du choix de l'état pour lequel la fonction est nulle, alors qu'au contraire les changements de la fonction ne sont pas touchés par ce choix.

Nous avons vu, par exemple, que l'énergie interne d'un gaz parfait est donnée par l'Eq. 201:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T ,$$

et donc elle est nulle pour un état pour lequel la température est nulle. Le modèle microscopique du gaz parfait nous dit que cet état correspond à des molécules sans mouvement, et donc à une énergie cinétique nulle. En disant que l'énergie interne est nulle, nous disons aussi automatiquement que l'énergie potentielle est nulle: voilà le choix du point d'énergie nulle pour le système gaz parfait.

Mais rien ne nous empêcherait de supposer que l'état à température nulle correspond à une énergie interne, disons, de 15 joules. Les changements d'énergie d'un état à l'autre ne seraient pas touchés par la modification de la convention sur le point d'énergie nulle. Il existe cependant des raisons importantes pour le choix de l'état de référence pour d'autres fonctions d'état telles que l'entropie, que nous discuterons plus tard.

Le Coin Yankee:

Travail Work
Etat Intermediate
intermédiaire State
Etat de référence Reference state

“During a transformation from a state to another, the work W and the heat Q that the system exchanges with the external world depend on the intermediate state, whereas their difference depends only on the initial state and on the final state: this difference corresponds, therefore, to the change of a state function, which is the internal energy of the system. ”

XXIV. Exemples de transformation pour les gaz; chaleurs spécifiques

Nous analyserons maintenant une série de transformations possibles pour un gaz parfait, afin d'appliquer pratiquement les idées du premier principe de la thermodynamique.

Nous commencerons avec des transformation réversibles, c'est-à-dire des transformations dont les états intermédiaires sont des états d'équilibre, en accord avec l'équation d'état (Eq. 156):

$$pV = nRT .$$

XXIV.1. Les isothermes

Considérons d'abord les transformations isothermiques, qui sont par définition celles à température constante; l'Eq. 156 nous donne:

$$pV = \text{constante}, \quad (202)$$

et les courbes correspondantes sont les isothermes de la Fig. 60.

Nous avons vu que la fonction d'état énergie interne U pour le gaz parfait ne dépend que de la variable d'état température (voir l'Eq. 201). Pour une transformation isothermique on a donc:

$$U = \text{constante}; dU = 0. \quad (203)$$

Le premier principe, Eq. 200, donne dans ce cas:

$$\delta Q - \delta W = 0. \quad (204)$$

Nous devons maintenant obtenir une expression générale pour le travail pendant une transformation. Prenez la figure 74, concernant une transformation infinitésimale de l'état (p, V, T) à l'état $(p+dp, V+dV, T+dT)$ du gaz parfait contenu dans un cylindre muni d'un piston. Au cours de la transformation, le piston est déplacé de dx , grâce à l'action d'une force dont la grandeur est f . L'équilibre des forces exige que $f = pS$, où S est la superficie du piston. Le travail étant donné par définition par $\delta W = f dx = pS dx$, et puisque $S dx$ est le changement infinitésimal de volume dV , nous avons:

$$\delta W = p dV. \quad (205)$$

Cette relation, que nous avons dérivée pour le cas particulier de la figure 74, est cependant valable en général. L'Eq. 156 nous donne $p = nRT/V$, et l'Eq. 205 devient:

$$\delta W = nRT \frac{dV}{V}. \quad (206)$$

Pour une transformation *isotherme* ($T = \text{constante}$) qui change le volume de V_1 à V_2 , l'Eq. 206 peut être facilement intégrée:

$$W = nRT \ln(V_2/V_1) = nRT \ln(p_1/p_2). \quad (207)$$

XXIV.2. Les transformations à volume constant.

Passons maintenant à une deuxième classe importante de transformations des gaz: celle des *transformations à volume constant*. L'Eq. 205 nous dit immédiatement que pour les transformations de ce type il n'y a pas de travail produit par le système ou fait sur le système: $\delta W = 0$. Le premier principe de la thermodynamique, Eq. 200, donne dans ce cas:

$$dU = \delta Q . \quad (208)$$

Nous avons vu que la chaleur spécifique d'une mole de gaz C_V pour une transformation à volume constant est, par définition, la quantité de chaleur qui est nécessaire pour augmenter la température, rapportée à une augmentation unitaire de T :

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V , \quad (209)$$

où l'indice "V" signifie que les dérivées sont estimées à volume constant.

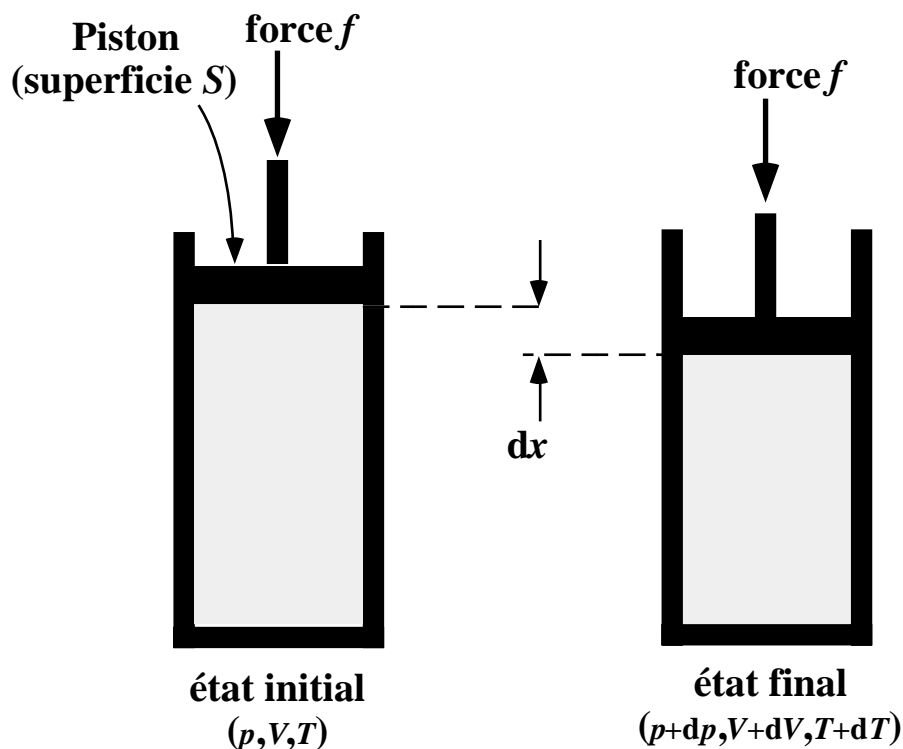


Fig. 74: Calcul du travail donné par un changement de volume dV .

Dans le cas d'un gaz parfait, nous avons vu (Eq. 201) que:

$$U = N\eta kT/2 = (n\eta R/2)T ,$$

et donc la fonction d'état énergie interne U dépend seulement de la variable d'état température; cela nous permet d'écrire l'Eq. 209 sans utiliser la dérivée partielle:

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V ,$$

et donc:

$$dU = C_V dT. \quad (210)$$

Notez que cette équation a été dérivée en analysant des transformations à volume constant, mais elle est cependant valable en général pour le gaz parfait. La raison en est que U est fonction de T seulement pour le gaz parfait: une fois cette fonction obtenue dans un cas particulier, elle est aussi la fonction générale; de même, une fois le différentiel de cette fonction obtenu dans un cas particulier, il est valable en général.

Soulignons encore ce point fondamental: le changement infinitésimal de U est donné par $C_V dT$ pour *toutes* les transformations du gaz parfait; le fait que la chaleur molaire à volume constante C_V se trouve dans cette relation (Eq. 210) ne doit pas porter à conclure que $dU = C_V dT$ est seulement valable pour les transformations à volume constant.

En utilisant ce dernier résultat et l'Eq. 205, on peut écrire en général le premier principe de la thermodynamique pour un gaz parfait sous la forme suivante:

$$C_V dT = \delta Q - p dV , \quad (211)$$

où, en considérant les Eq. 201 et 210:

$$C_V = n\eta R/2. \quad (212)$$

XXIV.3. Les transformations à pression constante

La troisième classe principale de transformations des gaz concerne les transformations qui ont lieu sans changement de pression: $p = \text{constante}$. L'Eq. 211 donne $\delta Q = C_V dT + p dV$. On peut utiliser cette relation afin de calculer la chaleur molaire C_p à pression constante:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = C_V + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (213)$$

En tenant compte de l'Eq. 156 ($pV = RT$), nous avons $dV = d(RT/p)$, qui à pression constante donne $dV = (R/p)dT$, et l'Eq. 213 devient:

$$C_p = C_V + R. \quad (214)$$

Cette simple relation des chaleurs molaires à volume constant et à pression constante peut être manipulée en tenant compte de la liaison entre la chaleur molaire C_V et le nombre de degrés de liberté de chaque particule de gaz. L'Eq. 212 montre que, pour des particules monoatomiques, $C_V = 3R/2$, tandis que, pour des particules biatomiques ou avec encore plus d'atomes, on a $C_V = 5R/2$ ou $C_V = 3R$. Pour ces trois cas l'Eq. 214 devient $C_p = 5R/2$, $C_p = 7R/2$ et $C_p = 4R$.

Le caractère monoatomique, biatomique etc. des particules de gaz peut être exprimé à l'aide du rapport des deux chaleurs molaires:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (215)$$

et nous avons:

$$\begin{aligned} \gamma &= 5/3 \text{ pour des particules monoatomiques;} \\ \gamma &= 7/5 \text{ pour des particules biatomiques;} \\ \gamma &= 4/3 \text{ pour des particules formées par plus de deux atomes.} \end{aligned} \quad (216)$$

Les mesures des chaleurs spécifiques et du rapport γ nous donnent ainsi une manière d'analyser la structure microscopique des particules de gaz. Il s'agit d'une relation très intéressante entre le monde macroscopique et le monde microscopique, relation qui est à son tour liée à la relation générale entre les propriétés thermodynamiques globales et l'état microscopique d'un système.

XXIV.4. Les transformations adiabatiques

Passons maintenant à une dernière classe importante de transformations des gaz: les transformations qui ne comportent pas de transmission de chaleur, ni du gaz à l'extérieur ni de l'extérieur au gaz; on appelle les transformations de ce type *adiabatiques*.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au gaz parfait, Eq. 211, donne $C_v dT = -pdV$. En tenant compte de la loi du gaz parfait, Eq. 156, cette relation devient $-pdV = C_v d(pV/R) = (C_v/R)(Vdp + pdV)$, qui donne $((R+C_v)/C_v)pdV = -Vdp$. D'autre part, les équations 214 et 215 donnent $((R+C_v)/C_v) = C_p/C_v = \gamma$, et donc nous avons: $\gamma pdV = -Vdp$, et:

$$\gamma \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}. \quad (217)$$

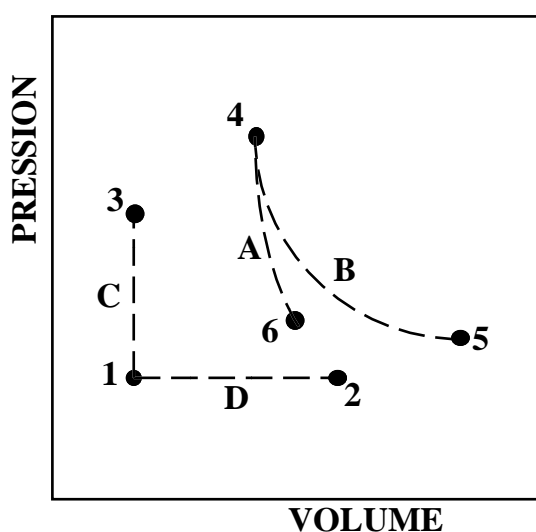


Fig. 75: Quatre types de transformations du gaz parfait sur le plan p,V : (A) adiabatique; (B) isotherme; (C) à volume constant; (D) à pression constante.

Cette équation peut être facilement intégrée. Si nous prenons une transformation adiabatique de l'état initial (p_1, V_1, T_1) à l'état final (p_2, V_2, T_2) , nous obtenons:

$$\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} , \quad (218)$$

et donc: $\gamma \ln(V_2/V_1) = - \ln(p_2/p_1)$; cette relation donne à son tour $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$. On peut donc conclure que pour une transformation adiabatique on a:

$$pV^\gamma = \text{constante}. \quad (219)$$

Il est intéressant de noter qu'il existe une loi générale, valable pour les quatre classes de transformation du gaz parfait que nous avons discutées:

$$p^a V^b = \text{constante}, \quad (220)$$

où $a = 1$ et $b = 0$ pour les transformations à pression constante, $a = 0$ et $b = 1$ pour les transformations à volume constant, $a = b = 1$ pour les isothermes, et enfin $a = 1$ et $b = \gamma$ pour les adiabatiques. La figure 75 donne des exemples des courbes dans le plan p, V qui correspondent à ces quatre types de transformations.

Le Coin Yankee:

Isotherme Isotherm
Adiabatique Adiabatic

“Note once again this fundamental point: the infinitesimal change of U is given by $C_V dT$ for all transformations of the ideal gas; the fact that the molar heat at constant volume C_V is found in this relation (Eq. 210) must not lead to the conclusion that $dU = C_V dT$ is only valid for constant-volume transformation.”

XXV. La chaleur spécifique des solides

Nous avons traité au cours des chapitres précédents la chaleur spécifique (et la chaleur molaire) des gaz, c'est-à-dire la quantité de chaleur que le gaz doit absorber ou céder afin d'augmenter ou diminuer sa température, estimée pour une augmentation ou diminution unitaire. Le modèle microscopique du gaz parfait nous a permis de trouver une liaison entre les chaleurs spécifiques et l'état de mouvement des particules.

De quelle manière doit-on changer la discussion si on passe des gaz aux solides? Encore une fois, la température mesure essentiellement le degré de mouvement microscopique; mais l'énergie de ce mouvement n'est plus purement cinétique comme pour le gaz parfait. Le mouvement concerne les distances entre les atomes, donc leurs liaisons chimiques, et correspond tant à une énergie cinétique qu'à une énergie potentielle.

Le premier principe de la thermodynamique, étant une loi générale de la nature, est cependant toujours valable. Nous analyserons ici les transformations (chauffage et refroidissement d'un solide) à volume constant, puisque le volume d'un solide change effectivement peu au cours d'une transformation. Les transformations de ce type - nous l'avons déjà vu - ne comportent pas de travail, et donc le premier principe donne $\delta Q = dU$. En ce qui concerne la chaleur molaire:

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V. \quad (221)$$

Essayons donc de calculer l'énergie interne U et surtout son changement par rapport à une augmentation ou diminution de température. Chacun des atomes du solide possède une énergie cinétique K ; le principe d'équipartition, toujours valable, nous dit que la valeur moyenne de cette énergie cinétique est

$$K = \frac{3kT}{2}, \quad (222)$$

c'est-à-dire $kT/2$ par degré de liberté, multiplié par trois qui est le nombre de degrés de liberté.

Quelle est l'énergie potentielle du mouvement d'un atome? On peut démontrer (il s'agit d'un théorème général de la mécanique) que le mouvement des atomes d'un solide est approximativement équivalent à ceux d'un ensemble d'oscillateurs linéaires, dont le nombre total est égal au nombre de degrés de liberté du solide. On peut donc calculer l'énergie potentielle de chaque degré de liberté comme si son comportement était celui d'un oscillateur à une dimension.

On a appris par la mécanique qu'un oscillateur, c'est-à-dire un système dominé par une force élastique $f = -Cx$ (où x est la coordonnée du mouvement), se déplace en fonction du temps suivant une fonction oscillatoire du type:

$$x = x_0 \sin(\omega t), \quad (223)$$

où $\omega = \sqrt{C/m}$ est la *pulsation* (fréquence angulaire) du mouvement (m est la masse (ponctuelle) de l'oscillateur). L'énergie cinétique est donnée par $K = mv^2/2$. A son tour, la vitesse est donnée par:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t), \quad (224)$$

et donc:

$$K = m(x_0 \omega)^2 \cos^2(\omega t) / 2. \quad (225)$$

Passons maintenant à l'énergie potentielle V . Pour une force de type élastique $f = -Cx$, la mécanique nous dit que V est proportionnelle à x^2 , et plus spécifiquement que:

$$V = m\omega^2 x^2 / 2 = m(x_0 \omega)^2 \sin^2(\omega t) / 2. \quad (226)$$

Effectuons une comparaison des équations (225) et (226): l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont données presque par la même expression, à l'exception de la fonction \sin^2 pour V et \cos^2 pour K . Ces deux fonctions sont du même type, à l'exception d'un déphasage de 90° . En calculant leurs moyennes sur une longue période, elles donnent la même valeur ($1/2$). On peut donc conclure que la moyenne sur un temps assez long (par rapport à la période d'oscillation) de l'énergie potentielle d'un oscillateur est égale à celle de l'énergie cinétique.

Cette propriété nous permet de conclure que l'énergie interne du solide est double par rapport à l'énergie cinétique des mouvements de vibration thermique de ses atomes. Celle-ci étant $kT/2$ par degré de liberté, et donc $3N_A kT/2 = 3RT/2$ pour l'ensemble des atomes d'une mole de solide, nous avons:

$$U = 3RT, \quad (227)$$

et, en tenant compte de l'Eq. 221:

$$C_V = 3R. \quad (228)$$

On trouve donc encore une fois, comme pour le gaz parfait monoatomique, que la chaleur molaire à volume constant ne dépend pas du type des atomes (c'est-à-dire des éléments qui composent le solide). Elle est au contraire une *quantité universelle*, valide pour tous les solides.

Cette propriété vraiment extraordinaire est connue comme la loi de Dulong et Petit.

XXV.1. Chaleurs spécifiques: les limites du traitement classique.

Les prévisions de la théorie sont une bonne chose, mais elle ne valent rien sans une démonstration expérimentale de leur validité. La théorie classique des mouvements microscopiques des gaz et des solides nous a menés à des prévisions qui sont très intéressantes: les chaleurs molaires sont des quantités universelles. Par exemple, nous venons de réaliser que la chaleur molaire des solides à volume constant devrait toujours être $3R$. Pour le gaz parfait monoatomique, nous avons prévu que $C_V = 3R/2$ et $C_P = 5R/2$; nous avons trouvé des expressions également universelles pour les gaz pluriatomiques.

Ces prévisions sont-elles confirmées par les expériences? La réponse est positive si les expériences ont lieu à des températures assez élevées. Mais on constate au contraire des divergences importantes des résultats des mesures par rapport à ces prévisions si la température diminue. Par exemple, la chaleur molaire à volume constant d'un solide

diminue par rapport à $3R$ si la température devient basse, et tend à zéro dans la limite $T = 0$ K.

Quelles sont les causes de ces déviations? Elles sont de deux types différents. Premièrement, la dérivation des prévisions classiques pour les chaleurs molaires se base sur une série d'approximations, qui ne sont pas strictement valables pour un système réel. Prenez par exemple un gaz: les résultats dérivés pour un gaz parfait ne sont plus valables si le gaz se comporte plutôt comme un gaz Van der Waals. Pour un solide, nous avons adopté l'hypothèse que le mouvement microscopique de vibration thermique des atomes est équivalent à celui d'un ensemble d'oscillateurs soumis à des forces élastiques. Cette hypothèse est cependant une approximation; par exemple, le centre des oscillations ne devrait pas changer avec l'énergie, c'est-à-dire avec la température, ce qui ne permet pas de comprendre des phénomènes simples tels que l'expansion des solides causée par le chauffage.

On peut donc améliorer l'accord entre la théorie classique et les résultats expérimentaux en changeant un peu les hypothèses, afin de les rendre plus réalistes; cela toutefois sans changer la base du traitement théorique. On constate cependant qu'il y a des différences entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques qu'on n'arrive pas à éliminer par des améliorations marginales de la théorie.

Il existe donc quelque chose de plus fondamental qui empêche la théorie de fonctionner aux basses températures. Le problème est lié à l'hypothèse implicite qu'on peut toujours chauffer ou refroidir un solide ou un gaz en augmentant ou diminuant son énergie de n'importe quelle quantité, sans limite inférieure. La physique quantique montre au contraire que les changements sont quantifiés, et donc par exemple qu'on ne peut pas "chauffer" un atome en lui donnant une quantité d'énergie qui correspond à moins d'une certaine énergie minimum. Cela implique des divergences importantes par rapport au traitement classique lorsque les températures et donc les énergies en jeu sont assez faibles. Voilà donc une limite générale de validité de notre théorie classique des mouvements microscopiques des gaz et des solides.

Le Coin Yankee:

*Oscillateur Oscillator
Pulsation Angular frequency*

"We find once again, as for the monoatomic ideal gas, that the molar heat at constant volume does not depend on the type of atoms, i.e., on the elements that form the solid. It is, on the contrary, an universal quantity valid for all solids. "

XXVI. Le deuxième principe

La deuxième loi fondamentale de la thermodynamique est un cas très intéressant de liaison entre problèmes pratiques et propriétés fondamentales de la nature: sa dérivation a été stimulée par des questions très pratiques d'ingénierie, mais elle touche même à des aspects philosophiques de notre connaissance de la nature. Elle fournit spécifiquement la manière d'identifier sur l'axe du temps la direction positive (du passé au futur).

Les questions pratiques d'abord: plusieurs des savants qui ont développé les idées fondamentales de la thermodynamiques étaient surtout intéressés aux applications qui touchaient leurs expériences et leurs intérêts. Ils étaient de braves hommes qui produisaient et vendaient de la bière, ou bien des inventeurs qui essayaient de construire des machines pour les transports et la production industrielle.

Ils avaient réalisé assez rapidement que le problème fondamental était celui de l'énergie: afin de faire fonctionner une machine, on avait besoin de prendre de l'énergie, de la transformer à l'aide d'un moteur, de manière à obtenir la forme d'énergie nécessaire pour la machine. Par exemple, un train pouvait fonctionner si on arrivait à prendre l'énergie des liaisons chimiques du charbon, et à la transformer d'abord en chaleur et ensuite en énergie cinétique.

Puisqu'on doit toujours payer pour l'énergie à transformer, afin d'augmenter le profit du fonctionnement des machines on souhaiterait obtenir la plus grande quantité possible d'énergie dans la forme finale à partir de la plus petite quantité possible d'énergie dans la forme initiale. Soit E_i l'énergie sous la forme initiale et E_f celle produite par un moteur sous la forme finale exigée par l'application: on appelle:

$$R = E_f/E_i \quad (229)$$

le *rendement* du moteur. Un des objectifs pratiques de l'étude de la thermodynamique est donc d'optimiser le rendement des moteurs.

Les deux principes de la thermodynamique sont aussi les règles du jeu de cette optimisation. Le premier principe nous dit tout simplement que le rendement ne peut pas dépasser l'unité, $R \leq 1$, puisque nous ne pouvons pas créer de l'énergie, c'est à dire obtenir plus d'énergie dans la forme finale que l'énergie initiale.

Les moteurs réels n'arrivent cependant pas à cette limite: on constate que $R < 1$ puisque $E_f < E_i$. La conservation de l'énergie nous dit aussi que la différence $E_f - E_i$ ne peut pas disparaître: elle doit être émise par le moteur, mais pas dans la forme finale utilisée par la machine connectée au moteur.

L'expérience de tous les jours nous montre effectivement qu'un moteur donne du chauffage, et donc qu'une partie de l'énergie E_i qui alimente le moteur se retrouve comme chaleur émise par le moteur, $-Q_e$. Le premier principe de la thermodynamique exige que:

$$-Q_e = E_f - E_i, \quad (230)$$

et donc l'Eq. 229 devient:

$$R = (E_i - Q_e)/E_i. \quad (231)$$

Une question s'impose à ce point: qu'est-ce qui nous empêcherait d'augmenter le rendement du moteur, même jusqu'à l'unité, simplement en récupérant la chaleur émise Q_e et en la transformant elle aussi en énergie dans la forme utilisée par la machine connectée au moteur?

Evidemment, la réponse ne peut pas être donnée par le premier principe de la thermodynamique, qui exige seulement le bilan global des énergies. Mais, en pratique, on constate que les efforts pour augmenter le rendement ne peuvent pas dépasser une limite donnée. L'existence de cette limite peut être facilement analysée dans le cas des moteurs thermiques, c'est-à-dire des moteurs pour lesquels l'énergie initiale E_i est aussi sous la forme de chaleur, par exemple les moteurs à vapeur.



Ni le moteur à vapeur d'un train, ni même celui d'une voiture du Prof. Margaritondo ne peuvent dépasser les limites de rendement dérivées du deuxième principe de la thermodynamique

Supposons donc que E_i soit une quantité de chaleur Q_i , extraite d'une source thermique (par exemple un feu alimenté par le charbon) à la température T_i . L'Eq. 231 devient:

$$R = (Q_i - Q_e)/Q_i. \quad (232)$$

Mais qu'est-ce qui nous empêche, donc, de prendre la chaleur Q_e émise par le moteur, et de l'ajouter à la source qui l'alimente, afin d'augmenter le rendement?

Le problème est que le moteur thermique doit toujours avoir la source de chaleur Q_i à une température T_i plus élevée que la température T_e du système de refroidissement qui prend la chaleur Q_e . D'autre part, on ne peut pas faire passer de la chaleur du système de refroidissement à la source, puisqu'on n'a jamais un passage spontané de chaleur d'une température à une autre plus élevée; il est donc impossible d'arriver au rendement unitaire. Cette conclusion est effectivement une des formulations possibles du deuxième principe de la thermodynamique, le *principe de Clausius*:

Une transformation ne peut pas avoir pour seul résultat de faire passer de la chaleur d'un système à un autre système, si la température du second est plus élevée que la température du premier.

Notez le mot "seul" dans cette phrase: rien ne nous empêche de faire passer de la chaleur d'un corps à un autre corps à température plus élevée à l'aide d'une intervention de l'extérieur, qui cependant comporte d'autres résultats: cela a lieu

continuellement dans les réfrigérateurs, par exemple. Le principe de Clausius ne concerne que les transformations spontanées sans interférence de l'extérieur.



Rudolf Clausius, qui découvrit tant la relation entre chaleur et énergie que la notion d'entropie (qu'il baptisa) et la version du deuxième principe de la thermodynamique qui porte son nom.

Mais quelle est la raison de l'impossibilité du passage spontané de chaleur avec augmentation de la température?

La raison en est donnée par le calcul des probabilités: prenons par exemple deux bouteilles de gaz parfait I et E, aux températures T_i et T_e , avec $T_e < T_i$. Mettons-les en contact thermique. On peut envisager une grande série d'états finaux, comprenant des états avec I à température encore plus élevée que T_i . Mais ces états ont une probabilité extrêmement faible d'être réalisés. L'état le plus probable est celui d'équilibre, avec la même température pour I et E.

Le Coin Yankee:

*Moteur Engine, motor
Rendement Efficiency*

“No transformation can produce as its only result the transmission of heat from a system to another system, if the temperature of the second system is higher than the temperature of the first.”

XXVII. L'entropie

XXVII.1. Une soirée au casino

Afin de comprendre cette question de la probabilité, nous sommes obligés de passer quelques heures de jeu de hasard dans un casino (désolé, MM. les puritains: la Science l'exige). On souhaite jeter les dés, et gagner de l'argent. Pour ce faire, on doit estimer la probabilité de chaque résultat avant de commencer à parier.

Supposons qu'on utilise deux dés, dont les résultats individuels peuvent être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Chacun des 6 résultats du premier dé peut être combiné avec les 6 résultats possibles du deuxième dé. Donc, les résultats possibles pour le système des deux dés sont $N_E = 6 \times 6 = 36$. Donnons maintenant un caractère thermodynamo-mécano-statistique à notre soirée de jeu en appelant la quantité N_E "nombre des états microscopiques possibles" du système des deux dés.

Pourquoi états *microscopiques*? Parce qu'ils sont définis par l'état de chacune des microcomposantes du système, c'est-à-dire par le résultat de chacun des deux dés. Par contre, l'état *macroscopique* (thermodynamique, si vous voulez) du système des deux dés est donné par la variable (d'état) globale, la somme des résultats des deux dés.

Notez que *chaque état macroscopique correspond à plusieurs états microscopiques possibles*. Par exemple, le résultat global (état macroscopique) "3" peut être donné par les deux "états microscopiques" (1,2), (2,1). En appelant $n_E(3)$ le nombre d'états microscopiques qui correspondent à l'état macroscopique "3", nous avons $n_E(3) = 2$.

Il est évident que la probabilité d'un état macroscopique est donnée par le nombre des états microscopiques qui lui correspondent, divisé par le nombre total d'états microscopiques possibles. Par exemple, la probabilité $P(3)$ de l'état macroscopique "3" est $P(3) = n_E(3)/N_E = 2/36 \approx 6\%$. Si on parie 100 CHF sur ce résultat, et le casino paie seulement 200 CHF au gagnant, vous êtes donc presque sûr de perdre votre argent à toute vitesse.

Mais en ce cas, avant de quitter le casino, essayer de résumer ce que vous avez tiré de votre expérience: essentiellement, la probabilité d'un état macroscopique d'un système est proportionnelle au nombre des état microscopiques qui lui correspondent.

XXVII.2. Du casino aux gaz

Confortés par ce résultat, nous sommes prêts à analyser le problème de passage de la chaleur d'un système à l'autre. Considérons les deux bouteilles de gaz parfait I et E: initialement, elles sont isolées l'une de l'autre, et se trouvent aux températures T_i et T_e , avec $T_e \neq T_i$. Ensuite, on crée un contact thermique entre les deux bouteilles, avec passage d'énergie mais non de particules.

Afin de simplifier notre analyse, nous supposerons que les deux bouteilles sont parfaitement égales l'une à l'autre et qu'elles contiennent la même quantité du même type de gaz. En spécifiant la température d'une bouteille ainsi que sa pression et son volume, nous spécifions son état macroscopique. La température correspond à l'énergie moyenne des particules du gaz; mais une valeur de l'énergie moyenne peut être le résultat de plusieurs manières de distribuer la même énergie totale entre les

particules. Autrement dit, l'état macroscopique qui donne la température T correspond à plusieurs états microscopiques différents.

La probabilité de l'état macroscopique à température T est proportionnelle au nombre $n_E(T)$ des états microscopiques correspondants. Puisque les deux bouteilles sont parfaitement égales, elles auront la même fonction $n_E(T)$ liant la température et la probabilité.

La probabilité de l'état global des deux bouteilles est déterminée, suivant le calcul des probabilités, par le produit des probabilités individuelles. Donc, l'état initial aura une probabilité proportionnelle à $n_E(T_e)n_E(T_i)$. En admettant que les températures des deux bouteilles dans leur état final sont T_e^f et T_i^f , la probabilité de cet état sera proportionnelle à $n_E(T_e^f)n_E(T_i^f)$.

L'état final doit correspondre au maximum de la probabilité, dont le différentiel doit par conséquent être nul:

$$0 = d[n_E(T_e^f)n_E(T_i^f)] = [n_E'(T_e^f) dT_e]n_E(T_i^f) + n_E(T_e^f)[n_E'(T_i^f) dT_i] .$$

D'autre part, la conservation de l'énergie totale exige qu'un changement de la température T_e soit équilibré par un changement inverse de la température: par conséquent, $dT_e = -dT_i$, et:

$$0 = n_E'(T_e^f)n_E(T_i^f) - n_E(T_e^f)n_E'(T_i^f) ,$$

ce qui donne:

$$\frac{n_E'(T_e^f)}{n_E(T_e^f)} = \frac{n_E'(T_i^f)}{n_E(T_i^f)} ,$$

condition qui ne peut être garantie que si:

$$T_e^f = T_i^f .$$

Donc, l'état final qui maximise la probabilité doit forcément correspondre à l'égalité des températures des deux bouteilles; cela implique le passage de chaleur de la bouteille à température plus élevée à celle à température moins élevée. Cette conclusion peut être généralisée en éliminant les conditions qui ont simplifié notre analyse.

La tendance à l'égalisation des températures, déjà nette pour un système à nombre limité de particules, devient très forte pour un système à nombre de particules élevé tel que le nombre d'Avogadro. La statistique et le calcul des probabilités nous donnent donc la raison profonde de l'impossibilité pratique d'un passage de chaleur d'un système donné à un autre système à température plus élevée. Ils nous donnent aussi la raison profonde de la limite fondamentale du rendement des moteurs thermiques.

XXVII.3. L'entropie du point de vue microscopique

L'analyse précédente montre que la fonction d'état énergie interne ne suffit pas à caractériser le comportement d'un système thermodynamique. Nous avons besoin d'une deuxième fonction d'état, une fonction qui doit décrire la probabilité de chaque état global du système. La même analyse pourrait suggérer de prendre simplement le

nombre d'états microscopiques n_E comme mesure de cette probabilité, qui lui est proportionnel.

Ce choix causerait cependant des problèmes. Si vous considérez deux systèmes thermodynamiques A et B, la probabilité d'un état du système combiné A+B serait le *produit* des deux probabilités individuelles, et donc un résultat proportionnel à $n_E^1 n_E^1$. On souhaiterait par contre avoir une mesure globale de la probabilité qui soit la *somme* des deux mesures individuelles pour les deux états.

Les mathématiques nous fournissent une manière simple de transformer une combinaison du type produit en une combinaison du type somme: il s'agit d'utiliser les logarithmes. Et donc, nous adopterons, afin de caractériser la probabilité d'un état macroscopique, une fonction d'état du type:

$$S \propto \ln(n_E). \quad (233)$$

Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, la constante de proportionnalité de cette définition est la constante de Boltzmann, et donc:

$$S = k \ln(n_E). \quad (234)$$

La fonction définie par l'Eq. 234 est la fonction d'état *entropie*. Puisque les systèmes ont tendance à évoluer vers les états de probabilité maximale, nous arrivons à la formulation suivante du deuxième principe de la thermodynamique:

L'entropie est une fonction d'état; l'évolution d'un système isolé tend à augmenter son entropie.

Cette formulation implique évidemment l'impossibilité pratique du passage spontané de chaleur d'une température à une autre plus élevée, c'est-à-dire le principe de Clausius. Notez l'importance fondamentale du mot "isolé" dans cette formulation: si le système n'est pas isolé, on peut toujours le manipuler de l'extérieur et le forcer à évoluer de manière à diminuer son entropie; mais cela n'est pas possible sans intervention externe.

Notez également que l'univers tout entier est par définition un système isolé, ce qui conduit à la conclusion que:

Toute transformation a pour effet d'augmenter (ou à la limite de ne pas changer) l'entropie de l'univers.

Notez enfin que la propriété fondamentale de l'entropie d'un système isolé, sa tendance à augmenter, nous donne une manière de distinguer la direction "du passé au futur" du temps par rapport à la direction "du futur au passé". Cette distinction n'est pas évidente dans les autres propriétés fondamentales de la nature, telles que par exemple la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement. Mais nous sommes évidemment au courant, au niveau psychologique, de la différence entre les deux directions d'évolution du temps: nous allons de notre naissance à notre mort, et nous le savons. Le deuxième principe de la thermodynamique nous donne une manière rigoureuse d'exprimer cette différence: "du passé au futur"; et pour un système isolé, cela veut dire "la direction du temps pour laquelle l'entropie tend à augmenter".

Le Coin Yankee:

*Système isolé Isolated system
Casino Casino*

“The entropy is a state function. The evolution of an isolated system tends to increase its entropy . All transformations have the effect to increase (or as a limit case to leave unchanged) the entropy of the universe.”

XXVIII. Entropie, température et chaleur

Nous essayerons maintenant de nous faire pardonner notre brève incursion dans la philosophie en retournant à grande vitesse aux questions pratiques concernant les moteurs, les machines et l'argent à gagner. La définition microscopique d'entropie, Eq. 234, nous cause effectivement des problèmes pratiques: comment peut-on, pratiquement, *mesurer* cette belle chose qui s'appelle entropie?

La situation est un peu la même qu'on avait pour la fonction énergie interne U d'un système tel que le gaz parfait. La théorie microscopique du gaz parfait avait mis en relation U avec les mouvements microscopiques, mais on ne pouvait pas mesurer U en mesurant les vitesses de tous ces mouvements! Le principe d'équipartition (Eq. 201, par exemple) nous a fourni une belle solution pour ce problème: nous pouvons mesurer la fonction U d'un gaz parfait en mesurant sa température. Plus spécifiquement, on mesure les changements de U en mesurant ceux de T , et on arrive à la valeur de U en utilisant un état de référence pour son zéro. On peut également mesurer U pour d'autres systèmes tels que les solides avec des mesures de variables thermodynamiques telles que température, pression et volume.

Peut-on arriver à un résultat similaire pour la fonction d'état entropie? Nous essayerons avec un exemple particulier, le phénomène qu'on appelle expansion adiabatique de Joule (Fig. 76). On prend deux bouteilles égales, thermiquement isolées, connectées par une valve qui est fermée au début de l'expérience, la première bouteille étant remplie de gaz parfait et la deuxième vide. On ouvre la valve et on constate que le gaz a tendance à remplir les deux bouteilles de manière uniforme.

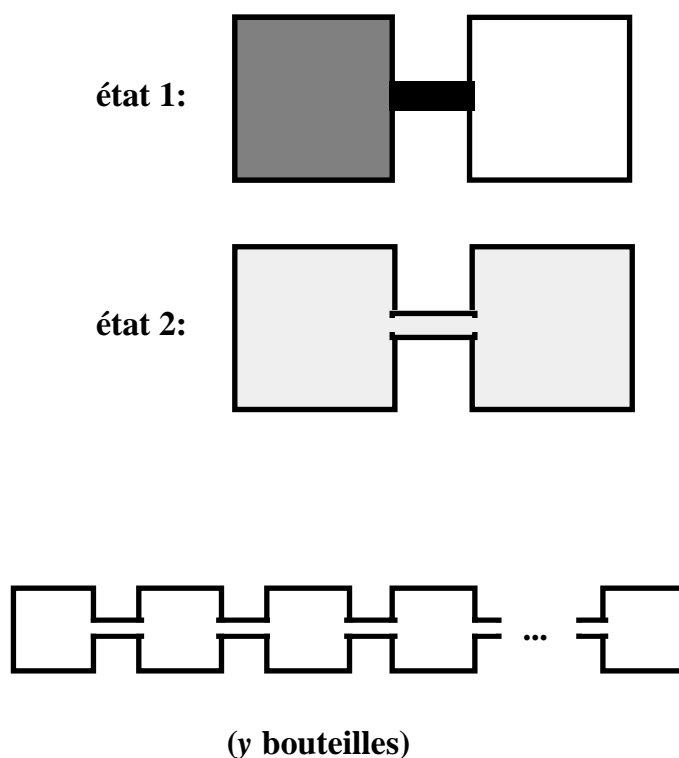


Fig. 76: L'expansion "adiabatique" de Joule, pour 2 bouteilles et y bouteilles.

Les expériences réelles d'expansion de ce type donnent une diminution de la température. Mais si les conditions s'approchent de la limite du gaz parfait (faible densité etc.), on constate que les changements de température sont moins importants; à

la limite du gaz parfait, la température demeure constante; la raison en est que nous n'avons pas changé l'énergie du gaz, puisque nous n'avons pas donné ou prélevé de travail ou de chaleur du système des deux bouteilles:

$$dU = C_v dT = 0. \quad (235)$$

Quelle est la raison de l'expansion du gaz? Il s'agit encore une fois d'une question de probabilité et d'entropie. Supposons pour simplifier que le gaz ait seulement quatre particules "a", "b", "c" et "d". L'état macroscopique 1 (gaz seulement dans la bouteille de gauche) ne correspond qu'à un état microscopique possible (toutes les particules dans la bouteille de gauche), donc $n_E = 1$ et [vu l'Eq. 234] $S = 0$. L'état macroscopique 2 correspond aux états possibles (ab,cd) [a et b à gauche, c et d à droite], (ac,bd), (ad,bc), (bc,ad), (bd,ac), (cd,ab), et donc à $n_E = 6$ et $S = k \ln(6)$. L'état 2 est plus probable, à entropie plus élevée, et donc le système a tendance à évoluer dans sa direction.

Cette tendance est beaucoup plus nette si le nombre des particules augmente. Essayons de calculer la probabilité de l'état macroscopique 1 pour N particules: la probabilité que chaque particule se trouve dans la première bouteille est égale au rapport du volume de celle-ci et du volume total des deux bouteilles, $V_1/V_{\text{total}} = 1/2$. La probabilité que deux particules se trouvent simultanément dans la première bouteille est le produit des probabilités pour chaque particule individuelle: $(1/2)(1/2) = (1/2)^2$. La probabilité que N particules se trouvent simultanément dans la première bouteille (état macroscopique 1) est donc:

$$P(1) = (1/2)^N, \quad (236)$$

très faible si N est grand, par exemple le nombre d'Avogadro.

D'autre part, la probabilité $P(2)$ de l'état 2, distribution homogène de gaz entre les deux bouteilles, est très proche de l'unité, et le rapport des probabilités est donc:

$$P(2)/P(1) \approx 1/(1/2)^N = 2^N. \quad (237)$$

Ce résultat et l'Eq. 234 nous permettent de calculer le changement d'entropie ΔS causé par l'expansion, qui est le passage de l'état 1 à l'état 2. Puisque la probabilité d'un état macroscopique est proportionnelle au nombre d'états microscopiques qui lui correspondent:

$$\Delta S = S(2) - S(1) = k \ln(P(2)) - k \ln(P(1)) = k \ln(P(2)/P(1)) = k \ln(2^N) = Nk \ln(2), \quad (238)$$

qui est de l'ordre de grandeur du nombre des particules, N . L'augmentation d'entropie produit par l'expansion dépend donc d'une façon linéaire du nombre des particules: cette transformation devient extrêmement probable si le nombre de particules est, par exemple, le nombre d'Avogadro.

Passons maintenant au cas plus général de y bouteilles (Fig. 76, en bas). Notez que y est aussi le rapport du volume final et du volume initial de la transformation: $y = V_{\text{total}}/V_1$. On peut analyser la procédure de dérivation de l'Eq. 238, et noter que le seul changement nécessaire dans le cas de y bouteilles est de remplacer le facteur "2" avec $y = V_{\text{total}}/V_1$:

$$\Delta S = Nk \ln(V_{\text{total}}/V_1). \quad (239)$$

Cette équation montre que la relation entre entropie et volume, V , est une fonction du type logarithme. Afin de calculer un changement infinitésimal d'entropie, on doit prendre le différentiel du logarithme:

$$dS = Nk \frac{dV}{V} . \quad (240)$$

Notez que l'expansion est une transformation *irréversible*, dont les états intermédiaires ne suivent pas l'équation d'état du gaz parfait (Eq. 156 et 158) parce qu'ils ne sont pas des états d'équilibre. Considerons maintenant une transformation *réversible* avec le même état initial et le même état final que l'expansion irréversible: l'équation du gaz parfait (Eq. 156 et Eq. 158) donne $Nk/V = p/T$; puisque $dU = 0$ [Eq. 235], le premier principe (Eq. 211) donne $pdV = \delta Q$, et donc l'Eq. 240 devient:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} . \quad (241)$$

On peut dériver cette équation d'une façon plus générale, et conclure que le changement d'entropie pour une transformation infinitésimale quelconque est toujours donné par l'Eq. 241, à condition de calculer $\delta Q/T$ pour une transformation réversible qui a les mêmes états initial et final que la transformation considérée. Ce résultat nous fournit une manière de mesurer les changements d'entropie et donc l'entropie de chaque état par rapport à un état de référence. Notez que la dérivation de la relation 91 est permise par la choix de k comme constante de proportionnalité dans l'Eq. 234, et justifie ce choix.

Notez le point important suivant: selon le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie S est une fonction d'état. Et donc, vu l'Eq. 241:

- Le rapport $\delta Q/T$ pour une transformation réversible correspond au changement infinitésimal d'une fonction d'état, même si δQ , la quantité infinitésimale de chaleur, n'est pas le changement d'une fonction d'état.
- Puisque S est une fonction d'état, son changement $S(B) - S(A)$ en passant d'un état A à un état B ne dépend que de ces états, et il est indépendant des états intermédiaires de la transformation. On peut donc utiliser l'Eq. 241 pour dire que:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} , \quad (242)$$

l'intégrale étant calculée sur une transformation *réversible* quelconque de l'état A à l'état B .

Le choix de la transformation sur laquelle l'intégrale de l'Eq. 242 est calculée ne peut effectivement pas influencer le résultat vu que S est une fonction d'état; la transformation peut donc être choisie suivant le critère de simplification du calcul pratique de l'intégrale.

Notez cependant encore une fois que la transformation choisie pour ce calcul *doit donc être une transformation réversible*, parce que les équations 241 et 242 ne sont valables que pour ce type de transformations.

Le premier principe de la thermodynamique nous permet de généraliser l'Eq. 242, en incluant le cas des transformations irréversibles. Nous avons effectivement vu que pour un système isolé, pour lequel $\delta Q = 0$ et donc $\int \delta Q/T = 0$, nous avons toujours une augmentation ou au plus une conservation de l'entropie: $S(B) - S(A) \geq 0$. Donc on doit généraliser l'Eq. 242 de la manière suivante:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \quad , \quad (243)$$

avec l'intégrale calculée cette fois pour une transformation quelconque, réversible ou irréversible, et le signe égale valable obligatoirement si la transformation est réversible.

Le Coin Yankee:

“One can, therefore, generalize Eq. 242 in the following way:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad ,$$

with the integral calculated this time along a transformation of any kind, reversible or irreversible, and the equal sign is required if the transformation is reversible.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
S (entropie)	joule/K	

XXIX. Le zéro de l'entropie: principe de Nerst.

Les équations 241 et 242 nous donnent une manière directe et pratique de mesurer les changements d'entropie. Mais quelle est la valeur absolue de l'entropie d'un état donné d'un système? Le problème est un peu comme celui du zéro de l'énergie interne, que nous avons déjà discuté: il s'agit de définir un état de référence pour le zéro, et ensuite de calculer les changements par rapport à l'état de référence.

Du point de vue de la statistique, l'Eq. 234 nous dit que le zéro de l'entropie correspond à un état macroscopique qui ne peut être réalisé qu'avec un seul état microscopique, et dont la probabilité est donc très limitée.

Cette conclusion est transférée sur le plan des variables thermodynamiques par le principe de Nerst:

Un état qui correspond au zéro absolu de température a une entropie nulle.

Si vous considérez par exemple le modèle microscopique du gaz parfait, vous pouvez réaliser que l'état macroscopique à $T = 0$ ne peut correspondre qu'à l'état microscopique pour lequel toutes les vitesses sont nulles, donc $n_E = 1$ et $S = 0$.

L'analyse de l'entropie des états aux températures proches du zéro absolu révèle des faits qui sont très intéressants. Prenons le cas du refroidissement sans changement de volume d'une bouteille avec une mole de gaz parfait, qui se trouvait initialement à la température T_A et est portée à la température T_B . On peut calculer le changement d'entropie à l'aide de l'Eq. 242, en choisissant par exemple la transformation réversible à volume constant pour le calcul de l'intégrale. Pour cette transformation, $\delta Q = dU = C_v dT$, et donc:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = C_v \int_A^B \frac{dT}{T} = C_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right). \quad (244)$$

Cette équation pose évidemment un problème si nous essayons de refroidir le gaz jusqu'au zéro absolu: si $T_B = 0$ K, l'équation 244 prévoit la divergence de l'entropie puisque $\ln(0) \rightarrow -\infty$. Par contre, le principe de Nerst ne peut pas tolérer cette divergence.

On est donc forcé de conclure qu'on doit changer l'hypothèse selon laquelle dans l'expression $C_v \ln(T_B/T_A)$, la chaleur spécifique (molaire) est constante. On doit au contraire avoir une diminution de C_v si la température tend à 0 K, de manière à compenser la divergence de la fonction logarithme.

Il existe une relation directe entre cette conclusion et celles de la discussion sur les limites de la théorie classique des chaleurs spécifiques: la diminution de celles-ci, avec une tendance vers zéro si la température tend à 0 K, est un effet quantique. On voit donc que les propriétés de l'entropie nous forcent à sortir de la physique classique et à entrer dans le monde de la physique quantique.

Le Coin Yankee:

“A state that corresponds to the absolute zero of the temperature scale has zero entropy.”

XXX. L'entropie et le rendement des moteurs thermiques.

Nous sommes maintenant prêts à continuer l'analyse du problème pratique du rendement des moteurs. Essentiellement, un moteur thermique est une machine qui prend de la chaleur d'une source externe, et produit de l'énergie sous la forme de travail.

Un moteur doit fonctionner de manière continue, et donc il est forcément basé sur des *transformations cycliques*, au cours desquelles le moteur retourne toujours aux conditions initiales après une période donnée de temps.

En ce qui concerne la thermodynamique, pour une transformation cyclique ou cycle, l'état initial coïncide avec l'état final. Si on représente un cycle sur le plan pV , on obtient une courbe fermée (voir la Fig. 77).

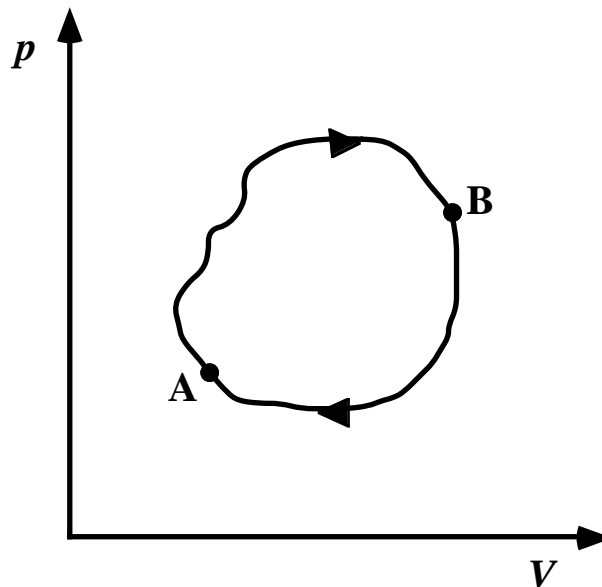


Fig. 77: Une transformation cyclique ou cycle sur le plan pression-volume.

Considérons d'abord un cycle réversible, c'est-à-dire une transformation cyclique dont tous les états intermédiaires sont des états d'équilibre. L'entropie étant une fonction d'état, elle ne peut pas changer du début à la fin du cycle parce que l'état initial coïncide avec l'état final:

$$\Delta S = \int_{\text{cycle rév.}} \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad (245)$$

où l'intégrale est calculée sur un cycle réversible.

Considérez maintenant le cas d'un cycle irréversible. Le changement d'entropie est toujours nul. Cependant, ce changement ne peut pas être estimé en calculant l'intégrale de $\delta Q/T$ sur le cycle, parce que la relation (242) est valable seulement pour des transformations réversibles. Par contre, la relation (243) nous donne pour un cycle irréversible:

$$0 = \Delta S \geq \int_{\text{cycle irr.}} \frac{\delta Q}{T} . \quad (246)$$

Cette relation peut être utilisée pour calculer les limites de rendement des moteurs thermiques. Nous le ferons d'abord pour un moteur spécifique, et ensuite essayerons de généraliser le résultat.



Sadi Carnot, l'un des fondateurs de la thermodynamique. Le cycle de la Fig. 176 porte son nom.

Le moteur spécifique se base sur ce qu'on appelle le cycle de Carnot (voir la Fig. 78). Ce cycle comprend deux transformations isothermiques 1 et 3, et deux adiabatiques, 2 et 4, d'un gaz parfait: le moteur peut être réalisé par exemple avec un cylindre plein de gaz parfait muni d'un piston. L'énergie E_i est fournie au moteur sous la forme de chaleur, $E_i = Q_i$, au cours de la transformation 1, par une source externe, à la température T_i de l'isotherme 1. La chaleur perdue Q_e est donnée à l'extérieur au cours de la transformation isotherme 3, à la température T_e . Le rendement est donc donné par:

$$R = (Q_i - Q_e)/Q_i = 1 - Q_e/Q_i . \quad (247)$$

Puisque $\delta Q = 0$ pour les transformations adiabatiques 2 et 4, l'Eq. 246 donne pour le cycle de Carnot:

$$\frac{Q_i}{T_i} - \frac{Q_e}{T_e} \leq 0, \quad (248)$$

et donc

$$\frac{Q_i}{Q_e} \leq \frac{T_i}{T_e} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_e}{Q_i} \geq \frac{T_e}{T_i} \quad (249)$$

relation qui, comparée avec l'Eq. 247, donne:

$$R \leq 1 - \frac{T_e}{T_i} , \quad (250)$$

le signe "égal" dans cette équation étant évidemment valable dans le cas où le cycle se compose entièrement de transformations réversibles.

La conclusion préliminaire est donc que, pour un moteur thermique basé sur le cycle de Carnot, le rendement ne peut pas arriver à l'unité, excepté dans le cas d'un cycle réversible pour lequel la température à laquelle la perte de chaleur a lieu est le zéro absolu.

Passons maintenant à la généralisation de ce résultat:

Le rendement d'un moteur qui fonctionne aux températures T_i et T_e est toujours gouverné par l'Eq. 250. En particulier, si le cycle est réversible, le rendement $R = 1 - T_e/T_i$ ne dépend pas du type de moteur, mais seulement des deux températures.

Cette conclusion est presque immédiate: la dérivation de l'Eq. 250 se base sur l'Eq. 246, qui est une propriété générale des cycles dérivée des propriétés de l'entropie, et sur l'hypothèse d'absorption de chaleur seulement à la température T_i et d'émission seulement à la température T_e ; on n'a pas utilisé d'autres hypothèses sur la nature du moteur, telles que l'utilisation d'un cylindre à gaz ou d'un autre dispositif.

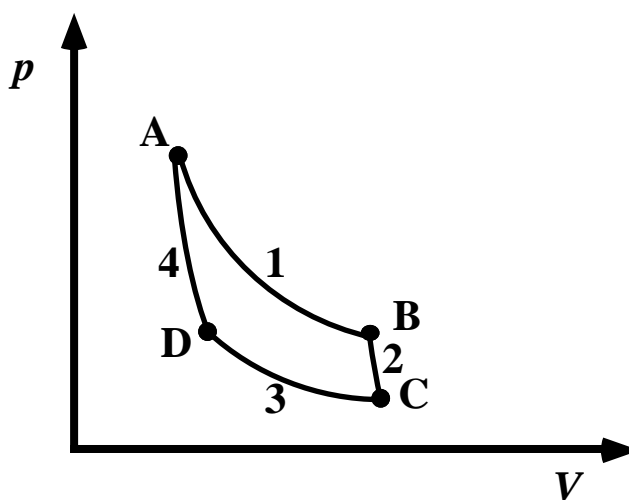


Fig. 78: Le cycle de Carnot, formé par deux transformations isothermes (1 et 3) et deux transformations adiabatiques (2 et 4).

Notez que la limite du rendement donnée par l'Eq. 250 ne peut pas être éliminée par le progrès technologique: un moteur parfait ne pourrait pas dépasser la valeur $1 - T_e/T_i$ du rendement, qui est toujours inférieure à l'unité. La ligne logique qui nous a portés à ce résultat est la confirmation de notre intuition originelle: le fonctionnement d'un moteur comporte une perte d'énergie sous la forme de chaleur, qui ne peut pas être recyclée parce que le passage spontané de chaleur à une température plus élevée est effectivement impossible.

Le Coin Yankee:

Cycle réversible Reversible cycle
Source de chaleur Thermal source,
 heat source

“The efficiency of an engine that works at the temperatures T_i and T_e is always given by Eq. 250. In particular, if the cycle is reversible then the efficiency $R = 1 - T_e/T_i$ does not depend on the type of engine, but only on the two temperatures.”

XXXI. Qu'est-ce que réellement la température?

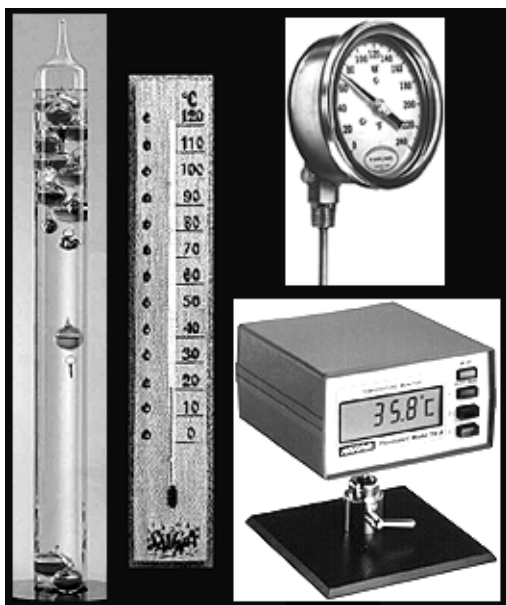
Nous proposerons maintenant un nouveau point de vue concernant le résultat de l'Eq. 250 qui, comme nous l'avons constaté, est valable pour n'importe quel moteur thermique fonctionnant aux températures T_i et T_e .

Selon ce point de vue, l'Eq. 250 peut être considérée essentiellement comme la *définition* de la quantité physique que nous appelons *température*.

Cette constatation est la conclusion de l'analyse que nous avons déjà commencée sur la définition de la température en physique. Nous avons bien vu que "physique" veut dire "mesures", et donc définir la température implique donner les règles pour la mesurer.

Nous avons débuté avec toute une série de méthodes empiriques pour la mesure de la température. Ces méthodes posent des problèmes aux physiciens/nes: comment un/e physicien/ne peut-il/elle ne pas se méfier d'une quantité qu'on mesure avec des moyens tels que le changement d'un matériau exotique dit mercure, à tel et tel endroit de l'univers appelé la superficie de la Terre, identifiable seulement parce qu'il est habité par des individus dits humains?

La loi du gaz parfait, Eq. 156, nous avait déjà fourni une solution à ces problèmes, qui sont très importants parce que la température est une quantité très importante tant sur le plan pratique que pour des raisons fondamentales. La définition de la température à l'aide de mesures qui se basent sur la loi du gaz parfait est effectivement beaucoup plus universelle que les définitions empiriques précédentes.



Il existe une énorme variété de thermomètres; mais leur base théorique est toujours fournie par le deuxième principe de la thermodynamique.

Cependant, cette définition est toujours liée à des systèmes particuliers - les gaz à la limite du gaz parfait - et non pas à une loi universelle. L'Eq. 250 nous fournit au contraire la liaison directe de la quantité "température" à un des principes fondamentaux de la thermodynamique.

Peut-on donc mesurer les températures en utilisant l'Eq. 250? Très facile: si vous voulez mesurer la température T_i d'un système donné, vous prenez un moteur - de n'importe quel type - à cycle réversible, vous le faites fonctionner aux températures T_i et T_e , en utilisant le système à mesurer et un autre système à la température de référence T_e , vous mesurez le rendement de ce moteur par des mesures d'énergie (travail, chaleur),

et voilà: l'Eq. 250 vous donne la manière de dériver la valeur de T_i du résultat de la mesure de rendement.

Le deuxième principe de la thermodynamique est donc aussi une manière de définir la température. Sur le plan pratique, on continuera à utiliser les méthodes empiriques de mesure avec les thermomètres à mercure etc., tout en sachant qu'on peut donner une base rigoureuse à la quantité qu'on mesure.

On pourrait pousser un peu notre analyse, en reconsidérant l'Eq. 241 et en disant que la température est la quantité par laquelle on doit diviser les échanges infinitésimaux de chaleur (qui n'est pas une fonction d'état) afin d'obtenir les changements infinitésimaux d'une fonction d'état: l'entropie.

Le Coin Yankee:

“We can push a bit our analysis, reconsidering Eq. 241 and saying that the temperature is the quantity by which one must divide the infinitesimal heat exchanges (heat not being a state function), to obtain the infinitesimal changes of a state function: the entropy.”

XXXII. Applications du deuxième principe.

Nous discuterons maintenant quelques formules pratiques qu'on peut dériver du deuxième principe de la thermodynamique. Commençons avec le cas du gaz parfait et avec la définition de l'entropie donnée par l'Eq. 241:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} .$$

Le premier principe dans le cas d'une mole de gaz parfait (Eq. 211) donne $\delta Q = C_v dT + p dV = [vu\ la\ loi\ du\ gaz\ parfait,\ Eq.\ 156] = C_v dT + RT dV/V$, et donc nous avons:

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} . \quad (251)$$

On peut donc utiliser cette relation afin de calculer le changement d'entropie d'une mole de gaz parfait lorsque l'état change de (p_A, V_A, T_A) à (p_B, V_B, T_B) . Le résultat ne dépend que des états initial et final de la transformation, puisque l'entropie est une fonction d'état, et peut être obtenu en intégrant l'Eq. 251:

$$S(B) - S(A) = C_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + R \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) . \quad (252)$$

Notez encore une fois la divergence si une des températures devient le zéro absolu, et donc l'obligation d'abandonner l'idée que la chaleur spécifique est une constante même à basse température. Cette correction est aussi valable pour la loi de Dulong et Petit, c'est-à-dire pour le cas des solides.

Passons maintenant du gaz parfait au gaz Van der Waals, en considérant la Fig. 67. Nous avons vu que le comportement d'un système réel ne suit pas les prévisions de l'équation de Van der Waals (Eq. 190 et 191) quand se présente la coexistence de deux phases, gaz et liquide. Si l'on considère une transformation isothermique, on constate que la pression demeure constante pendant la coexistence, ce qui n'est pas prévu par l'équation de Van der Waals.

Cependant, nous n'avons pas trouvé à quel point précisément, par exemple à quelle pression, on passe d'une isotherme de Van der Waals à la ligne horizontale correspondante de la Fig. 67. Cette pression peut être dérivée à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique. Considérez la figure 79, et supposez que vous avez un moteur thermique qui fonctionne avec le cycle ABCDEA.

Ce cycle se compose de deux isothermes, celle de Van der Waals et l'isotherme réelle, qui correspondent à la même température. Donc, le moteur "fonctionne" à une seule température, ce qui veut dire $T_i = T_e$, et donc selon l'Eq. 250 son rendement est nul. Le travail fourni par le moteur doit également être nul.

Notez que le travail est estimé en calculant l'intégrale $\int p dV$ sur le cycle. La géométrie nous dit que cet intégrale est égale à la superficie définie par la courbe du cycle; la superficie est positive si le cycle se développe dans le sens des aiguilles d'une montre, et négative dans le sens contraire. Le travail est donc nul si les superficies ABC et CDE sont égales. Cette condition donne la position de la ligne horizontale et donc la pression à laquelle le changement de phase a lieu.

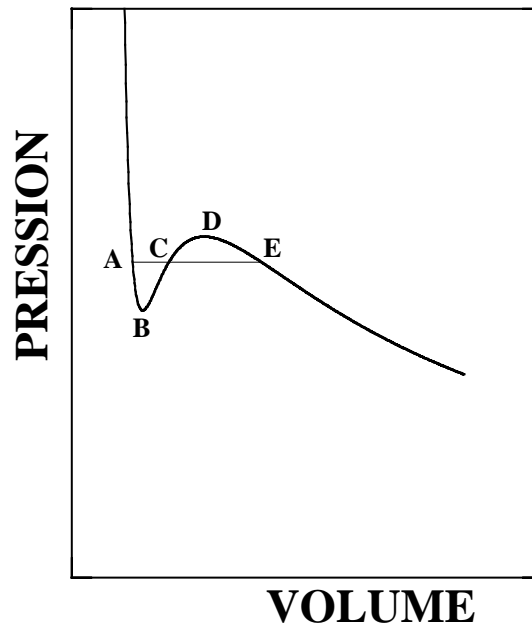


Fig. 79: Détermination de la pression de vapeur saturante à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique.

Le fait que le rendement d'un moteur devient nul si $T_i = T_e$ était une des premières formes du deuxième principe de la thermodynamique, connue comme *principe de Kelvin*. Ce principe nous dit que:

il est impossible d'obtenir du travail en utilisant une seule source de chaleur, sans perte de chaleur, qui doit être donnée à un deuxième système à plus basse température.

Le Coin Yankee:

“It is impossible to obtain mechanical work by using only one heat source, without loss of heat to a second system that must be at lower temperature.”

XXXIII. L'équation Clausius-Clapeyron.

Passons maintenant à une dernière application du deuxième principe, en considérant la Fig. 80. Ici nous voyons deux courbes du type Van der Waals, à deux températures différentes donc la différence dT est très petite. Par conséquent, la pression de la transition de phase (lignes horizontales) ne change pas beaucoup d'une courbe à l'autre, en passant de p à $p+dp$.

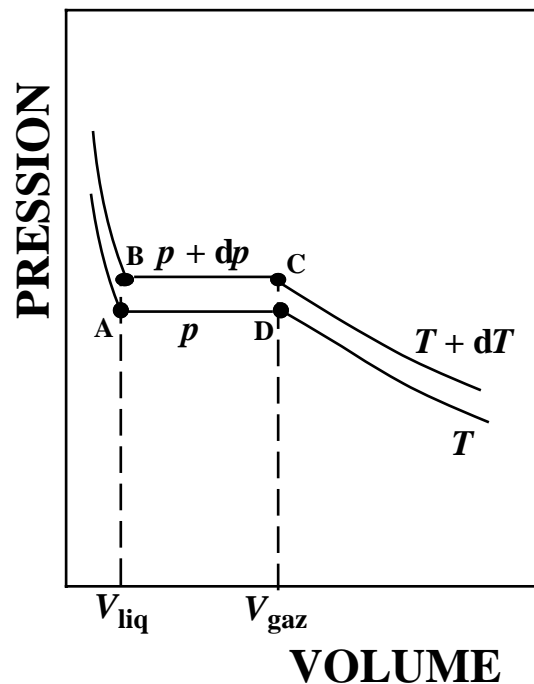


Fig. 80: Dérivation de l'équation Clausius-Clapeyron.

Prenez le cycle ABCD et appliquez l'Eq. 250:

$$R = 1 - T / (T + dT) = 1 - 1 / (1 + dT/T) \approx 1 - (1 - dT/T) = dT/T. \quad (253)$$

D'autre part, le rendement est donné par le travail divisé par la chaleur absorbée par le système. Le travail est la surface définie par les lignes ABCD, c'est-à-dire $\approx (\Delta V)dp$, où $\Delta V = V_{\text{gaz}} - V_{\text{liq}}$ est le changement de volume causé par la transition de phase. La chaleur absorbée est donnée par la chaleur latente; vu l'Eq. 196, cette chaleur est donc Lm (où m est la masse qui participe à la transition de phase). Donc, $R = (\Delta V)dp/Lm$, et en utilisant l'Eq. 253, $dT/T = (\Delta V)dp/Lm$, ce qui donne:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T} \frac{m}{\Delta V}. \quad (254)$$

Cette relation est connue comme l'équation de Clausius-Clapeyron. Elle peut être utilisée pour dériver la chaleur latente L à partir de mesures de la pression de vapeur saturante en fonction de la température.

On peut également dériver la fonction $p(T)$, qui donne la pression de vapeur saturante en fonction de la température, à partir de l'Eq. 254 mais avec quelques approximations. Premièrement, nous supposons que le volume du liquide est négligeable par rapport à celui du gaz, $\Delta V = V_{\text{liq}} - V_{\text{gaz}} \approx V_{\text{gaz}}$. Deuxièmement, nous supposons que V_{gaz} est approximativement donné par la loi du gaz parfait, Eq. 156: $V_{\text{gaz}} \approx nRT/p$ pour n

moles (dont la masse m est n fois la masse molaire M). Avec ces hypothèses, l'Eq. 254 devient:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{LMp}{RT^2} \quad , \quad (255)$$

et donc:

$$\frac{dp}{p} = \frac{LMdT}{RT^2} \quad . \quad (256)$$

Après intégration, la dernière équation donne:

$$p = p_0 \exp(-LM/RT), \quad (257)$$

où p_0 est une constante qui correspond à la valeur asymptotique de p pour $T \rightarrow \infty$. Cette loi, malgré les approximations, montre que la pression de vapeur saturante augmente avec la température, comme on peut le constater par la Fig. 79. Elle montre aussi que la pression de vapeur saturante à une température donnée dépend de la masse d'une mole, et donc de la densité.

Notez que l'équation Clausius-Clapeyron, que nous avons dérivée pour les transitions gaz \rightarrow liquide, est aussi valable pour des autres transitions de phase. Elle prévoit que la dérivée de la température de la transition de phase par rapport à sa pression est proportionnelle au changement de volume causé par la transition. Cette propriété a des conséquences très intéressantes pour le système glace-eau, dont le volume *diminue* pendant la transition solide \rightarrow liquide; cela comporte une dérivée négative dans l'équation Clausius-Clapeyron, et donc la température de transition de phase diminue si la pression augmente.



Une majestueuse application de l'équation Clausius-Clapeyron: le glacier des Diablerets.

Supposons donc qu'une masse de glace se déplaçant dans un glacier atteigne une masse solide (pierre); la pression augmente, la température de transition diminue, et la glace peut devenir liquide près de la masse solide. Ce mécanisme permet à la glace d'un glacier de se déplacer lentement autour des obstacles solides. Le même mécanisme nous donne la possibilité de "couper" une pièce de glace avec un fil de fer grâce à sa haute pression locale.

Le Coin Yankee:

“Note that the Clausius-Clapeyron equation, that we derived for the gas-to-liquid transitions, is also valid for other phase transitions. It predicts that the pressure derivative of the phase transition temperature is proportional to the change in volume caused by the transition.”

XXXIV. Entropie, ordre, désordre et information

Le concept d'entropie trouve des applications dans une grande série de domaines de la science et de la technologie: ses propriétés correspondent effectivement à une tendance générale de la nature et de ses systèmes vers des états de plus grande probabilité.

Cette tendance peut aussi être interprétée comme une tendance à passer de l'ordre au désordre. La transformation de cette idée en notion physique n'est pas facile, parce que l'idée de "désordre" n'est pas immédiatement traduisible en des quantités et des mesures. On peut cependant essayer de comprendre la liaison entropie-ordre à l'aide de quelques exemples.

Prenez d'abord l'expérience de l'expansion de Joule (Fig. 76). On peut sûrement dire que la situation dans laquelle toutes les particules se trouvent dans une bouteille est plus "ordonnée" que celle dans laquelle les particules remplissent toutes les bouteilles. Il y a donc, au moins dans ce cas, une liaison entre entropie et désordre; l'augmentation de l'entropie est aussi une augmentation du désordre.

Deuxièmement, considérez une balle de fusil qui est arrêtée par un mur. L'énergie est conservée, mais nous constatons que l'énergie cinétique de la balle est transformée, et on en retrouve une partie comme chaleur qui chauffe tant le mur que la balle. L'entropie du système balle + mur augmente, en accord avec le deuxième principe. Et le désordre augmente également: nous passons de l'énergie cinétique, qui correspond à un mouvement d'ensemble de tous les atomes de la balle, à un mouvement désordonné qui correspond à l'augmentation de température.

On peut effectivement trouver des exemples de ce type presque partout dans la science et dans l'ingénierie. Ces idées trouvent, en particulier, des applications très importantes dans la théorie de la communication et de l'information. Essayons de comprendre qu'il y a une liaison entre l'entropie et l'information à l'aide de deux exemples.



Fig. 81: Relation entropie-information

Considérez d'abord, encore une fois, le système de la Fig. 76, dans le cas de plusieurs bouteilles. On pourrait utiliser ce système pour emmagasiner des informations, en adoptant un code binaire, selon lequel par exemple une bouteille vide correspond à 0 et une pleine à 1. Une séquence vide-pleine-pleine-vide-pleine.. correspondrait donc à l'information binaire 0,1,1,0,1.. Cette information est maintenue si toutes les valves sont fermées. Si les valves sont ouvertes, le système arrive très rapidement à l'état d'entropie maximum, avec toutes les bouteilles uniformément pleines, et l'information est perdue. Donc, plus d'entropie veut dire moins d'information.

Prenez maintenant l'image photographique digitalisée en blanc et noir de la Fig. 81, où vous avez un objet presque caché par une quantité de "bruit" qui rend difficile sa localisation. Le niveau de gris de chaque "pixel" de l'image nous donne une évaluation de la probabilité que l'objet soit localisé au même "pixel". Evidemment, le maximum d'information correspondrait à une image parfaitement blanche à l'exception d'un seul "pixel" noir. Cette situation doit aussi correspondre au minimum d'entropie. Par contre, la situation de gris uniforme de tous les "pixels" donne le minimum d'information et donc le maximum d'entropie.

Pour les situations intermédiaires, on peut montrer que l'entropie est donnée par:

$$S = -k \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (258)$$

où p_i est le niveau de gris du i -ème "pixel", et est donc l'estimation de la probabilité de localisation de l'objet à ce "pixel"; la somme est faite pour tous les pixels de l'image.

On peut constater que l'Eq. 258 donne les conditions maximum et minimum d'information et d'entropie. Prenez par exemple un groupe de seulement 3 "pixels"; admettez qu'on a trois niveaux de gris possibles pour chacun des pixels: 0 (blanc), 1, 2 (noir); admettez également que la somme des valeurs pour les trois pixels est 3. L'état avec tous les pixels à $p_i = 1$ donne $S = 0$, qui est évidemment un maximum parce qu'avec ces hypothèses, l'Eq. 258 ne peut pas donner des valeurs positives (notez que la limite de $x \ln x$ pour $x \rightarrow 0$ est 0). L'état avec un seul "pixel" noir à $p_i = 3$ et tous les autres à $p_i = 0$ (maximum d'informations) donne par contre $S = -k3 \ln(3)$, qui correspond au minimum.

L'eq. 258 peut être justifiée en considérant l'analogie entre les "pixels" d'une image digitalisée et les bouteilles de la partie inférieure de la Fig. 76. En ce qui concerne l'image, on peut dire que le i -ème pixel "contient" un niveau de gris p_i ; de façon analogue, la i -ème bouteille de la Fig. 76 contient un nombre de particules de gaz que nous appellerons aussi p_i . L'ensemble des valeurs p_i détermine l'état macroscopique du système de toutes les bouteilles.

L'entropie de cet état macroscopique est donnée par l'Eq. 234, $S = k \ln(n_E)$, et peut donc être estimée en calculant le nombre correspondant d'états microscopiques n_E . D'autre part, n_E n'est que le nombre des manières possibles de distribuer les N particules de gaz entre les bouteilles.

La statistique nous fournit la procédure pour effectuer ce calcul: tout d'abord, il faut considérer que N particules peuvent être arrangées en séquence de $N!$ manières différentes. D'autre part, si l'on considère une de ces séquences possibles, on peut changer comme l'on veut l'arrangement des p_i particules de la i -ème bouteille sans changer la distribution entre les bouteilles. Vu que la même remarque est valable pour chaque bouteille et que p_i particules peuvent être arrangées en séquence de $p_i!$ manières différentes, le nombre total n_E de manières de distribuer les N particules entre les bouteilles est:

$$n_E = \frac{N!}{p_1! p_2! p_3! \dots p_i! \dots};$$

l'entropie pour l'état macroscopique est donc:

$$S = k \ln(n_E) = k \ln(N!) - k \ln(p_1! p_2! p_3! \dots p_i! \dots) = \text{constante} - k \sum_i \ln(p_i!);$$

d'autre part, les mathématiques nous fournissent une équation utile - l'équation de Stirling - qui nous permet de simplifier ce dernier résultat:

$$\ln(p_i!) \approx p_i \ln(p_i) - p_i \quad (\text{pour des valeurs élevées de } p_i),$$

et donc:

$$S \approx \text{constante} - k \sum_i p_i \ln(p_i) + k \sum_i p_i ;$$

vu que $\sum_i p_i = N$, c'est-à-dire le nombre total de particules de gaz qui est aussi une constante, et vu que les constantes ne jouent aucun rôle dans les changements d'entropie, cette équation est équivalente à l'Eq. 258.

Le Coin Yankee:

Ordre Order
Désordre Disorder
Information Information

*“For all intermediate situations, one can show that the entropy is given by:
 $S = -k \sum_i p_i \ln(p_i)$,
 where p_i is the gray level of the i -th pixel, and therefore the evaluation of the probability that the object is localized at that pixel, and the sum is performed for all pixels in the image.”*

XXXV. Energie libre et autres fonctions d'état.

La discussion des deux principes de la thermodynamique a souligné l'importance des fonctions d'état, c'est à dire des quantités physiques qui ne dépendent que de l'état du système.

Les applications pratiques de la thermodynamique, en particulier à la mécanique, se basent aussi sur d'autres fonctions d'état, telles que l'énergie libre et l'enthalpie. Chacune de ces fonctions, comme l'énergie interne ou l'entropie, joue un rôle important pour une catégorie particulière de transformations.

Prenez par exemple l'entropie: elle est constante ($dS = 0$) au cours des transformations réversible adiabatiques ($\delta Q = 0$). Par contre, l'énergie interne demeure constante pour un gaz parfait au cours des transformations réversibles isothermes (voir Eq. 210).

Considérons maintenant le cas d'un solide, par exemple à température ambiante ($T =$ constante, $dT = 0$). Son volume change peu au cours des transformations, et on peut dire approximativement que $dV = 0$. Peut-on trouver une fonction qui demeure constante au cours d'une transformation soumise à ces conditions? Considérez la fonction qu'on appelle *énergie libre*:

$$F = U - TS; \quad (259)$$

Son changement au cours d'une transformation infinitésimale est donné par $dF = dU - SdT - TdS = \delta Q - pdV - SdT - \delta Q = - (pdV + SdT) = 0$, puisque dV et dT sont nuls. Voilà donc que F , avec ces hypothèses, ne change pas au cours d'une transformation réversible.

Notez maintenant que l'entropie a des propriétés fondamentales qui concernent *toutes* les transformations, réversibles et irréversibles. Prenez l'Eq. 243:

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T},$$

qui implique, pour une transformation adiabatique, $S(B) - S(A) \geq 0$.

Quelle est la propriété correspondante de l'énergie libre F ? Considérez une transformation de l'état A à l'état B, avec les conditions de volume constant ($U(B) - U(A) = Q$) et échange de chaleur avec une seule source (par exemple, le cas d'un solide en contact avec la température ambiante). On a $F(B) - F(A) = U(B) - U(A) - T(S(B) - S(A)) \leq$ [vu l'Eq. 243 et ayant considéré que $\int \delta Q/T = (1/T)\int \delta Q = Q/T] \leq U(B) - U(A) - T(Q/T) = Q - Q = 0$, donc:

$$F(B) - F(A) \leq 0. \quad (260)$$

On peut donc constater que, pour les conditions susmentionnées, toute transformation augmente - ou tout au plus ne change pas - l'énergie interne. Supposez maintenant que l'état du système correspond au minimum de F : puisque toute transformation tendrait à diminuer F , l'Eq. 260 implique que le système ne peut pas changer d'état, et donc il se trouve en état d'équilibre.

Conclusion, pour les conditions susmentionnées (qui s'appliquent approximativement aux solides à température constante), *la condition d'équilibre est que l'énergie libre soit à un minimum.*

Notez la similarité par rapport à la mécanique. Si vous prenez par exemple une masse ponctuelle, la force à laquelle elle est soumise dans la direction x est donnée par $-dV/dx$, où V est l'énergie potentielle. Donc, si la masse se trouve à un minimum de l'énergie potentielle ($dV/dx = 0$ et $d^2V/dx^2 > 0$), on a un équilibre avec stabilité (puisque tout déplacement de l'équilibre produit des forces qui tendent à l'annuler). Cette condition peut être généralisée à un système mécanique quelconque. L'énergie libre joue pour l'état *thermodynamique* d'un solide à la température ambiante un rôle similaire à celui de l'énergie potentielle pour l'état d'un système mécanique.

Il existe d'autres fonctions d'état qui ont des propriétés importantes concernant des transformations particulières. Par exemple, *l'enthalpie*:

$$H = U + pV, \quad (261)$$

fonction d'état pour les changements infinitésimaux par laquelle on note que $dH = dU + (pdV + Vdp) = \delta Q + Vdp$, et donc qui reste constante au cours d'une transformation réversible qui soit à la fois adiabatique et à pression constante. On peut également montrer que *l'enthalpie libre* ou fonction de Gibbs, définie par:

$$G = F + pV = U - TS + pV, \quad (262)$$

ne peut pas diminuer au cours d'une transformation à pression et température constantes, et ne change pas si cette transformation est réversible. A des conditions de pression et température constante, l'équilibre est donné par le minimum de cette fonction.

Le Coin Yankee:

Energie libre Free energy
Enthalpie Enthalpy
Enthalpie libre Free enthalpy

“In conclusion, under the previously mentioned conditions (which approximately apply to solids at constant temperature), the equilibrium condition is that the free energy is at a minimum.”

XXXVI. Le transfert de chaleur

Le fonctionnement des moteurs thermiques se base sur les phénomènes de transfert de chaleur, qui sont également fondamentaux dans toute une série d'applications technologiques, notamment en ce qui concerne le génie civil. Essayons donc de comprendre ces phénomènes: la règle fondamentale est fournie par le principe de Clausius, qui exige le transfert de chaleur d'une température élevée à une autre température plus basse. Cette exigence est liée, comme nous l'avons vu, à la tendance générale des systèmes physiques à diminuer leur ordre et augmenter leur entropie.

La cause fondamentale du transfert de chaleur est donc la différence de température. Mais quels sont les mécanismes spécifiques du transfert, et quelles sont les lois qui les gouvernent? Nous essayerons de répondre à ces questions, surtout en ce qui concerne un type spécifique et important de phénomènes: ceux qui sont dit *stationnaires*.

Le transfert de chaleur tend à éliminer sa cause, c'est-à-dire la différence de température. On peut cependant imaginer des mécanismes qui compensent d'une manière continue les effets du transfert, en gardant constante la différence de température. Par exemple, le chauffage à l'intérieur d'un bâtiment compense la perte de chaleur, c'est-à-dire son transfert de l'intérieur à l'extérieur. Nous verrons que la caractéristique fondamentale des phénomènes stationnaires est un *flux constant* de chaleur.

Il faut faire attention à ne pas confondre les états stationnaires et les états d'équilibre. Dans les états d'équilibre, le système ne change pas d'état sans intervention de l'extérieur. Dans les états stationnaires, on a besoin d'une intervention continue de l'extérieur afin d'éviter les changements.

Passons maintenant à l'analyse des mécanismes par lesquels la chaleur peut être transférée d'un système à l'autre. Il en existe de trois types fondamentaux: *conduction*, *convection* et *rayonnement*. Afin d'un comprendre les différences, imaginez une lampe électrique allumée. La fonction principale de la lampe est évidemment de produire de la lumière. On constate cependant qu'une grande partie de l'énergie électrique transformée par la lampe est émise par elle non pas sous la forme de lumière, mais comme chaleur.

On constate, par exemple, qu'en touchant la lampe avec un objet à température ambiante tel qu'une pièce de monnaie, cet objet augmente sa température. Ce phénomène correspond à un transfert direct de chaleur par *conduction* d'un système (lampe) à l'autre (pièce).

Mais on peut aussi constater que votre main est chauffée par la lampe même sans la toucher. Cela est causé par deux phénomènes. D'abord, la lampe chauffe l'air proche de sa superficie, les molécules de l'air chaud diffusent et arrivent sur votre main, surtout si elle se trouve au-dessus de la lampe; ceci est un phénomène de transfert de chaleur par *convection*. On appelle en général convection le transfert de chaleur par circulation d'un fluide, liquide ou gaz.

Deuxièmement, la lampe émet des ondes électromagnétiques avec un spectre étendu de longueurs d'onde. Une partie du spectre correspond à la lumière visible. Mais une grand partie correspond aux rayons infrarouges. On verra à l'aide de la théorie de l'électromagnétisme que les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. Spécifiquement, les ondes infrarouges donnent de l'énergie aux mouvements

thermiques des corps qui les absorbent, et donc provoquent un chauffage: voilà donc la possibilité de transfert de chaleur par *rayonnement*, sans conduction ni convection.

Transfert de chaleur d'une lampe électrique à des pièces d'un franc:

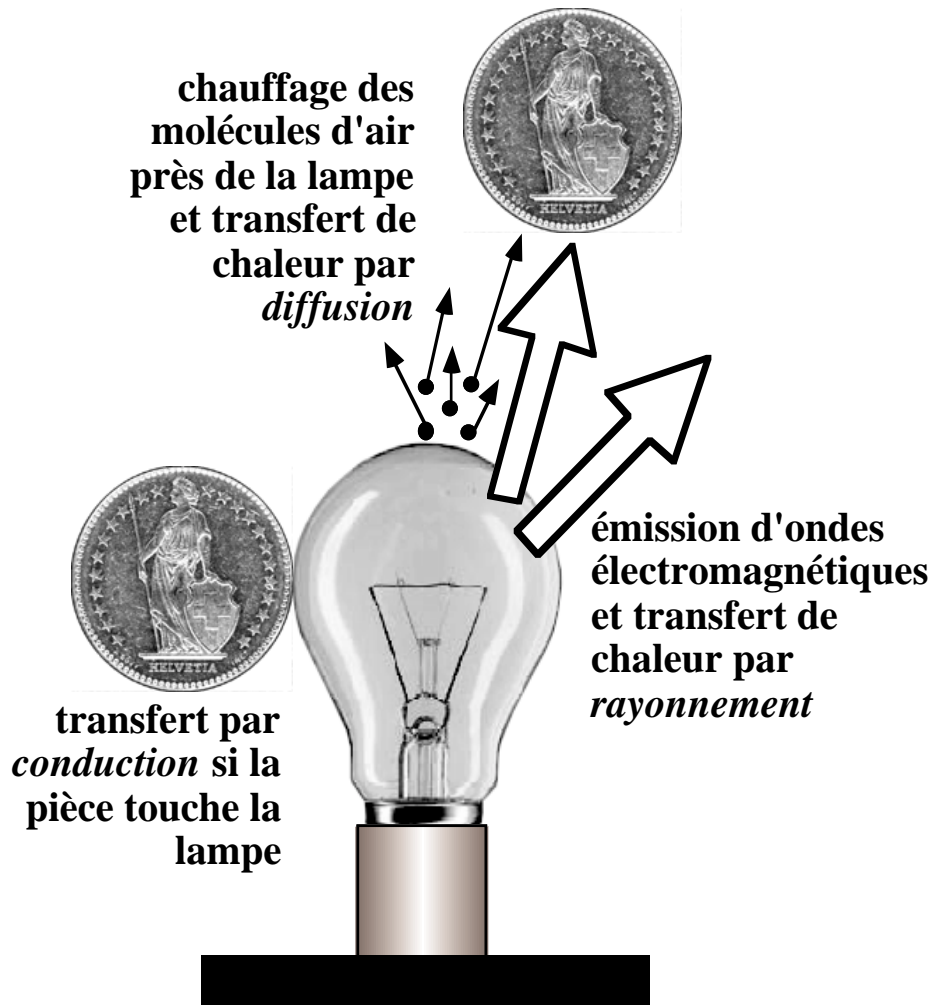


Fig. 82: Les trois types de phénomènes de transfert de chaleur, dans le cas d'une lampe et de pièces de monnaie.

Voyons maintenant quelles sont les lois qui gouvernent les transferts de chaleur. En ce qui concerne la convection, nous mentionnerons seulement que le transfert de chaleur peut être augmenté en passant de la convection naturelle, où la circulation de fluide est stimulée par la différence de température, à la convection forcée par d'autres moyens. Nous traiterons d'une manière plus détaillée les phénomènes de diffusion et rayonnement.

Le Coin Yankee:

Transfert de chaleur *Heat transfer*
Stationnaire *Steady-state*
Conduction *Conduction*
Convection *Convection*
Rayonnement *Radiation*
Onde électromagnétique *Electromagnetic wave*
Rayonnement infrarouge *Infrared radiation*

“The transfer of heat from a system to another can take place with three different fundamental types of phenomena: conduction, convection and radiation.”

XXXVII. Diffusion de chaleur : loi de Fourier

La condition générale pour obtenir un transfert de chaleur d'un système à l'autre, qui est l'existence d'une différence de température, $T_1 > T_2$, implique que la température dépend de la position dans l'espace, et donc que sa dérivée par rapport à la position n'est pas nulle. Cette dérivée est appelée le *gradient* de la température.

La température peut également varier en fonction du temps; par exemple, la température des objets et de l'atmosphère change du jour à la nuit. La dépendance du temps complique les phénomènes et leur analyse. Afin de simplifier l'étude de la diffusion, nous admettrons pour l'instant que la température ne change pas par rapport au temps.

Cette hypothèse donne une situation stationnaire du transfert de chaleur. Nous avons déjà mentionné que le caractère stationnaire implique, par exemple, un *flux* de chaleur constant par rapport au temps. Le flux Φ est défini comme la chaleur transférée par unité de temps:

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} . \quad (263)$$

La quantité utilisée pour la théorie de la diffusion est la densité de flux, J , qui est par définition le flux par unité de superficie perpendiculaire à la direction du transfert:

$$J = \frac{\delta Q}{dt \, dS} . \quad (264)$$

Afin de concrétiser cette définition, considérez la Fig. 83: il s'agit d'un mur avec une face à la température constante T_1 et l'autre à la température constante $T_2 < T_1$. Considérez également la superficie S , qui est évidemment perpendiculaire à la direction x de transfert de la chaleur. La densité de flux est donnée par la chaleur transférée à la superficie S par unité de temps, divisée par S .

La diffusion stationnaire est gouvernée par la loi de Fourier, selon laquelle la densité de flux (effet) est proportionnelle au gradient de la température (cause). Si x est la direction dans laquelle la température change, le gradient ∇T est par définition:

$$\nabla T = \frac{dT}{dx} , \quad (265)$$

(où le symbole " ∇ " ou "gradient" est aussi appelé en anglais "*nabla*" ou "*del*").

La loi de Fourier est:

$$J = - \lambda \nabla T , \quad (266)$$

où λ est le *coefficient de diffusion* ou coefficient de *conductibilité thermique*, qui caractérise l'efficacité de chaque matériau en ce qui concerne le transfert de chaleur par conduction.

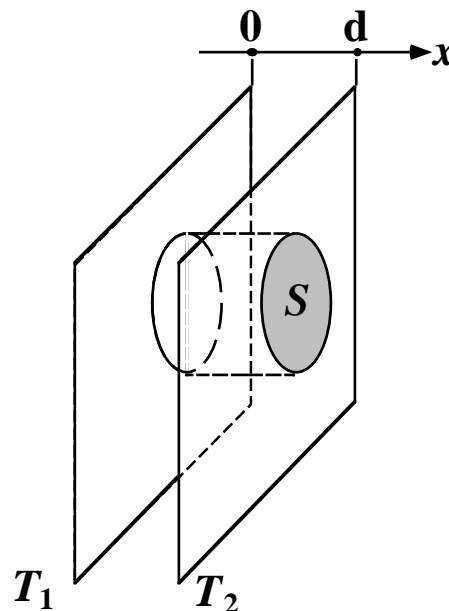
Dans le cas de la Fig. 83, notez que le gradient à l'intérieur du mur est:

$$\nabla T = \frac{(T_2 - T_1)}{d} , \quad (267)$$

(où d est l'épaisseur du mur), et donc négatif puisque $T_2 < T_1$. La loi de Fourier, Eq. 266, donne:

$$J = -\lambda \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (268)$$

Fig. 83: Transfert de chaleur par conduction d'une face à l'autre d'un mur.



Jean-Baptiste Joseph Fourier, découvreur de la loi qui porte son nom et - surtout - du célèbre théorème de Fourier.

Avec ce résultat, nous pouvons calculer le flux, c'est-à-dire la chaleur transférée à la superficie S par unité de temps; les équations 263 et 264 nous donnent pour ce cas $\Phi = JS$, et donc, selon l'Eq. 268:

$$\Phi = -\lambda S \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (269)$$

A son tour, la chaleur transférée pendant la période de temps t est:

$$\delta Q = \Phi t = -\lambda S t \frac{(T_2 - T_1)}{d} . \quad (270)$$

Voici un exemple pratique: le coefficient λ est mesuré en kcal/(hmC) [kilocalories/(heure-mètre-degré C)], qui correspond à 1,2 unités SI (joule/s m K). Pour

un mur de béton, on a $\lambda \approx 1,2 \text{ kcal}/(\text{hmC}) \approx 1,4 \text{ joule}/(\text{s m K})$. Prenez une journée d'hiver, avec une température externe $T_2 \approx 0 \text{ C}$ et interne $T_1 \approx 25 \text{ C}$, donc $T_2 - T_1 \approx -25 \text{ C}$. Admettez que l'épaisseur du mur est $d = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$. L'Eq. 268 donne une densité de flux $J \approx 1,8 \times 10^2 \text{ W}/\text{m}^2$. Le flux Φ pour une paroi de superficie $S = 30 \text{ m}^2$ est donc de 5 kW environ, qui doit évidemment être compensé par un chauffage correspondant de l'intérieur, ce qui implique une augmentation des frais de ménage.

La loi de Fourier montre que cette perte est linéaire par rapport au coefficient de diffusion λ , et on peut donc la diminuer en utilisant des matériaux avec un coefficient moins élevé que le béton; par exemple, la perte diminue de moitié avec un mur de brique, et d'un facteur 50 à l'aide d'un isolant thermique tel que la laine de verre.

Notez que le calcul du gradient de l'Eq. 267 a été effectué en admettant que la température change d'une façon linéaire par rapport à la distance x perpendiculaire au mur. Si vous prenez un mur composé de plusieurs couches de matériaux différents, la différence de température ($T_2 - T_1$) est partagée entre les couches. L'énergie doit cependant être conservée, et donc le flux et la densité de flux doivent avoir les mêmes valeurs pour toutes les couches. La loi de Fourier donne:

$$\lambda \nabla T = \lambda \Delta T/d = \text{constante} \quad (271)$$

pour toutes les couches, où ΔT est la chute de température sur la couche. Prenez par exemple le cas de deux couches d'épaisseur d_a et d_b avec coefficients λ_a et λ_b . L'Eq. 266 donne $\lambda_a \Delta T_a/d_a = \lambda_b \Delta T_b/d_b$ et donc $\Delta T_a = (d_a \lambda_b/d_b \lambda_a) \Delta T_b$. D'autre part, $(T_2 - T_1) = \Delta T_a + \Delta T_b = (1 + (d_a \lambda_b/d_b \lambda_a)) \Delta T_b$, et donc $\Delta T_b = (T_2 - T_1)(d_b \lambda_a/(d_b \lambda_a + d_a \lambda_b))$ et $\Delta T_a = (T_2 - T_1)(d_a \lambda_b/(d_b \lambda_a + d_a \lambda_b))$. Autrement dit, la chute totale de température ($T_2 - T_1$) est partagée entre les deux couches, et la chute pour chaque couche augmente d'une façon linéaire avec son épaisseur, et diminue comme l'inverse de son coefficient λ , ce qui est raisonnable.

En principe, on pourrait penser à inclure les deux couches d'air proches du mur dans ce type d'analyse, et conclure qu'il y a une chute de température linéaire avec la distance dans la région voisine d'une paroi (appelée *couche limite*). La situation réelle est plus compliquée, parce que l'air est un bon isolant thermique, ce qui crée un fort gradient et des phénomènes de convection, d'un type que nous discuterons plus tard. Cela donne une variation de température non linéaire avec la distance de la paroi dans la couche limite: la variation est plus rapide près de la paroi, et moins rapide à plus grande distance.

XXXVII.1. Equation de continuité et équation de diffusion.

Passons maintenant à une analyse un peu plus avancée des phénomènes de diffusion, en tenant compte aussi de la présence de sources de chaleur dans la région où le transfert a lieu. Considérez la Fig. 84, qui montre une région où nous avons de la diffusion de chaleur.

La situation est assez similaire à la Fig. 83, mais avec une différence importante. Dans le cas de la Fig. 83, nous avons supposé que chaque partie du mur sur le chemin de la diffusion ne peut que transmettre la chaleur, sans l'émettre ni l'absorber. Par contre, nous admettons maintenant que les couches sur le chemin de diffusion de la chaleur en Fig. 84 peuvent provoquer de l'émission ou de l'absorption.

Prenez la couche montrée par la figure, définie par les surfaces aux positions (infiniment proches) x et $x + dx$. Admettez que cette couche peut absorber ou émettre de l'énergie,

uniquement comme chaleur, ce qui implique que $\delta Q = dU$, le changement de son énergie interne. D'autre part, δQ correspond au flux net de chaleur, c'est-à-dire au bilan de flux des deux superficies aux positions x et $x + dx$. Pendant une période infiniment petite de temps dt , nous avons donc: $dU = \delta Q = (\Phi(x) - \Phi(x + dx))dt = (J(x) - J(x + dx))Sdt = ((- dJ/dx)dx)Sdt$, qui donne:

$$\frac{dU}{S dx dt} = - \frac{dJ}{dx} . \quad (272)$$

D'autre part, $dU/(S dx)$ donne le changement d'énergie interne divisé par le volume, c'est-à-dire le changement du de l'énergie interne par unité de volume ou densité d'énergie interne, u . On peut donc conclure que:

$$\frac{du}{dt} + \frac{dJ}{dx} = 0. \quad (273)$$

Cette équation est connue comme *équation de continuité* pour la diffusion de chaleur. Il s'agit essentiellement d'une conséquence de la conservation de l'énergie, qui exige l'équilibre des énergies absorbées et émises par chaque volume et du changement de l'énergie emmagasinée dans le même volume.

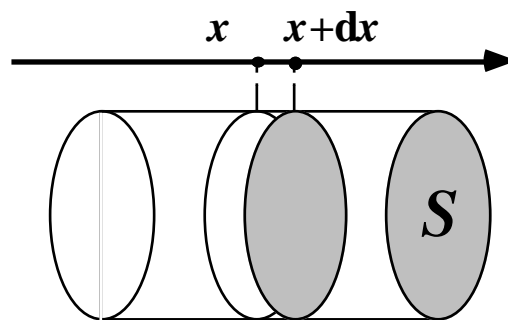


Fig. 84: Dérivation de l'équation de continuité.

L'équation 273 peut également être formulée en considérant d'une manière séparée le changement du d'énergie interne du volume entre x et $x + dx$ pendant le temps dt , et l'énergie donnée par des sources d'énergie dans le même volume. Le terme du de l'Eq. 273 est dans cette hypothèse remplacé par $du - w$, où w est la puissance par unité de volume des sources susmentionnées. On obtient la forme suivante de l'équation de continuité:

$$\frac{du}{dt} + \frac{dJ}{dx} - w = 0 . \quad (274)$$

L'équation de continuité peut être combinée à la loi de Fourier, Eq. 266, pour dériver ce qu'on appelle *l'équation de diffusion*. En tenant compte de la définition de gradient ∇T , Eq. 265, on obtient:

$$\frac{du}{dt} - \lambda \frac{d^2T}{dx^2} - w = 0 . \quad (275)$$

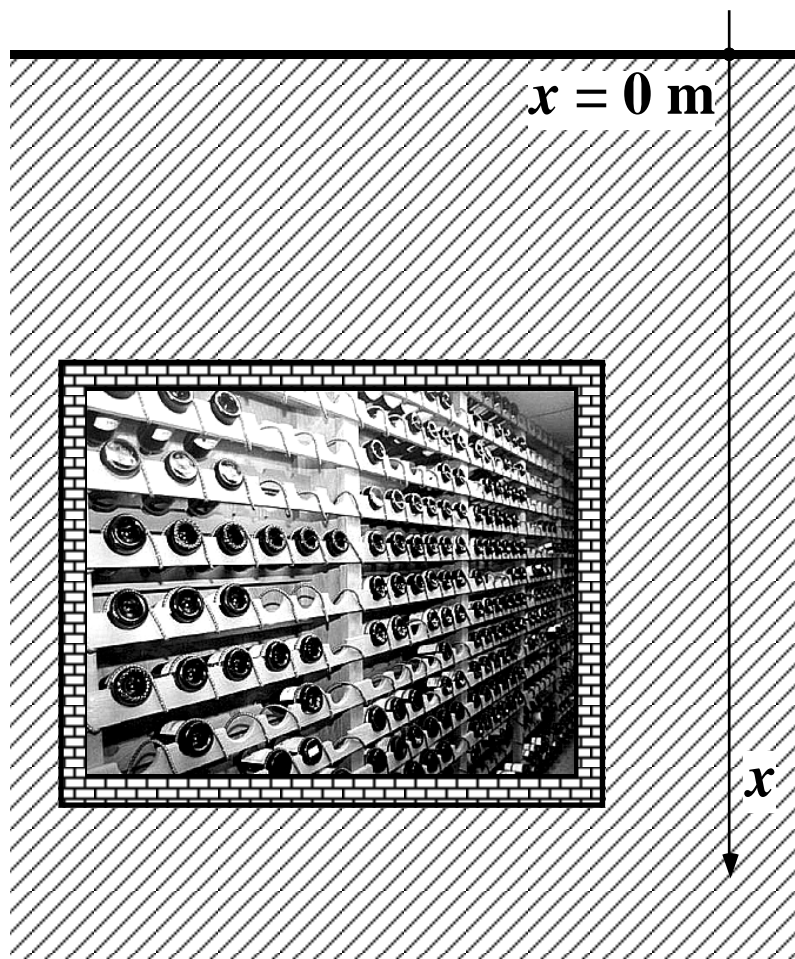
Cette équation peut être modifiée afin de tenir compte de la relation $dU \propto dT$, qui est valable tant pour un gaz parfait que pour un solide qui suit la loi de Dulong et Petit. En

appelant c_v la chaleur spécifique à volume constant par unité de masse et ρ la masse par unité de volume, on a $du = \rho c_v dT$, et on obtient à partir de l'Eq. 275:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{w}{\lambda} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt} \quad (276)$$

On peut utiliser cette équation de diffusion, par exemple pour modéliser le comportement d'une cave à vin et essayer de comprendre son action si fondamentale pour le progrès et le bien-être de l'humanité. Essentiellement, on doit considérer que la cave se trouve à une distance x du sol, et que le sol, à $x = 0$, change périodiquement de température au cours du jour et de la nuit. Afin de simplifier, admettez que ce changement périodique peut être simulé par une loi sinusoïdale:

$$T(x = 0, t) = T_0 + \Delta T \cos(\omega t), \quad (277)$$



Modèle simplifié de cave à vin.

où T_0 est la température au temps de référence $t = 0$, ΔT est la variation maximum de température, et ω est la pulsation de sa variation périodique. On doit maintenant trouver une solution générale $T(x, t)$ de l'Eq. 276, qui soit en accord avec la condition aux limites de l'Eq. 277. En admettant qu'on n'a pas de génération ou absorption de chaleur sur la distance x , et donc $w = 0$, l'Eq. 276 devient:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt} \quad (278)$$

On peut facilement vérifier que la solution cherchée est fournie par la fonction:

$$T(x, t) = T_1 + \Delta T \exp(-mx) \cos(\omega t - \eta(x)), \quad (279)$$

puisque cette fonction donne d'une façon automatique la condition de l'Eq. 277, et après quelques passages mathématiques on trouve qu'elle est également en accord avec l'Eq. 278 si:

$$\frac{d\eta}{dx} = m, \text{ et donc } \eta = mx, \quad (280)$$

et

$$m = \sqrt{\frac{\rho c_v}{2\lambda}} \omega. \quad (281)$$

Le message des équations 279, 280 et 281 est assez clair: l'équation 279 montre que la grandeur maximum des changements de température dans la cave est $\Delta T \exp(-mx)$, et donc diminuée d'un facteur $\exp(-mx)$ par rapport au sol. Cette diminution est exponentielle par rapport à la profondeur x , et sa *rapidité* dépend du coefficient m . Donc, selon l'Eq. 281, la rapidité de la chute exponentielle augmente - ce qui est raisonnable - si la chaleur spécifique c_v du matériau augmente, mais diminue si son coefficient de diffusion λ augmente.

De plus, l'Eq. 279 montre qu'on a un déphasage $\eta(x)$ entre le changement atténué de température par rapport au temps dans la cave, et celui au sol. Ce déphasage, selon les équations 280 et 281, augmente avec la profondeur x , et devient plus important si le coefficient m augmente. Nous sommes donc en mesure de construire une belle cave, où les changements de température, retardés par rapport au cycle journalier, sont toujours plus atténués qu'au sol, et donc ils ne peuvent pas influencer les *feelings* de nos précieux crus vaudois.

Le coin des mathématiques

Les équations 265 de la définition du gradient, 266 de la loi de Fourier, 274 de la continuité et 276 de la diffusion ont été écrites pour le cas simplifié de dépendance de la coordonnée x uniquement. On doit, en général, tenir compte des trois coordonnées x , y et z , ce qui exige un formalisme un peu plus compliqué.

L'équivalent tridimensionnel de la définition monodimensionnelle du gradient donnée par l'Eq. 265 est:

$$\nabla T = \text{vecteur dont les composantes sont: } \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (282)$$

où nous avons utilisé l'opérateur nabla, dont la définition est fournie par l'Eq. 72.

La forme tridimensionnelle de la loi de Fourier, Eq. 276, est:

$$\mathbf{J} = -\lambda \nabla T, \quad (283)$$

où la densité de flux \mathbf{J} n'est plus une quantité scalaire mais un vecteur, orienté à chaque point dans la direction de diffusion de la chaleur. L'Eq. 283 implique, par exemple, que la composante J_x du vecteur \mathbf{J} est donnée par $-\lambda (\nabla T)_x = -\lambda (\partial T/\partial x)$.

En ce qui concerne l'équation de continuité, sa forme tridimensionnelle est:

$$\frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{J} - w = 0; \quad (284)$$

en comparant celle-ci à la forme monodimensionnelle, Eq. 274, on note que la dérivée de la densité de flux par rapport à la coordonnée x a été remplacée par le symbole $\nabla \cdot \mathbf{J}$, qui peut être compris en utilisant la définition de produit scalaire de deux vecteurs: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. Donc:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}; \quad (285)$$

cette quantité est connue comme la *divergence* du vecteur \mathbf{J} . L'équation de continuité est donc une relation entre la divergence de la densité de flux, le changement local d'énergie interne par rapport au temps, et la puissance émise ou absorbée par unité de volume.

Enfin, la forme tridimensionnelle de l'équation de diffusion est:

$$\nabla^2 T + \frac{w}{\lambda} = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{dT}{dt}, \quad (286)$$

où nous notons, par rapport à l'Eq. 276, que la deuxième dérivée d^2T/dx^2 a été remplacée par le symbole $\nabla^2 T$, qui est connu comme le "laplacien" de la fonction scalaire T . En utilisant la définition formelle du carré d'un vecteur, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, on voit que:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (287)$$

On a plusieurs cas particuliers intéressants de l'Eq. 286: par exemple, si le régime est stationnaire et qu'on n'a ni émission ni absorption, l'équation devient:

$$\nabla^2 T = 0; \quad (288)$$

par contre, le régime stationnaire mais avec $w \neq 0$ est décrit par l'équation:

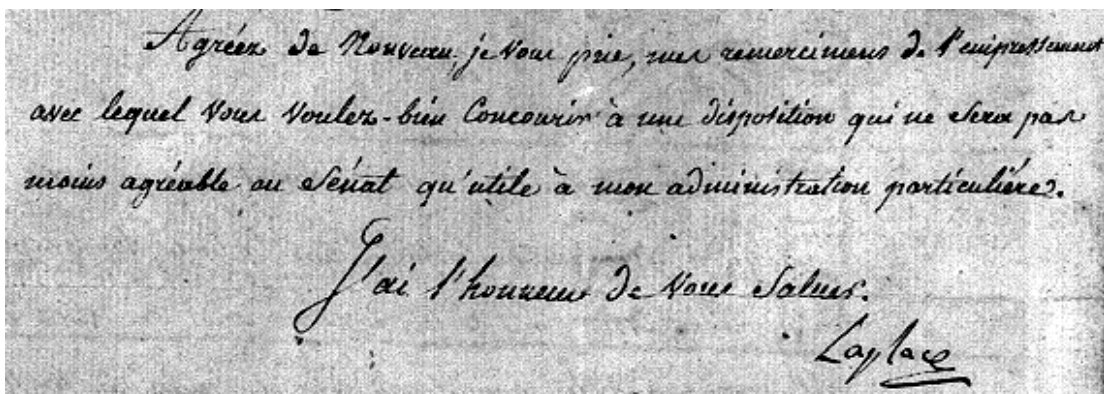
$$\nabla^2 T + \frac{w}{\lambda} = 0. \quad (289)$$

Chacune de ces équations a une forme bien connue en mathématiques, dont les propriétés ont été clarifiées depuis des siècles. Par exemple, l'Eq. 288 a la forme de l'équation de Laplace, et l'Eq. 289 est une équation de Poisson.

Le formalisme que nous avons développé ici afin de décrire les phénomènes de conduction trouve des applications importantes dans d'autres branches de la physique. Par exemple, plusieurs des propriétés de conduction du courant électrique sont formellement similaires à celles de la conduction de chaleur, et sont gouvernées par des équations du même type.



Portrait de Pierre-Simon Laplace et son autographe provenant de la collection du Prof. Margaritondo.



Aggréé de Monsieur je vous prie, mes remerciemens de l'empressement avec lequel vous voulez-bien Concourir à une disposition qui ne sera pas moins agréable au Sénat qu'utile à mon administration particulière.
J'ai l'honneur de vous Saluer.
Laplace

On est donc en mesure de transférer facilement les résultats d'un domaine à l'autre. Par exemple, une équation de continuité similaire à l'Eq. 284 dans le cas $w = 0$ est valable pour le transport électrique, si l'on remplace la densité de flux par celle de courant électrique et la densité d'énergie interne par la densité de charge électrique.

Le Coin Yankee:

<i>Densité de flux</i>	<i>Flux density</i>
<i>Loi de Fourier</i>	<i>Fourier's law</i>
<i>Coefficient de diffusion</i>	<i>Diffusion coefficient</i>
<i>Conductibilité thermique</i>	<i>Thermal conductivity</i>
<i>Equation de continuité</i>	<i>Continuity equation</i>
<i>Equation de diffusion</i>	<i>Diffusion equation</i>
<i>Divergence</i>	<i>Divergence</i>
<i>Laplacien</i>	<i>Laplacian</i>

“This equation is known as continuity equation for the diffusion of heat. It is essentially a consequence of the conservation of energy, that requires the equilibrium between the emitted and absorbed energy by each volume and the changes in the stored energy in the same volume.”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
Φ (flux)	W	kcal/h \approx 1,2 W
J (densité de flux)	W/m ²	kcal/(h m ²) \approx 1,2 W/m ²
l (conductibilité thermique)	joule/(s m K)	kcal/(h m C) \approx 1,2 joule/(s m K) cal/(s cm C) \approx 4,2 \times 10 ² joule/(s m K)

Ordres de grandeur:

$\lambda = 0,15-0,3$ kcal/(h m C) [bois]; $0,5-0,9$ kcal/(h m C) [mur]; $1,2-1,4$ kcal/(h m C) [béton]; $0,3-3$ kcal/(h m C) [terre]; $0,03-0,05$ kcal/(h m C) [laine de verre]; $0,021$ kcal/(h m C) [air]; $0,5$ kcal/(h m C) [eau]; 50 kcal/(h m C) [acier]; 300 kcal/(h m C) [aluminium].

XXXVIII. Transfert de chaleur par rayonnement.

Chaque système qui se trouve à une température plus élevée que le zéro absolu émet de la chaleur sous forme d'ondes électromagnétiques. Tous les systèmes absorbent également de la chaleur sous la même forme. Nous verrons qu'il existe une relation générale et très intéressante entre émission et absorption: la loi de Kirchhoff.

Avant de discuter cette relation, nous devons définir les quantités physiques qui sont nécessaires pour décrire ces phénomènes. Prenez par exemple un corps solide (voir la Fig. 85). Une superficie infinitésimale $d\sigma$ émet une puissance dW qui augmente avec sa grandeur:

$$dW = e d\sigma , \quad (290)$$

où le coefficient e est par définition l'*émittance*. On comprend facilement que l'émittance dépend de la température du corps (par exemple, une pièce de métal incandescente émet plus que la même pièce à température ambiante), de sa composition et de sa structure, et change d'une partie à l'autre de sa superficie; par exemple, on constate que l'émission d'une lampe électrique change d'un point à l'autre.

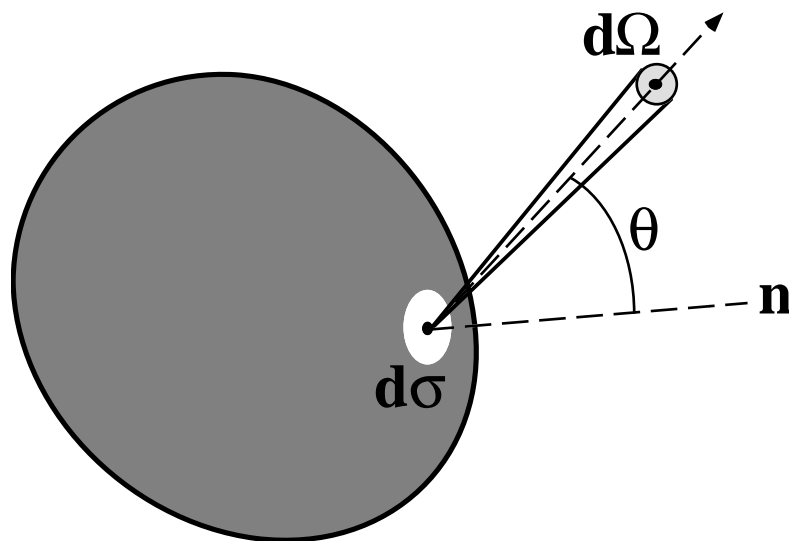


Fig. 85: Géométrie du phénomène d'émission de rayonnement électromagnétique

On constate également que l'émission change en fonction de la direction; par exemple, une partie donnée de la superficie d'une lampe émet plus de lumière et de rayonnement infrarouge dans la direction proche de sa perpendiculaire (notée n dans la Fig. 85), que loin de celle-ci.

Afin de décrire la relation de l'émission et de la direction, on utilise la *luminance*, qui est définie de la manière suivante: si dW_θ est la puissance émise par la superficie $d\sigma$ dans l'angle solide $d\Omega$, qui se trouve dans la direction correspondante à l'angle θ par rapport à n , alors:

$$dW_\theta = L \cos\theta d\sigma d\Omega , \quad (291)$$

où L est la luminance.

Notons enfin que tout rayonnement électromagnétique est caractérisé par sa *longueur d'onde*, λ . Rayons ultraviolets, visibles, infrarouges etc. correspondent à des longueurs d'onde différentes. Chaque corps émet des rayons de toutes les longueurs d'onde, mais son émission est plus ou moins intense en fonction de λ .

Par exemple, si nous commençons à augmenter la température d'une pièce de métal, nous détectons d'abord l'émission de rayons infrarouges principalement, qui ne sont pas visibles mais provoquent, par exemple, le chauffage de votre main. Si la température augmente jusqu'à l'incandescence, on peut observer l'émission de lumière visible, c'est-à-dire de rayonnement électromagnétique de longueur d'onde moins élevée que le rayonnement infrarouge. Le corps continue toutefois à chauffer notre main, et donc à émettre du rayonnement infrarouge. En augmentant encore plus la température, on voit que la couleur du rayonnement visible change progressivement du rouge au blanc, ce qui révèle un autre changement de la distribution de l'émission en fonction de λ .

Des phénomènes de ce type sont décrits en utilisant l'*émittance spectrale* e_λ du corps. Celle-ci est définie par l'équation:

$$dW_\lambda = e_\lambda d\lambda d\sigma, \quad (292)$$

où dW_λ est la puissance émise par la surface $d\sigma$ dans l'intervalle de longueurs d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$.

Passons maintenant aux phénomènes d'absorption du rayonnement électromagnétique. Considérez une onde, par exemple visible ou infrarouge, qui arrive sur la surface d'un corps. Elle peut être réfléchiée, diffusée ou absorbée par la surface, ou bien elle passe à travers le corps; dans la plupart des cas, ces phénomènes coexistent: l'onde est partiellement réfléchiée/diffusée, partiellement absorbée et partiellement transmise. Par exemple, la partie visible d'un rayon de soleil est partiellement transmise et partiellement réfléchiée par une fenêtre, tandis que la plupart de ses composantes infrarouges sont absorbées par le verre.

Chacun de ces phénomènes change d'une longueur d'onde à l'autre. Par exemple, un objet coloré absorbe plus efficacement les rayons de certaines couleurs; les rayons visibles sont transmis par un verre mais les rayons infrarouges ou ultraviolets ne le sont pas. Donc, l'absorption par un corps doit être décrite à l'aide d'une quantité physique qui dépend de la longueur d'onde. Celle-ci est le *facteur spectral d'absorption* a_λ du corps, qui peut être défini à l'aide de la Fig. 86.

Admettons qu'un rayonnement électromagnétique distribué sur une série de longueurs d'onde arrive sur le corps, sa puissance dans l'intervalle entre λ et $\lambda + d\lambda$ étant $I_\lambda d\lambda$.

En général, seule une partie $A_\lambda d\lambda$ de cette intensité est absorbée. On appelle facteur spectral d'absorption le rapport:

$$a_\lambda = \frac{A_\lambda}{I_\lambda}. \quad (293)$$

Autrement dit, si a_λ est grand le corps en question a un taux d'absorption élevé à la longueur d'onde λ .

XXXVIII.1. La loi de Kirchhoff.

Essayons maintenant de trouver la relation annoncée entre émission et absorption. D'abord, nous définirons le rapport E_λ des facteurs qui caractérisent l'émission et l'absorption:

$$E_\lambda = \frac{e_\lambda}{a_\lambda}. \quad (294)$$

La loi de Kirchhoff nous dit que:

E_λ est une fonction de la température seulement, qui ne dépend pas de la nature du corps.

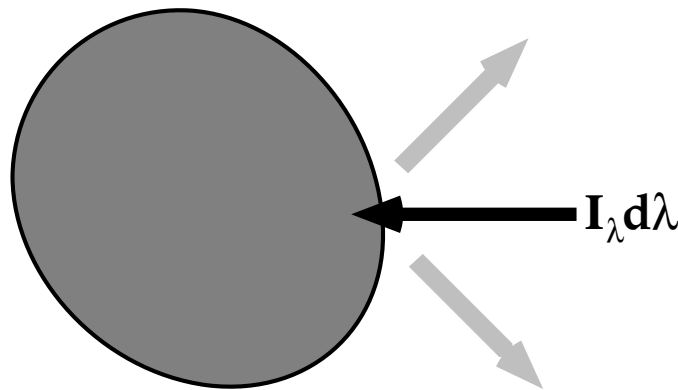


Fig. 86: Définition du facteur d'absorption monochromatique: un rayonnement électromagnétique arrive sur le corps. La puissance dans l'intervalle de longueur d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$ est $I_\lambda d\lambda$. Cette puissance est partiellement absorbée par le corps.

Afin de comprendre cette propriété vraiment extraordinaire, considérez la Fig. 87: deux corps parfaitement isolés de l'extérieur, et également isolés l'un de l'autre, à l'exception de deux surfaces égales $d\sigma$, connectées par un canal de transmission d'ondes électromagnétiques, qui bloque toutes les longueurs d'onde, à l'exception de l'intervalle entre λ et $\lambda + d\lambda$. Pratiquement, il s'agit d'un guide d'onde tel qu'une fibre optique, muni d'un filtre spectral.

Admettez que le système est en équilibre, et donc que les deux températures T_1 et T_2 sont égales. L'équilibre implique le bilan de la puissance qui arrive sur chaque corps et de celle qui le quitte. Notez $e_{\lambda 1}$, $a_{\lambda 1}$ les facteurs d'émission et d'absorption du premier corps, et $e_{\lambda 2}$, $a_{\lambda 2}$ ceux du deuxième.

Si vous considérez le premier corps, il émet la puissance $e_{\lambda 1} d\sigma$, dont une partie égale à $(e_{\lambda 1} d\sigma) a_{\lambda 2}$ est absorbée par le deuxième corps et le reste, $(e_{\lambda 1} d\sigma)(1 - a_{\lambda 2})$, est réfléchi et retourne sur le premier corps. A son tour, le deuxième corps émet la puissance $e_{\lambda 2} d\sigma$ dont une partie égale à $(e_{\lambda 2} d\sigma) a_{\lambda 1}$ est absorbée par le premier corps.

Le bilan d'énergie du premier corps donne: $e_{\lambda 1} = e_{\lambda 1}(1 - a_{\lambda 2}) + e_{\lambda 2} a_{\lambda 1}$, et donc:

$$E_{\lambda 1} = \frac{e_{\lambda 1}}{a_{\lambda 1}} = \frac{e_{\lambda 2}}{a_{\lambda 2}} = E_{\lambda 2}, \quad (295)$$

qui montre que deux corps quelconques, en équilibre thermique et à la même température, ont la même valeur de E_λ . Notez que cette conclusion ne dépend ni de la nature des deux corps ni de l'intervalle de longueurs d'onde: elle peut être dérivée pour tous les corps et pour toutes les longueurs d'onde: E_λ est une fonction universelle de la température.

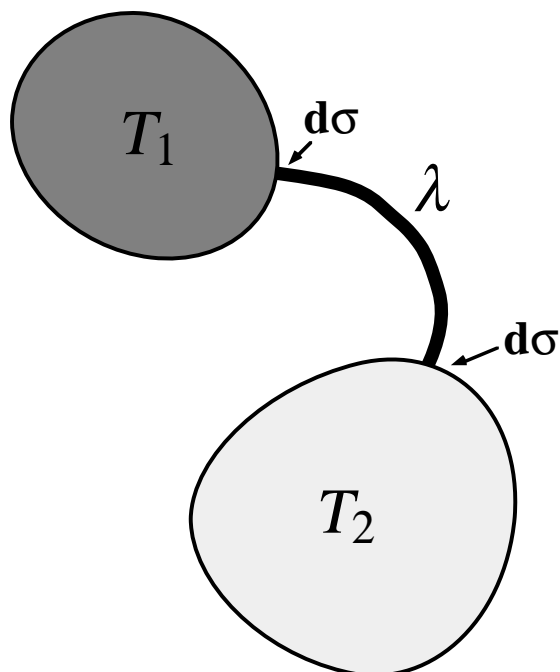


Fig. 87: Dérivation de la loi de Kirchhoff.



Gustav Robert Kirchhoff, qui nous aida à découvrir les importants secrets du "corps noir".

XXXVIII.2. Le corps noir.

Considérez maintenant un cas particulier: celui d'un corps qui absorbe *tout* le rayonnement qui arrive sur lui, de n'importe quelle longueur d'onde. Puisque le corps ne reflète pas, il nous semblera parfaitement noir; on l'appelle donc le *corps noir*. Sur le plan pratique, on peut simuler assez bien un corps noir avec une cavité munie d'une fenêtre très petite (Fig. 88): le rayonnement qui arrive sur la fenêtre a une très grande probabilité de rester dans la cavité, et une très faible probabilité de sortir par la fenêtre. Donc, la fenêtre se comporte comme un corps noir. Ce qu'on peut constater

pratiquement: sans éclairage de l'intérieur, les fenêtres d'un bâtiment nous semblent souvent noires.



Fig. 88: Une cavité munie d'une petite fenêtre se comporte un peu comme un corps noir.

Par définition, en considérant l'Eq. 293 avec $A_\lambda = I_\lambda$, pour le corps noir $a_\lambda = 1$ et, d'après l'Eq. 294, $E_\lambda = e_\lambda$. On voit donc que la fonction universelle E_λ correspond à l'émittance spectrale du corps noir.

Notez que nous parlons "du" corps noir et non pas d'un type particulier de corps noir, puisque la dérivation de la Fig. 87, appliquée à deux corps noirs, montre que leurs distributions spectrales sont égales. La fonction E_λ est universelle, et donc la même pour tous les types de corps noirs à la même température. Cela nous donne l'opportunité de dériver la température d'un corps noir à partir d'une mesure de son spectre d'émission.

Son caractère d'universalité augmente de manière extraordinaire l'intérêt de la fonction E_λ . Sa dérivation théorique a marqué le passage de la physique classique à la physique quantique moderne, grâce au travail de Max Planck. Sans entrer dans les détails de cette théorie, nous mentionnerons son résultat principal:

$$E_\lambda(T) = \frac{E_0}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (296)$$

où E_0 est une constante de proportionnalité égale à $3,7 \times 10^{16} \text{ W/m}^2$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière et h une constante universelle appelée la constante de Planck, dont la valeur est de $6,6 \times 10^{-34} \text{ joule/s}$.

La version graphique de la loi de Planck est montrée par la Fig. 89. On peut noter deux effets de l'augmentation de la température: le maximum de l'émission se déplace à des longueurs d'onde moins élevées (par exemple, des rayons infrarouges au visible et à l'ultraviolet), et l'intégrale de la fonction, qui correspond à l'émission totale sur toutes les longueurs d'onde, augmente de grandeur.

On peut décrire d'une manière quantitative ces deux effets avec quelques manipulations de l'Eq. 296. En ce qui concerne le longueur d'onde λ_m d'émission maximum, on peut facilement montrer que la condition de dérivée nulle donne:

$$-5 + (hc/\lambda_m kT) \exp(hc/\lambda_m kT) (\exp(hc/\lambda_m kT) + 1)^{-1} = 0, \quad (297)$$

et puisqu'on a partout le produit $\lambda_m T$ dans cette équation, la position du maximum doit se déplacer si la température change, suivant la loi:

$$\lambda_m T = \text{constante} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}, \quad (298)$$

qui est connue comme la *loi de Wien*. On peut également montrer que l'intégrale de la fonction de Planck suit la loi de Stefan:

$$E_\lambda(T) = \int_0^\infty E_\lambda(T) d\lambda = BT^4, \quad (299)$$

où la constante B est égale à $5,7 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$ environ.

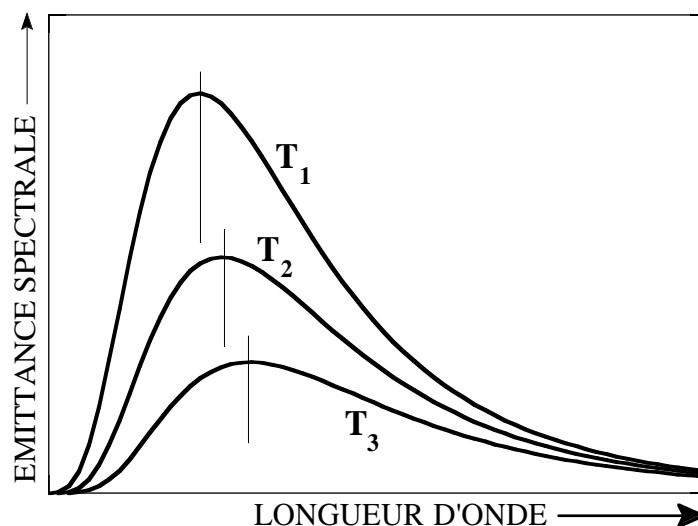
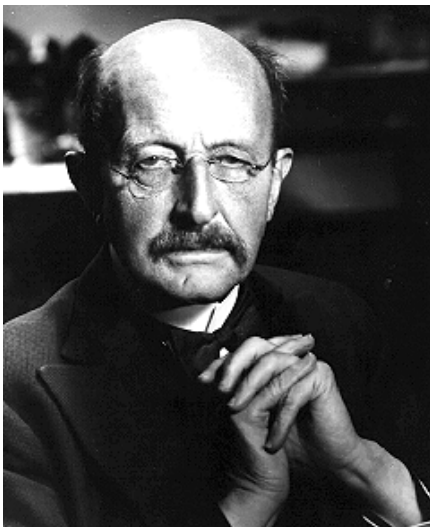


Fig. 89: Version graphique de la fonction de Planck (Eq. 296) pour trois températures différentes $T_1 > T_2 > T_3$.

Ces deux lois ont une série d'applications pratiques. Par exemple, on peut les utiliser pour des mesures de température à l'aide des *pyromètres*. En ce qui concerne l'éclairage intérieur des maisons, le maximum d'efficacité de l'oeil humain correspond au maximum de l'émission du type corps noir du soleil. Puisque la température du soleil est de $5,8 \times 10^3 \text{ K}$ environ, nous avons par la loi de Wien, Eq. 298, $\lambda_m \approx 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 5 \times 10^3 \text{ \AA}$.

Cette longueur d'onde tombe dans la région du visible, et plus précisément du vert. Si nous essayons d'éclairer l'intérieur d'une maison à l'aide d'une lampe électrique conventionnelle, nous ne pouvons évidemment pas atteindre une température aussi élevée que celle du soleil. Des températures moins élevées correspondent à un maximum d'émission dans l'infrarouge: donc, la plupart de l'énergie donnée à la lampe (et payée par l'utilisateur) n'est pas émise comme lumière visible, mais comme rayons infrarouges avec lesquels on ne peut certainement pas lire la nuit! Afin d'augmenter l'efficacité de l'éclairage sur le plan pécuniaire, on peut utiliser des sources de lumière du type non corps noir, par exemple les lampes au néon.

Imaginez maintenant que vous diminuez la température jusqu'au niveau de quelques degrés Kelvin: la loi de Wien (Eq. 298) montre que le maximum d'émission se déplace aux longueurs d'onde de quelques millimètres, dans le domaine spectral des micro-ondes. On peut effectivement détecter une telle émission presque partout dans notre univers, qui est attribuée aux dernières conséquences du *big bang* à son origine, après une très longue période de refroidissement: ce plafond micro-ondes a été détecté pour la première fois par Robert Wilson et Arno Penzias aux Bell Laboratories en 1965. Afin d'inspirer nos jeunes aspirants/tes ingénieurs: les prix Nobel Wilson et Penzias travaillaient essentiellement comme ingénieurs dans un milieu industriel, puis Penzias est devenu l'un des présidents de la plus grande compagnie de télécommunications du monde (toujours à propos de l'éducation *polytechnique*, vous savez...).



Max Planck, père fondateur de la mécanique quantique. L'étude du corps noir l'amena en 1900 à la première hypothèse sur les "quanta" d'énergie.

Mais en parlant d'éclairage, pourquoi ne pas calculer combien d'énergie nous recevons du soleil? L'intensité à la superficie du soleil est évidemment donnée par la loi de Stefan, Eq. 299, avec $T \approx 5,8 \times 10^3$ K; on obtient 64 MW/m^2 environ; l'intensité diminue selon le carré inverse de la distance de la source; donc, pour trouver sa valeur à la superficie de la terre, on doit diviser l'intensité à la superficie du soleil par le carré du rapport de la distance soleil-terre et du rayon du soleil. Ce rapport étant $2,1 \times 10^2$ environ, et son carré $4,5 \times 10^4$, l'intensité sur la terre est de $\approx 1,4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$. Il s'agit donc d'une grande intensité, comme nous le constatons facilement après nous être brûlés plutôt que bronzés au soleil d'été, et elle est à l'origine de la plupart des formes d'énergie que nous utilisons. Notez cependant que la valeur susmentionnée ne tient pas compte des effets de l'atmosphère et des nuages: l'intensité réelle peut varier de 0,05 à $0,8 \text{ W/m}^2$, selon les conditions météorologiques.

Parlons enfin de l'important effet écologique qu'on appelle *effet de serre*. Le nom dérive de l'utilisation des serres en agriculture; le verre de leurs parois a un facteur d'absorption très faible dans le domaine de longueurs d'onde du visible, où on peut trouver le maximum du rayonnement du soleil. Donc, une grande partie de l'intensité fournie par le soleil passe à travers le verre. Par contre, la température des objets à l'intérieur de la serre est beaucoup moins élevée que celle du soleil, et donc l'émission de ces objets a son maximum dans l'infrarouge. Le verre a un facteur d'absorption élevé pour l'infrarouge: voilà donc la possibilité de créer avec notre serre un piège pour l'énergie qui arrive du soleil.

Le même effet se retrouve pour tous les systèmes qui ont plus d'absorption dans l'infrarouge que dans le visible. On craint que ce phénomène ne puisse se vérifier dans le cas de l'atmosphère, en raison des produits de l'utilisation des combustibles fossiles

tels que le pétrole. Ces produits augmenteraient l'absorption de l'atmosphère dans le domaine de l'infrarouge, et pourraient produire une augmentation globale de la température de la terre, avec des conséquences épouvantables sur le plan écologique.



Arno Penzias, scientifique, ingénieur et manager industriel: il découvrit le rayonnement à micro-ondes provenant du big-bang.

On doit néanmoins observer qu'une théorie complète de ce phénomène, vu la complexité du système physique concerné et l'ampleur assez limitée des changements prévus, n'est pas disponible; les théories partielles ne donnent pas de résultats uniformes. On peut donc conclure pour l'instant que la possibilité d'un effet de serre doit constituer une invitation à la prudence mais non au désespoir.

Le Coin Yankee:

<i>Emittance</i>	<i>Emittance,</i> <i>Exitance, Aerance</i>
<i>Puissance</i>	<i>Power</i>
<i>Luminance</i>	<i>Luminance</i>
<i>Longueur d'onde</i>	<i>Wavelength</i>
<i>Emittance spectrale</i>	<i>Spectral emittance</i>
<i>Facteur spectral d'absorption</i>	<i>Spectral absorbing power</i>
<i>Corps noir</i>	<i>Continuity equation</i>
<i>Pyromètre</i>	<i>Pyrometer</i>
<i>Effet de serre</i>	<i>Greenhouse effect</i>
<i>Micro-ondes</i>	<i>Microwaves</i>

"The plot of Planck's law is shown in Fig. 89. One can see two consequences of an increase in temperature: the maximum of the emission shifts towards smaller wavelengths (for example, from the infrared to the visible and to the ultraviolet), and the integral of the function, which corresponds to the total emission over all wavelengths, increases in magnitude."

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
e (émittance)	W/m ²	lumen/m ² ≈ 1.5 × 10 ⁻³ W/m ²

L (luminance))	W/(m ² sterad)	lumen/(m ² sterad) ≈ 1.5 × 10 ⁻³ W/(m ² sterad)
e _λ (émittance spectrale)	W/m ³	

Ordres de grandeur:

a_λ (facteur spectral d'absorption) = 0,2-0,5 [couleurs claires, pour le visible]; 0,9 [couleurs claires, pour l'infrarouge]; 0,1-0,4 [aluminium, pour le visible]; 0,2-0,3 [aluminium, pour l'infrarouge]; 0,04-0,4 [vitre, pour le visible]; 0,9 [vitre, pour l'infrarouge].

XXXIX. Les phénomènes de diffusion en général

Le transfert de chaleur par diffusion est un exemple important d'un type plus général de phénomènes, dans lequel on peut trouver d'autres mécanismes intéressants: la diffusion des impuretés dans les matériaux, la conduction électrique gouvernée par la loi d'Ohm, l'homogénéisation des systèmes fluides avec des inhomogénéités initiales (une goutte d'encre dans l'eau, par exemple), etc.

Tous ces phénomènes sont gouvernés par des lois du même type, essentiellement des équations telles que la loi de Fourier (Eq. 266):

$$J = -\lambda \nabla T ,$$

pour la diffusion de chaleur. Prenez par exemple la conduction électrique dans un métal: elle est causée par l'existence d'un gradient de potentiel électrique (chute de potentiel) ∇V , et l'effet est un courant électrique, qu'on peut quantifier à l'aide de sa densité de flux J . Nous verrons dans l'électromagnétisme que la loi qui gouverne ce phénomène est la suivante:

$$J = -\sigma \nabla V ,$$

où σ est la conductibilité électrique du matériau; il s'agit donc d'une loi dont la structure est similaire à la loi de Fourier.

Passons maintenant à la diffusion des particules d'un fluide ou d'un gaz. Afin de concrétiser notre discussion, admettez qu'à un instant donné vous injectez des particules dans un gaz, augmentez la densité locale et donc créez un gradient de la fonction densité: $n(x,y,z)$. La concentration des particules injectées est une situation très ordonnée par rapport à celle de densité homogène. Le deuxième principe prévoit donc une évolution vers l'homogénéisation, et donc un flux de particules (nombre de particules diffusées par unité de superficie et de temps) qui tend à éliminer le gradient. La loi qui gouverne ce flux a encore une fois la structure de l'Eq. 266:

$$J_n = -D \nabla n , \tag{300}$$

où J_n est la densité de flux des particules, c'est à dire le nombre de particules qui diffusent par unité de temps et de superficie, et D est le *coefficient de diffusion*. Cette loi générale, qui est aussi valable par exemple pour la diffusion des impuretés dans les solides (et donc très utile dans la microélectronique et la métallurgie) est connue comme la loi de Fick.

En manipulant la loi de Fick, on peut arriver à comprendre les phénomènes de diffusion de gaz stimulés par les différences de pression. Admettez que la pression d'un gaz parfait ne correspond pas à un état d'équilibre, mais change d'un point à l'autre et donc elle est une fonction de la position dans l'espace, $p(x,y,z)$, avec un gradient ∇p .

L'équation du gaz parfait, Eq. 156, en tenant aussi compte de l'équation 158, prévoit que la densité de gaz est liée à la pression par la relation $n = N/V = (nN_A)/V = (p/kT)$, et donc, si nous supposons que la température ne change pas d'un point à l'autre, $\nabla n = \nabla p/kT$. La loi de Fick, Eq. 300, donne:

$$J_n = -\left(\frac{D}{kT}\right) \nabla p ,$$

et ceci permet d'expliquer les phénomènes bien connus de déplacement des particules de gaz causé par un gradient de pression: par exemple, le vent.

Le Coin Yankee:

*Coefficient de Diffusion
diffusion coefficient
Gradient de Density gradient
densité
Gradient de Pressure gradient
pression*

“The transfer of heat by diffusion is one exemple of an important and more general class of phenomena, including other interesting mechanisms such as: the diffusion of impurities in materials, the electrical transport governed by Ohm’s law, the tendency to become homogeneous of fluids which are initially inhomogeneous (for example, a drop of ink in the water).”

Le coin des unités et des ordres de grandeur:

	Unités SI	Autres unités
D (coefficient de diffusion)	m ² /s	

Ordres de grandeur:

D ≈ 2,2 × 10⁻⁵ m²/s pour la diffusion de la vapeur d'eau dans l'atmosphère.



N'avez-vous pas une envie folle de pouvoir appliquer la loi de M. Fick?