Les **nombres complexes**

UN OUTIL SCIENTIFIQUE INDISPENSABLE

Les nombres complexes ont été pensés au XVIe siècle par Tartaglia (1499-1557), Rafaël Bombelli (1526-1572) et Cardan (1501-1576). Ces mathématiciens italiens avaient construit des règles de calcul avec des racines carrées de nombres négatifs notamment pour trouver les zéros des polynômes de degré 3, c'est-à-dire trouver les solutions d'équations de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. C'est Karl Friedrich **Gauss** (1777-1855) qui introduira un siècle plus tard l'appellation nombres complexes et formalisera leur utilisation. Comme nous le verrons par la suite, les nombres complexes permettent de donner un sens aux racines carrées de nombres négatifs et simplifient les calculs en géométrie. En outre, les nombres complexes sont nés d'un besoin assez simple, ils sont aujourd'hui indispensables dans la plupart des domaines des mathématiques et de la physique.

GÉNÉRALITÉS

Différents ensembles de nombres

Les nombres les plus souvent utilisés ou ceux qu'on apprend en premier sont les entiers naturels : 0, 1, 2, .., 26, ... On note N l'ensemble de ces nombres. Viennent ensuite les entiers relatifs, qui constituent l'ensemble des entiers positifs ou négatifs : .. −55, .., −1, 0, 1, 2… Cet ensemble est noté Z. En plus de ces nombres viennent s'ajouter les nombres décimaux dont l'ensemble est noté D : il s'agit des nombres dont le développement décimal est fini comme par exemple −12,126 ou 145. Après nous trouvons l'ensemble Q (comme quotient) qui désigne l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent sous la forme p/q avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul : −1/3, 22/13… À cela on peut encore ajouter les irrationnels, c'est-à-dire les nombres qui ne sont pas rationnels comme par exemple π (pi) ou $\sqrt{2}$. L'ensemble formé par la réunion des nombres rationnels et irrationnels s'appelle l'ensemble des réels et on le note R. Ces différents ensembles sont infinis. L'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs qui lui-même est inclus dans l'ensemble des nombres décimaux…

On écrit mathématiquement ces inclusions :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ où $\subset$ signifie « est inclus ».

On peut se demander alors s'il existe un ensemble qui viendrait après l'ensemble des nombres réels.

Résoudre l'équation $x^2 = -1$

On sait que le carré d'un nombre réel est toujours positif donc pour trouver une solution à cette équation, les mathématiciens ont créé un nombre qui soit sa solution. Ce nombre s'écrit communément i comme « imaginaire » car il ne fait pas partie des nombres réels.

On pourrait être tenté d'écrire $i = \sqrt{(-1)}$, cependant ceci pourrait amener à quelques absurdités :

$-1 = i^2 = \sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)}$
$= \sqrt{(-1 \times -1)} = \sqrt{1} = 1$!

Il faut se limiter à la définition :

$i \times i = i^2 = -1$.

Inventer de toute pièce une solution pour résoudre un problème peut paraître saugrenu mais une fois qu'on est familier des nombres complexes on s'aperçoit que cette solution paraît naturelle.

En fait, les Grecs du temps de Pythagore bloquaient sur l'équation $x^2 = 2$. Pour nous les 2 solutions de cette équation apparaissent simplement, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, mais à l'époque les seuls nombres utilisés étaient les nombres rationnels. Comme $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ ne sont pas rationnels alors aucun nombre rationnel n'est solution de cette équation. C'est ainsi que les mathématiciens ont alors découvert l'existence des irrationnels.

Les nombres complexes

On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des nombres réels et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Le mot complexe ne vient pas de la difficulté de l'utilisation de ces nombres mais fait référence aux deux composantes a et b qui les constituent.

Ainsi $3 - \sqrt{2}i$ est un nombre complexe avec $a = 3$ et $b = -\sqrt{2}$, mais -2 est aussi un nombre complexe avec $a = -2$ et $b = 0$.

On voit par là que tout nombre réel est aussi un nombre complexe. L'ensemble des nombres réels est inclus dans l'ensemble des nombres complexes. On dit aussi que les nombres complexes sont une extension naturelle des nombres réels.

Le vocabulaire

Si $z = a + ib$ alors a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$ et b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$. On dit que z est un imaginaire pur si $\mathrm{Re}(z) = 0$, c'est-à-dire si z est de la forme ib et z est un nombre réel si $\mathrm{Im}(z) = 0$ (et dans ce cas là $z = a$).

On note $\overline{z} = a - ib$, où $\overline{z}$ est appelé le conjugué de z. Prendre le conjugué d'un nombre complexe revient à changer le signe de sa partie imaginaire.

On a les propriétés suivantes :

$\overline{\overline{z}} = z$,
$z + \overline{z} = 2a$ est un nombre réel et
$z - \overline{z} = 2ib$ est un imaginaire pur.
$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ est appelé le module de z.

On peut remarquer que si z est un réel ($b = 0$) alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, dans ce cas le module de z est égal à la valeur absolue de a.

Les opérations

Comme les nombres réels, les nombres complexes s'additionnent, se soustraient, se multiplient et se divisent.

Avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on a :

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$
$z - z' = (a - a') + i(b - b')$
$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Pour obtenir ce résultat, on a développé le produit et on a utilisé la propriété $i \times i = -1$.

On s'aperçoit en utilisant la formule du produit que :

$z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Si $z \neq 0$:

$z'/z = (z' \times \overline{z}) / (z \times \overline{z}) = (z' \times \overline{z}) / |z^2|$
$= (aa' + bb') / (a^2 + b^2) + i(ab' - a'b) / (a^2 + b^2)$

On a aussi les relations suivantes avec les modules :

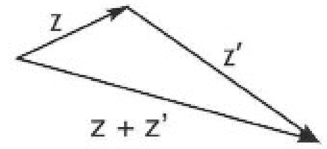
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$,
$|z / z'| = |z| / |z'|$ et
$|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Cette dernière relation s'appelle l'inégalité triangulaire.

Avec ces règles de calcul on a :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$
$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z}'$
$\overline{z / z'} = \overline{z} / \overline{z}'$

Représentation vectorielle d'un nombre complexe



DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

La représentation géométrique

À tout nombre complexe $z = a + ib$ on peut associer dans un plan muni d'un repère orthonormal centré en O le point M de coordonnées (a ; b). On dit dans ce cas que z est l'affixe de M et que M est l'image de z. Le centre du repère O est donc l'image de 0. Un nombre réel *a* a pour image le point de l'axe des abscisses de coordonnées (a , 0) tandis qu'un imaginaire pur *ib* a son image sur l'axe des ordonnées et ses coordonnées sont (0 , b). On peut parler alors de plan complexe, les axes des abscisses et des ordonnées sont souvent appelés les axes des réels et des imaginaires.

La représentation vectorielle

De la même manière, on peut aussi associer à z le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a ; b). On s'aperçoit qu'on a l'égalité entre le module de z et la norme de son vecteur associé, $|z| = \|\vec{w}\| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Si $\vec{w}$ est associé à z et $\vec{w}'$ est associé à z' alors $\vec{w} + \vec{w}'$ est associé à $(z + z')$ et $k\vec{w}$ est associé à kz.

L'égalité entre module et norme permet de mieux comprendre l'inégalité triangulaire des nombres complexes, $\|\vec{w} + \vec{w}'\| \leq \|\vec{w}\| + \|\vec{w}'\|$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Si z est l'affixe d'un point M et O est le centre du repère alors $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur associé à z.

De manière plus générale si z_A et z_B sont les affixes respectifs des points A et B, alors $\overrightarrow{AB}$ est associé à $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Exemple d'application

Soient A, B et C trois points du plan et z_A, z_B, z_C leurs affixes respectifs. On cherche à déterminer les coordonnées du point M (d'affixe z_M) barycentre de A, B, C. M vérifie la relation suivante :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

En passant aux affixes on obtient :

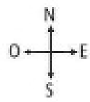
$(z_A - z_M) + (z_B - z_M) + (z_C - z_M) = 0$, c'est-à-dire $z_M = (z_A + z_B + z_C) / 3$ et on trouve facilement les coordonnées du point M.

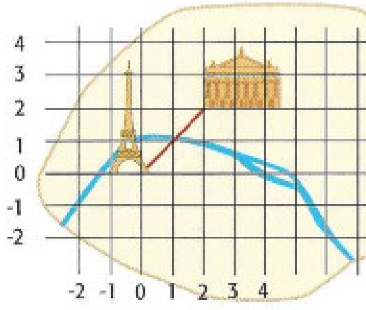
Signalons au passage que M est le point d'intersection des médianes du triangle ABC ainsi que son centre de gravité.

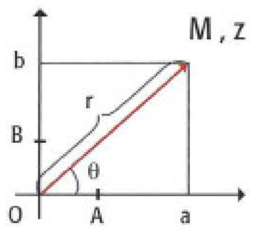
Les coordonnées cartésiennes et polaires

Un point d'un plan peut être repéré de différentes manières. Lorsqu'on veut repérer un point sur un plan ou sur une carte, on donne ses coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire son abscisse et son ordonnée. Prenons par exemple, le point M de coordonnées (a , b) : sur le plan de Paris, l'Opéra Garnier a pour coordonnées (0 , 2). Mais on peut aussi repérer le point M en donnant uniquement la distance OM (= r) et l'angle orienté θ entre les demi-

Les coordonnées cartesiennes et polaires







Historique

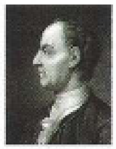
Héron d'Alexandrie

Mathématicien grec, inventeur du nombre « impossible ».

XVIe siècle

Première utilisation d'une racine négative et naissance des nombres complexes.

1777



Euler introduit le symbole moderne i et établit la relation $e^{i\pi} = -1$.

1797

Gauss découvre une interprétation géométrique des nombres complexes.

1831

Gauss établit qu'il n'existe pas d'autre système de nombres avec les mêmes lois fondamentales que celles des nombres complexes.

Début 1980

Benoît Mandelbrot, découvre l'ensemble de Mandelbrot.

La plus ancienne fractale décrite

La poussière de Cantor **décrite en 1872** grâce aux nombres complexes

droites [OA] et [OM]. Ces deux renseignements sur l'emplacement du point M sont les coordonnées polaires. Dans ce nouveau système, M a pour coordonnées (r, θ). Par analogie, on peut situer l'Opéra Garnier en disant qu'elle se situe à 2 km au nord-est de la Tour Eiffel. Ainsi, dans les coordonnées polaires, la première composante donne la distance à l'origine, quant à la deuxième elle indique la direction.
On remarque que l'on doit avoir $r \geq 0$.
On a les relations suivantes entre ces deux types de coordonnées :
$a = r \cos \theta$
$b = r \sin \theta$
et inversement :
$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
$\cos \theta = a / r$, $\sin \theta = b / r$.

La notation exponentielle

Leonhard Euler (1707-1783) fait partie des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire des mathématiques.
Ce mathématicien suisse a rédigé près de 900 livres et articles. On lui doit entre autres les notations f(x) pour les fonctions, e pour la base des logarithmes naturels, i pour la racine de −1 et π. C'est lui qui découvre la relation : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Cette relation s'appelle la formule d'Euler.
Si on applique cette formule à $\theta = \pi$, on trouve : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Cette formule est souvent surnommée la plus belle formule mathématique car elle allie astucieusement les nombres : 0, 1, e, π et i.
Utilisons désormais les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires. Dans ces deux systèmes, le point M d'affixe z a pour coordonnées (a , b) ou (r, θ).
$z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$.
D'où $z = re^{i\theta}$.
On peut remarquer que :
$|e^{i\theta}| = \sqrt{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = 1$.
Il en découle que : $|z| = |r| \times |e^{i\theta}| = r$.
La notation exponentielle (appelée aussi forme polaire) a l'avantage de nous donner facilement le module d'un nombre complexe. θ est appelé l'argument de z et on note $\theta = \arg(z)$.
La forme polaire permet aussi de simplifier la multiplication et la division :
$z \times z' = (r \times r')\, e^{i(\theta + \theta')}$
$z' / z = (r' / r)\, e^{i(\theta' - \theta)}$, il en découle que $\arg (z' / z) = \arg(z') - \arg(z)$.
Si $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont les images de z et z' alors l'angle entre ces deux vecteurs vaut $\theta' - \theta$, $\arg(\vec{v}, \vec{v'}) = \arg(z' / z) = \theta' - \theta$.
$\overline{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos [-\theta] + i \sin [-\theta]) = re^{-i\theta}$. Pour l'addition et la soustraction, la forme $a + ib$ convient mieux tandis que pour la multiplication et la division, c'est la forme $re^{i\theta}$ qui est plus pratique.
Quant à la conjugaison, les deux formes donnent de bons résultats.

La formule de Moivre

Nous avons vu que $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, la formule de Moivre s'obtient en élevant cette égalité à la puissance n :
$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$. Cette formule permet entre autres d'exprimer cos kx en fonction de cos x lorsque k est un entier et trouver les coefficients des polynômes de Tchebychev (1821-1894).
Exemple : avec k = 4,
$\mathrm{Re} (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \mathrm{Re} ((\cos \theta + i \sin \theta)^4)$
$\cos 4\theta = \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$
On a utilisé pour la dernière étape l'égalité $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

La multiplication par e^{ix}

Soit M un point du plan centré en O d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = z \times e^{ix}$.
On a : $OM' = |z'| = |z||e^{ix}| = |z| = OM$, et $\arg (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg(z',z) = \arg(e^{ix}) = x$. Donc M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle x.
Exemple : avec $z = a + ib$ et $x = \pi/2$ (ceci correspond à une rotation de 90 °). $e^{i\pi/2} = i$ donc $z' = z \times i = - b + ia$.

Les transformations du plan

L'un des nombreux avantages de la manipulation des nombres complexes est le lien très fort qui existe entre ces nombres et la géométrie du plan.
Nous allons étudier les transformations usuelles du plan et montrer comment traduire ces opérations géométriques avec les nombres complexes. Par la suite le point B sera l'image du point A par la transformation étudiée, Ω sera le centre de la transformation si cela est nécessaire et z_B, z_A, z_Ω seront les affixes de ces trois points.

La rotation d'angle x et de centre Ω

On doit avoir $\Omega A = \Omega B$ et $\arg (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = x$. Ce qui s'écrit avec les complexes $|z_B - z_\Omega| = |z_A - z_\Omega|$ et $\arg(z_B - z_\Omega, z_A - z_\Omega) = x$,
soit $z_B - z_\Omega = (z_A - z_\Omega)\, e^{ix}$.
D'où $z_B = z_\Omega + (z_A - z_\Omega)\, e^{ix}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$

On a la relation : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, donc $z_B - z_A = z_{\vec{u}}$.
On obtient : $z_B = z_A + z_{\vec{u}}$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k

Comme $\overrightarrow{\Omega B} = k\overrightarrow{\Omega A}$ alors $z_B - z_\Omega = k(z_A - z_\Omega)$.
Donc $z_B = z_\Omega + k(z_A - z_\Omega)$.

Les symétries d'axe

Par rapport à l'axe des abscisses :
$z_B = \overline{z_A}$
Par rapport à l'axe des ordonnées :
$z_B = -\overline{z_A}$

Quelques propriétés sur C

C est un corps commutatif

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps. Ceci doit se lire : l'ensemble des complexes muni de l'addition et la multiplication est un corps. Un ensemble est un corps s'il possède les propriétés suivantes : il est stable par addition et multiplication (ceci revient à dire que la somme ou le produit de deux nombres complexes est encore un nombre complexe), tout élément possède un opposé et s'il est non nul, un inverse (cette propriété est simple à montrer, avec $z = re^{i\theta}$, $-z = re^{i(\theta + \pi)}$ est l'opposé de z et $z^{-1} = 1/r\, e^{-i\theta}$ est l'inverse de z).
De plus, $\mathbb{C}$ est un corps commutatif c'est-à-dire que $z \times z' = z' \times z$. On peut remarquer que $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné contrairement à $\mathbb{R}$. Si on prend deux éléments a et b dans $\mathbb{R}$ on a soit $a \leq b$ soit $b \leq a$. Dans $\mathbb{C}$ cela na p'as de sens.

C est algébriquement clos

On appelle polynôme toute fonction de la forme :
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + ... + a_1 x + a_0$.
Les (a_k) sont les coefficients de P.
Si $a_n \neq 0$ alors le polynôme est de degré n. x est une racine du polynôme P si $P(x) = 0$. L'une des propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{C}$ est qu'il est algébriquement clos, ce qui signifie qu'un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède n racines (pas forcément différentes). Comme on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, alors un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$ possède n racines dans $\mathbb{C}$. Cette assertion est plus connue sous le nom de théorème de Gauss-d'Alembert. Ce théorème fut

d'abord énoncé par d'***Alembert*** (1717-1783) puis démontré par Gauss.
Exemple : $z^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans $\mathbb{C}$: (−1, 1, −i, i). Nous avons mentionné précédemment les polynômes de Tchebychev, il s'agit d'une suite de polynôme (T_n) qui vérifie la propriété suivante : $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. D'après ce qui précède on a $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Les polynômes de degré 2

Grâce aux nombres complexes nous avons des solutions explicites pour les racines d'un polynôme de degré 2 :
$az^2 + bz + c = 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.
- si $\Delta > 0$ l'équation a pour solutions $(-b - \sqrt{(\Delta)}) / 2a$ et $(- b + \sqrt{(\Delta)}) / 2a$,
- si $\Delta = 0$, le polynôme admet une racine double $- b / 2a$,
- si $\Delta < 0$ l'équation a pour solutions $(- b - i\sqrt{(\Delta)}) / 2a$ et $(- b + i\sqrt{(\Delta)}) / 2a$.

On remarque que si a, b et c sont des nombres réels alors les racines sont conjuguées.
Pour les polynômes de degré 3 Cardan a trouvé les formules pour obtenir les racines mais elles sont plus compliquées que pour les polynômes du second degré.

Les applications

Nous avons vu à quel point les complexes étaient utiles en géométrie mais il y a encore de nombreux domaines scientifiques où l'on s'en sert continuellement. Dès qu'ils cherchent à modéliser une onde, les scientifiques utilisent les complexes. Les ondes sont étudiées en acoustique (les vibrations d'une corde), en mécanique des fluides, en résistance des matériaux, en électromagnétisme (la lumière, le courant), en mécanique quantique… L'onde est souvent modélisée par une fonction de la forme $A (x , t) = Ae^{i(kx - wt)}$, x est la position, t est le temps, k et w sont les pulsations spatiale et temporelle et A est l'amplitude. En fixant par exemple x, on remarque que Re(A(x, t)) est une fonction sinusoïdale du temps.
Pour l'étude de systèmes dynamiques, les nombres complexes nous aident à déterminer la stabilité ou l'instabilité des trajectoires.
On peut s'apercevoir que la fonction $f_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ est $2\pi / k$ périodique $f_k (x + 2\pi / k) = f_k(x)$.
Si on a une fonction f périodique suffisamment régulière, on peut alors l'écrire comme une somme des f_k affectées de coefficients (cette opération s'appelle la transformée de Fourier). Les f_k sont des fonctions faciles à étudier, réécrire f sous cette forme permet de pouvoir simplifier son analyse. Il existe des types de transformées similaires, utilisées principalement en traitement du signal notamment pour la compression d'images à algorithmes tel que le JPEG.

Les fractales

Les fractales sont des figures géométriques qui ont la particularité d'avoir des motifs qui se répètent à l'infini lorsqu'on fait un zoom sur elles.
On trouve des exemples de fractales

dans la nature comme les choux-fleurs ou les ***flocons de neige***. Grâce aux nombres complexes, on peut aussi fabriquer des fractales.
Nous présentons ici deux types de fractales connus, l'ensemble de Mandelbrot et l'ensemble de Julia. On se place dans le plan complexe et on étudie la suite $z_{n+1} = z_n^2 + c$.
L'ensemble de Mandelbrot se construit ainsi : un point M du plan d'affixe z sera blanc si la suite (z_n) définit par $z_0 = 0$ et $z_1 = c$ diverge ($\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$) ; il sera noir dans le cas contraire.
L'ensemble de Julia est légèrement différent, on choisit un nombre complexe c puis on prend $z_0 = z$ et on étudie ensuite le comportement de z_n.
On peut aussi obtenir des figures encore plus belles si on y ajoute de la couleur en fonction de la vitesse de convergence des points.
Les nombres complexes plaisent aux scientifiques car ils forment un ensemble contenant R dans lequel on peut utiliser les opérations élémentaires addition, multiplication…
Leur structure permet d'une part de manier deux nombres réels à la fois et d'autre part de donner une signification géométrique à certaines opérations (une multiplication par un nombre complexe de module un est une rotation). Cette simplicité d'utilisation et les nombreux résultats qu'on obtient avec cet ensemble de nombres ont fait des nombres complexes un outil indispensable dans des disciplines scientifiques diverses et variées.

La multiplication par e^{ix}