Découverte des nombres complexes

Depuis longtemps, les hommes connaissaient et utilisaient les nombres entiers naturels, les nombres décimaux, les nombres rationnels (les fractions) et les nombres négatifs. Depuis l'époque de Pythagore, les nombres irrationnels étaient connus (par exemple $\sqrt{2}$). L'ensemble de tous ces nombres (qui correspond aux différents nombres que l'on peut mettre sur une droite graduée) est ce qu'on appelle actuellement l'ensemble des nombres réels.

Dès le XVIème siècle est apparue une nouvelle catégorie de nombres, plus grande que l'ensemble des nombres réelles, l'ensemble des nombres complexes.

Ces "nouveaux" nombres sont apparus notamment lors de la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + mx = n$, où m et n sont des nombres réels.

Pour résoudre l'équation $x^3 + mx = n$, on pose $x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.

On a alors: $x^3 = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^3 = a - 3(\sqrt[3]{a})^2 \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 - b =$

$$= a - b - 3(\sqrt[3]{a})^2 \sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2 =$$
$$= a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) =$$
$$= a - b - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\,x.$$

On obtient ainsi: $x^3 + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\,x = a - b$.

Par comparaison avec l'équation $x^3 + mx = n$, il faut trouver a et b qui satisfont aux relations:

$$m = 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \text{ et } n = a - b.$$

De la relation $n = a - b$, on déduit que $a = n + b$.

Ainsi: $m = 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = 3\sqrt[3]{n+b}\sqrt[3]{b}$.

On en déduit que: $m^3 = \left(3\sqrt[3]{n+b}\sqrt[3]{b}\right)^3 = 27(n+b)b = 27nb + 27b^2$.

En soustrayant m^3, on trouve: $27b^2 + 27nb - m^3 = 0$.

Par transformations successives de cette dernière relation, on a:

$$b^2 + nb - \tfrac{m^3}{27} = 0,$$
$$b^2 + nb - (\tfrac{m}{3})^3 = 0,$$
$$4b^2 + 4nb - 4(\tfrac{m}{3})^3 = 0,$$
$$4b^2 + 4nb + n^2 - n^2 - 4(\tfrac{m}{3})^3 = 0,$$
$$(2b+n)^2 - n^2 - 4(\tfrac{m}{3})^3 = 0,$$
$$(2b+n)^2 = n^2 + 4(\tfrac{m}{3})^3.$$

On a alors deux possibilités:

$$2b + n = \sqrt{n^2 + 4(\tfrac{m}{3})^3} \qquad \text{et} \qquad 2b + n = -\sqrt{n^2 + 4(\tfrac{m}{3})^3}.$$

Traitons séparément ces deux relations:

$$2b+n=\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$2b=-n+\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$b=\frac{-n+\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}}{2}$$
$$b=\frac{-n}{2}+\sqrt{\frac{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}{4}}$$
$$b=-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$b=-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$2b+n=-\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$2b=-n-\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$b=\frac{-n-\sqrt{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}}{2}$$
$$b=\frac{-n}{2}-\sqrt{\frac{n^2+4\left(\frac{m}{3}\right)^3}{4}}$$
$$b=-\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$b=-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

Pour ces deux solutions pour b, en utilisant la relation $a=n+b$, on trouve les deux solutions correspondantes pour a:

$$a=n-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$a=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$a=n-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$
$$a=\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

On obtient donc deux solutions pour $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$:

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad \text{et}$$
$$x_2=\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\ .$$

Or:
$$x_1=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad \text{et}$$
$$x_2=\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\ .$$

On en déduit que $x_1=x_2$.

On obtient donc: $$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}}\ .$$

Cette formule s'appelle la formule de Cardon, car elle a été découverte par le mathématicien italien Jérôme Cardan (Gerolamo Cardano) vers 1550.

On va appliquer cette formule à la résolution de deux équations:

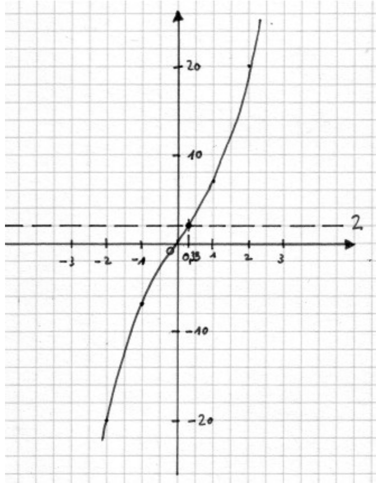
1) $x^3+6x=2$ et
2) $x^3-6x=2$.

1) Pour $x^3+6x=2$, on pose $m=6$ et $n=2$ dans la formule de Cardan.

On obtient: $$x=\sqrt[3]{\frac{2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^3}}=$$
$$=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+8}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+8}}=$$
$$=\sqrt[3]{1+3}+\sqrt[3]{1-3}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{-2}=0.32748 \text{ environ.}$$

Vérifions que cette valeur correspond bien à une solution de l'équation
$x^3+6x=2$.

Pour cela, traçons le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + 6x$ et regardons ses intersections avec la droite $y = 2$ (qui correspondent avec les solutions de l'équation $x^3 + 6x = 2$):



On remarque que la solutionobtenue ($x = 032748$ environ) correspond bien à l'unique solution de l'équation $x^3 + 6x = 2$.

2) Pour $x^3 - 6x = 2$, on pose $m = -6$ et $n = 2$ dans la formule de Cardan.

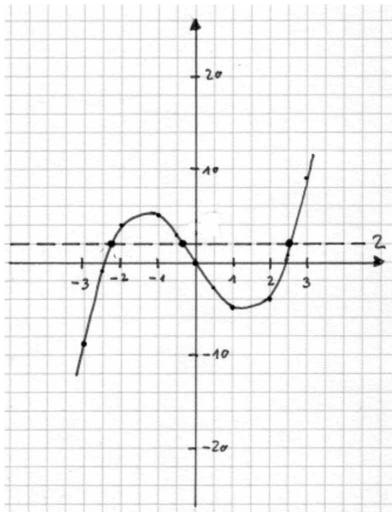
On obtient: $x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{(\frac{2}{2})^2 + (\frac{-6}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{(\frac{2}{2})^2 + (\frac{-6}{3})^3}} =$

$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{1-8}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1-8}} =$

$= \sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-7}}$, nombre qui n'existe pas (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas).

On est alors en droit de conclure que l'équation $x^3 - 6x = 2$ ne possède pas de solution.

Or, si nous traçons le graphe de la fonction $x^3 - 6x = 2$, on constate que ce dernier a trois points d'intersection avec la droite $y = 2$ et donc que l'équation $x^3 - 6x = 2$ devrait avoir 3 solutions:



La "solution" que l'on avait obtenue:

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-7}}$$

doit donc avoir une certaine existence afin de donner les trois solutions que nous montre le graphe, trois valeurs de x qui sont des nombres réels.

Comme c'est $\sqrt{-7}$ qui pose problème dans $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-7}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-7}}$, $\sqrt{-7}$ doit avoir une certaine existence, mais ce n'est pas un nombre réel. C'est ce qu'on appelle un nombre complexe.

Ainsi, la formule de Cardan nous donne bien la ou les solutions des équations de la forme $x^3 + mx = n$, mais il ne suffit pas de considérer les nombres réels pour trouver les solutions réelles, il faut passer par une extension des nombres réels, qui sont les nombres complexes, dans lesquelles les racines carrées des nombres négatifs sont autorisées.