Nombres complexes

7.1 Historique

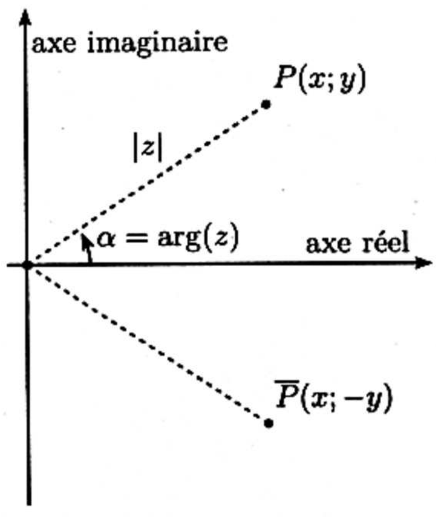
En géométrie, les nombres réels suffisent. Ils permettent en effet de décrire la mesure (signée) de toute longueur. En analyse, des équations, même simples, n'ont pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Par exemple, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle car aucun $x \in \mathbb{R}$ n'est tel que $x^2 = -1$!
Contrairement à Viète, notamment, qui évite d'utiliser les nombres conduisant à des calculs infaisables, les algébristes italiens du XVIème, dont Cardan (connu pour sa formule de résolution des équations du 3ème degré), introduisirent des symboles formels pour représenter l'extraction « impossible » de la racine carrée d'un nombre négatif. Ils décrivent en détail comment manipuler ces nouveaux « nombres », appelés alors nombres impossibles.
Au début, la considération de ces nombres impossibles se voulait surtout un astucieux moyen de résoudre toute équation du deuxième degré. En 1550, en approfondissant la formule de Cardan, Bombelli (1526-1573), découvre que ces nombres interviennent également dans la résolution des équations du 3ème degré. Il les traita comme des nombres réels et fut le premier à formuler des règles de calcul.
C'est vers 1750 que le Suisse Euler introduit la notation $i = \sqrt{-1}$ et établit d'innombrables formules relatives aux fonctions élémentaires d'une variable complexe. Il établit un lien avec la trigonométrie. Plus tard, Gauss (1777-1855), à la suite d'autres mathématiciens, donne une interprétation géométrique à ces nombres. C'est lui qui, plus tard, a introduit la terminologie de nombre complexe pour désigner ces nombres imaginaires, et il montra que tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.
L'utilisation de ces nombres, d'abord difficilement acceptés par la communauté mathématique, a permis de résoudre des types d'équations dont la recherche de solutions n'était même pas envisageable à l'époque.L'étude des nombres complexes, nous le constaterons rapidement, se trouve à la croisée de l'algèbre et de la géométrie.

7.2 Définitions et représentation dans le plan de Gauss

On désigne par i, comme *imaginaire*, le nombre qui satisfait $i^2 = -1$. On appelle **nombres complexes** les expressions de la forme $z = a + b \cdot i$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Cette expression est nommée **forme algébrique**. a est sa **partie réelle**, notée $a = \text{Re}(z)$, alors que b est sa **partie imaginaire**, notée $b = \text{Im}(z)$.
Deux nombres complexes sont les mêmes si leurs parties réelles sont les mêmes et si leurs parties imaginaires sont les mêmes. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**. Il est de la forme $z = i \cdot b$.
On note $\bar{z}$ le nombre **conjugué complexe** de z. Par définition, $\bar{z} = a - b \cdot i$. Le conjugué de z ne diffère donc de z que par le signe de sa partie imaginaire. L'ensemble des complexes est noté $\mathbb{C}$. Il contient les nombres réels ($b = 0$).

Géométrique, on représente un nombre complexe dans un plan à deux dimensions qu'on appelle **plan de Gauss** ou **plan complexe**. Tout nombre complexe $z = x + yi$ peut être représenté par un point $P\,(x;y)$ dans ce plan. L'axe horizontal s'appelle **axe réel** et l'axe vertical est nommé **axe imaginaire**. L'angle décrit par l'axe réel et le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'appelle **argument** du nombre z et il se note $\arg(z)$. Notons que l'argument d'un nombre complexe est unique modulo 360° ou 2π. La distance de l'origine au point P s'appelle **module** du nombre complexe z et on le note $|z|$. Il s'agit de la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Ainsi le point P représentant le nombre complexe $z = x + yi$ peut être décrit par ses

- **coordonnées cartésiennes** : $(\text{Re}(z); \text{Im}(z)) = (x; y)$ ou
- **coordonnées polaires** : $|z|$ et $\arg(z)$ ("forme module-argument")



► **Remarque :** Si $z = x + yi$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Le module de z^2 est

$$\begin{aligned} |z^2| &= \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2} \\ &= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2} \\ &= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\left|z^2\right| = |z|^2$$

7.3 Opérations sur les nombres complexes

L'addition, la soustraction et la multiplication de nombres complexes s'effectuent en respectant les propriétés d'associativité, de commutativité et la distributivité en plus du résultat $i^2 = -1$. Nous nous proposons ici de définir les opérations de base entre deux nombres complexes. Lorsque nous restreignons les définitions à un nombre complexe $z = a$, nous devons retrouver les définitions que l'on connaît dans $\mathbb{R}$.

Addition : $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)}$$

Lorsque $z_1 = a_1$ et $z_2 = a_2$, on retrouve l'addition dans $\mathbb{R}$
$z_1 + z_2 = a_1 + a_2$

Soustraction : $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)}$$

Lorsque $z_1 = a_1$ et $z_2 = a_2$, on retrouve la soustraction dans $\mathbb{R}$
$z_1 - z_2 = a_1 - a_2$

Multiplication : $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$$

Lorsque $z_1 = a_1$ et $z_2 = a_2$, on retrouve la multiplication dans $\mathbb{R}$
$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2$

Conjugué : $z = a + bi$ et $\overline{z} = a - bi$

$$\boxed{z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2}$$

Lorsque $z = a = \overline{z}$ on a $z \cdot z = a^2$

Division : $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$
l'idée ici est de multiplier $\frac{z_1}{z_2}$ par $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ afin d'éliminer la partie imaginaire au dénominateur.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \cdot \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}}$$

Lorsque $z_1 = a_1$ et $z_2 = a_2$, on retrouve la division dans $\mathbb{R}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$

► **Exemple :** $\dfrac{2+7i}{-3+4i} = \dfrac{2+7i}{-3+4i} \cdot \dfrac{-3-4i}{-3-4i} = \dfrac{-6-8i-21i+28}{9+16} = \dfrac{22}{25} - \dfrac{29}{25} \cdot i$

7.4 Formes trigonométrique et algébrique

Le nombre complexe $z = a + ib$ a l'argument φ et le module $|z| = r$. Nous pouvons alors exprimer un nombre complexe z à l'aide de a, b et de φ et r, et réciproquement. Il s'agit en fait de passer de la forme algébrique (coordonnées cartésiennes) à la forme trigonométrique (coordonnées polaires). Voici les formules de conversion :

$$\begin{cases} a = r\cos(\varphi) \\ b = r\sin(\varphi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right),\ a \neq 0 \qquad \text{(év. + 180°)} \end{cases}$$

On appelle **forme trigonométrique** du nombre complexe $z = a + bi$ l'expression :

$$z = r\cos(\varphi) + i\cdot r\sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \overset{\text{notation}}{=} r\text{cis}(\varphi)$$

7.4.1 Interprétation géométrique de la multiplication

La forme trigonométrique nous permet de donner une interprétation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes.

Multiplication de deux nombres complexes

$$\text{Si } \begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i = r_1\text{cis}(\varphi_1) \\ z_2 = a_2 + b_2 i = r_2\text{cis}(\varphi_2) \end{cases} \quad \text{alors} \quad z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\text{cis}(\varphi_1+\varphi_2)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))\cdot(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\
&= r_1r_2\left[(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))\right] \\
&= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\
&= r_1r_2\cdot\text{cis}(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

□

Pour multiplier deux nombres complexes entre eux, il suffit de multiplier leurs modules et additionner leurs arguments.

► **Exemple :** $z = i = 1\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z^2 = i\cdot i = 1\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$
De manière générale, d'après ce que l'on vient de découvrir, on a

$$\begin{aligned}
z^2 &= (r\cdot\text{cis}(\varphi))^2 = (r\cdot\text{cis}(\varphi))\cdot(r\cdot\text{cis}(\varphi)) = r^2\cdot\text{cis}(\varphi+\varphi) = r^2\cdot\text{cis}(2\varphi) \\
z^3 &= (r\cdot\text{cis}(\varphi))^3 = (r\cdot\text{cis}(\varphi))\cdot(r\cdot\text{cis}(\varphi))\cdot(r\cdot\text{cis}(\varphi)) = r^3\cdot\text{cis}(\varphi+\varphi+\varphi) = r^3\cdot\text{cis}(3\varphi) \\
z^n &= (r\cdot\text{cis}(\varphi))^n = \underbrace{(r\cdot\text{cis}(\varphi))\cdot\ldots\cdot(r\cdot\text{cis}(\varphi))}_{\text{n fois}} = r^n\cdot\text{cis}(\varphi+\ldots+\varphi) = r^n\cdot\text{cis}(n\varphi)
\end{aligned}$$

On en déduit la formule de Moivre (1707)

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

7.4.2 Interprétation géométrique de la division

La forme trigonométrique nous permet de donner une interprétation géométrique de la division de deux nombres complexes.

Division de deux nombres complexes

$$\text{Si} \begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i = r_1 \text{cis}\,(\varphi_1) \\ z_2 = a_2 + b_2 i = r_2 \text{cis}\,(\varphi_2) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}\,(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1 \text{cis}\,(\varphi_1) \cdot \frac{1}{r_2 \text{cis}\,(\varphi_2)} \;=\; r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)\right) \cdot \left(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)\right) \\
&= \frac{r_1}{r_2} \text{cis}\,(\varphi_1) \cdot \frac{1}{\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)} \cdot \frac{\cos(\varphi_2) - i \sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_2) - i \sin(\varphi_2)} \;=\; \frac{r_1}{r_2} \text{cis}\,(\varphi_1) \cdot \frac{\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)}{\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \text{cis}\,(\varphi_1) \cdot \text{cis}\,(-\varphi_2) \;=\; \frac{r_1}{r_2} \text{cis}\,(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

□

Pour diviser deux nombres complexes entre eux, il suffit de diviser leurs modules et soustraire leurs arguments.

▶ **Exemple :** $\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \text{cis}(0)}{r_1 \cdot cis(\varphi_1)} = \frac{1}{r_1} \text{cis}\,(0 - \varphi_1) = \frac{1}{r_1} \text{cis}\,(-\varphi_1)$

7.5 Racines d'un nombre complexe

7.5.1 Racines carrées d'un nombre complexe

On se propose de trouver les racines carrées d'un nombre complexe $z = a + bi$, c'est-à-dire de résoudre l'équation $\omega^2 = z$. La première remarque que nous pouvons faire, c'est que les solutions sont opposées. En effet, $\omega^2 = (-\omega)^2 = z$ Nous allons déterminer ω deux manières différentes.

▶ **Méthode 1 :**

Ecrivons : $\qquad \omega = x + yi$

On a $\qquad \omega^2 = (x+yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{a} + \underbrace{2xy}_{b}\, i = a + bi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \qquad \Rightarrow x = \dfrac{b}{2y} \end{cases}$

En substituant, on a $\qquad \left(\dfrac{b}{2y}\right)^2 - y^2 = a \qquad \Rightarrow 4y^4 + 4ay^2 - b^2 = 0$

Posons $u = y^2$ $\qquad 4u^2 + 4au - b^2 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2}}{8} = \frac{-4a \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$u = y^2 \in \mathbb{R}, u > 0 \qquad u = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{a + y^2} = \pm\sqrt{a + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Il n'y a pas quatre solutions, mais deux ! En effet, comme il faut que x et y satisfassent $2xy = b$, le produit de leurs signes doit être identique au signe de b. Si $b > 0$ alors les racines sont placées dans les quadrants I et III (car parties réelle et imaginaire de même signe). Si $b < 0$ alors elles sont dans les quadrants II et IV.

▶ **Exemple :** Résoudre $\omega^2 = 7 + 24i$. Comme $24 > 0$, on sait que $\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(y)$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{7+25}{2}} = \pm 4 \qquad\qquad y = \pm\sqrt{\tfrac{-7+25}{2}} = \pm 3$$

Les solutions sont donc $\omega_1 = 4 + 3i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -4 - 3i$

▶ **Méthode 2 :**

Ecrivons : $\omega = x + yi = r_\omega \mathrm{cis}(\varphi_\omega)$

$z = r_z \mathrm{cis}(\varphi_z)$

On a $\omega^2 = (r_\omega \mathrm{cis}(\varphi_\omega))^2 = r_\omega^2 \mathrm{cis}(2\varphi_\omega) = r_z \mathrm{cis}(\varphi_z)$

Donc $r_\omega = \sqrt{r_z}$

$\varphi_\omega = \frac{\varphi_z}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\varphi_z}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

▶ **Exemple :** Comme avant, on veut résoudre $\omega^2 = 7 + 24i$.

On a $z = 7 + 24i = \sqrt{24^2 + 7^2} \cdot \mathrm{cis}\left(\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)\right)$

$z = 25 \cdot \mathrm{cis}\left(\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)\right)$

Donc $r_\omega = \sqrt{25} = 5$

$$\varphi_\omega = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)}{2} + k\pi \ \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{\omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) \simeq 0.64 \\ \varphi_{\omega_1} = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right) + \pi \simeq 3.79 \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 5\mathrm{cis}\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right)\right) \\ &= 5\left(\cos\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right)\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right)\right)\right) \\ &= 5\,(0.8 + i0.6) = 4 + 3i \\ \omega_2 &= 5\mathrm{cis}\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right) + \pi\right) \\ &= 5\left(\cos\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right) + \pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{2} \cdot \tan^{-1}\left(\tfrac{24}{7}\right) + \pi\right)\right) \\ &= 5\,(-0.8 - i0.6) = -4 - 3i \end{aligned}$$

7.5.2 Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

En s'inspirant de cette dernière méthode, nous pouvons maintenant résoudre l'équation $\omega^n = z$.

Ecrivons : $\omega = x + yi = r_\omega \mathrm{cis}(\varphi_\omega)$

$z = r_z \mathrm{cis}(\varphi_z)$

On a $\omega^n = (r_\omega \mathrm{cis}(\varphi_\omega))^n = r_\omega^n \mathrm{cis}(n\varphi_\omega) = r_z \mathrm{cis}(\varphi_z)$

Donc $r_\omega = \sqrt[n]{r_z}$

$\varphi_\omega = \frac{\varphi_z}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$

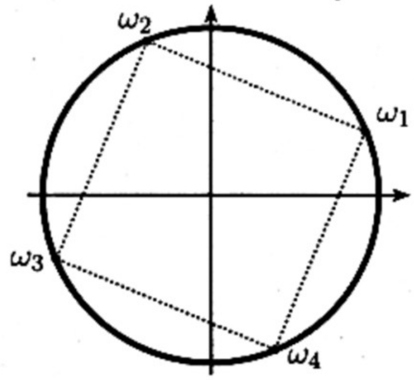
Les solutions de cette équation sont les suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt[n]{r_z}\text{cis}\left(\frac{\varphi_z}{n}\right)$$
$$\omega_2 = \sqrt[n]{r_z}\text{cis}\left(\frac{\varphi_z}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)$$
$$\cdots$$
$$\omega_n = \sqrt[n]{r_z}\text{cis}\left(\frac{\varphi_z}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$$

Les solutions ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_n représentent les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r_z}$.

► **Exemple :** Résoudre $\omega^4 = i$.

$$\omega_1 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) \simeq 0.92 + 0.38i$$
$$\omega_2 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{8}\right) \simeq -0.38 + 0.92i$$
$$\omega_3 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{9\pi}{8}\right) \simeq -0.92 - 0.38i$$
$$\omega_4 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{13\pi}{8}\right) \simeq 0.38 - 0.92i$$



Les solutions ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_4 représentent les sommets d'un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.

7.6 Fonctions complexes et interprétations géométriques

Comme on le fait avec les nombres réels, on peut définir des fonctions complexes, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{lcl} f:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z = x+iy & \longmapsto & f(z) = u+iv \end{array}$$

► **Remarque :** Le domaine de la fonction peut être un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Un nombre complexe étant associé à un point du plan de Gauss, une fonction complexe est une transformation du plan de Gauss qui associe à tout point $P(x;y)$ du plan son image $P'(u;v)$. Dans le but de donner une interprétation géométrique de la fonction complexe, nous commençons généralement par en déterminer les **points fixes** (ou invariants) et par définir son **noyau**.

► **Définitions**

a. Un **point fixe** de la fonction f est un nombre z tel que $f(z) = z$. Autrement dit, un point fixe de f est un zéro de $f(z) - z$.

b. Le **noyau** de la fonction est composé de l'ensemble des zéros de f, donc des solutions de $f(z) = 0$. On écrit : $z \in Ker(f) \Leftrightarrow f(z) = 0$.

► **Exemples :**

a. **Conjugaison complexe**. Considérons tout d'abord la fonction 'conjugaison complexe' :

$$\begin{cases} f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = \overline{z} \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Symétrie d'axe réel
Point(s) fixe(s) : $z = x,\ x \in \mathbb{R}$ (axe réel, donc $y = 0$)
Noyau : $z = 0$ (l'origine)

b. **Opposé d'un nombre complexe**. Considérons la fonction 'multiplication par -1' :

$$\begin{cases} f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = -z \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Symétrie autour de l'origine
Point(s) fixe(s) : $z = 0$ (origine)
Noyau : $z = 0$ (origine)

c. **Addition / Soustraction d'un nombre complexe**. Etant donné $w = a + ib$, nous considérons la fonction 'addition du nombre complexe w' :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = z + w \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Translation de vecteur $\overrightarrow{w} = \binom{a}{b}$, qu'on note $T(\overrightarrow{w})$
Point(s) fixe(s) : Aucun
Noyau : $z = -w$

d. **Multiplication par un nombre complexe**. Etant donné $w = a + ib = r_\omega cis(\varphi_\omega)$, nous considérons la fonction 'multipliction par w' :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = z \cdot w \end{cases}$$

Avec la forme trigonométrique : $f(z) = r\text{cis}(\varphi) \cdot r_\omega cis(\varphi_\omega) = rr_\omega \cdot \text{cis}(\varphi + \varphi_\omega)$
Cette fonction f peut être vue comme une composition :

$$P(x; y) = (r; \varphi) \xrightarrow[\text{rotation}]{} P'(r; \varphi + \varphi_w) \xrightarrow[\text{homothétie}]{} P''(r \cdot r_w; \varphi + \varphi_w)$$

Interprétation géométrique : Rotation d'angle φ' autour de l'origine puis homothétie de centre origine et de rapport r'.
Point(s) fixe(s) : $z = 0$ (origine)
Noyau : $z = 0$ (origine)

e. **Inversion par rapport au cercle trigonométrique**. Considérons encore la fonction :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} \end{cases}$$

Comme $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{r}\text{cis}(\varphi)$, on peut écrire f sous la forme : $f(z) = \frac{1}{r}\text{cis}(\varphi)$. Cette fonction est étudiée en exercice.

f. **Transformation affine**. Considérons la fonction suivante :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = az + b, \ a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, b \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Rotation d'angle $\arg(a)$ autour de z_0, puis homothétie de centre z_0 de rapport $|a|$.
Point(s) fixe(s) : $z = az + b \ \Rightarrow \ z(1 - a) = b \ \Rightarrow \ z = z_0 = \frac{b}{1-a}$
La fonction peut alors être réécrite : $f(z) = a(z - z_0) + z_0$.
Vérification :

$$\begin{aligned} a(z - z_0) + z_0 &= az - az_0 + z_0 \\ &= az + z_0(1-a) = az + \tfrac{b}{1-a}(1-a) \\ &= az + b \end{aligned}$$

De plus on vérifie facilement que z_0 est point fixe :
$f(z_0) = a(z_0 - z_0) + z_0 = z_0$

7.7 Théorème fondamental de l'algèbre

Nous allons ici nous intéresser aux racines d'un polynôme de degré n. Démontrons d'abord 3 petits résultats préalablement.

> a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ b. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ c. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
\text{a.}\quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)} \\
&= (x_1 + x_2) - i\,(y_1 + y_2) = (x_1 - i y_1) + (x_2 - i y_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\text{b.}\quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)} = \overline{x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i - y_1 y_2} \\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_1 y_2 i - x_2 y_1 i = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
\text{c.}\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i} \cdot \frac{x_2-y_2 i}{x_2-y_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1x_2-x_1y_2 i+x_2y_1 i+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \\
&= \frac{x_1x_2+y_1y_2-ix_2y_1+ix_1y_2}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1-y_1 i}{x_2-y_2 i} \cdot \frac{x_2+y_2 i}{x_2+y_2 i} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \cdot \frac{z_2}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}
$$

□

Considérons maintenant un polynôme $p(z)$ à coefficients réels suivant :

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad \text{avec } a_i \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{C}$$

> Alors si z_0 est une racine de $p(z)$, c'est-à-dire $p(z_0) = 0$, alors le conjuguée $\overline{z_0}$ est aussi une racine de $p(z)$, c'est-à-dire $p(\overline{z_0}) = 0$

Preuve :

On sait que

$$p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

On peut alors écrire

$$\overline{p(z_0)} = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0$$

A l'aide des résultats préalables, on peut écrire

$$\overline{p(z_0)} = \overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} = 0$$

Comme $a_i \in \mathbb{R}$, et donc $a_i = \overline{a_i}$, on a

$$\overline{p(z_0)} = a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$$

Comme $\overline{z^n} = \underbrace{\overline{z \cdot \ldots \cdot z}}_{\text{n fois}} = \overline{z}^n$, on a

$$\overline{p(z_0)} = a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0$$

et donc

$$\overline{p(z_0)} = p(\overline{z_0}) = 0$$

□

▶ **Rappel :** Les polynômes à coefficients et variable réels $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ peuvent se factoriser à l'aide de polynômes irréductibles, c'est-à-dire de degré 1 et/ou de degré 2 (lorsque dans la factorisation on obtient un discriminant négatif). Considérons maintenant des polynômes à variable complexe et à coefficients complexes

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \text{ avec } \mathrm{a_i}, \mathrm{z} \in \mathbb{C}$$

▶ **Définition** a est une **racine de multiplicité k** du polynôme p si k est la plus grande puissance de $(z-a)$ qui peut diviser $p(z)$. Ainsi on a $p(z) = (z-a)^k \cdot q(z)$. Une racine de multiplicité 1 est nommée **racine simple**.

Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss, 1799)
Tout polynôme p de degré n possède n racines complexes comptées avec multiplicité. Ceci signifie que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ peut se factoriser à l'aide de monômes :

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$$

où les racines z_i ne sont pas nécessairement différentes.

▶ **Exemples :**

a. $p(z) = z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z - i)(z + i)(z - 1)(z + 1)$ est de degré 4 et possède 4 zéros distincts : $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$ et $z_4 = -1$.

b. $p(z) = z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 24z + 36$ est aussi de degré 4 et possède 3 zéros distincts : $z_1 = -3$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$.
Comme la multiplicité de $z_1 = -3$ est 2, le nombre de racines comptées avec multiplicité est bien 4, comme l'affirme le théorème. La forme factorisée est $p(z) = (z + 3)^2(z - 2i)(z + 2i)$.

Conséquences :

a. Tous les polynômes de degré n peuvent être écrits comme produit de polynôme de degré 1

b. Le noyau d'une fonction polynômiale $f(z)$ de degré n, contient n éléments comptés avec leurs multiplicités.
Pour déterminer les points fixes, nous devons résoudre l'équation $f(z) = z$, soit $f(z) - z = 0$. Désignons par m le degré du polynôme $f(z) - z$. Alors la fonction f possède m points fixes (comptés avec multiplicité).

7.8 Etude d'une fonction complexe

Soit la fonction complexe :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\longmapsto f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv \end{aligned}$$

Pour l'étudier, on détermine tout d'abord son domaine, ses points fixes et son noyau. Grâce au(x) point(s) fixe(s) l'interprétation géométrique associée peut souvent être devinée. Pour déterminer l'image d'une figure ou d'une courbe par la fonction f, il nous faut déterminer l'équation qui lie u et v, et reconnaître des droites, cercles, paraboles...

▶ **Exemples :**

a. Quelle est l'image de la droite $2x + y = 0$ par la fonction $f(z) = z^2$?
On a

$$f(z) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2xy}_{v}\, i$$

Un point z de la droite $2x + y = 0$ est de la forme $z = x + (-2x)i$, puisque $y = -2x$.
Son image est

$$f(z) = x^2 - (-2x)^2 + 2x(-2x)i = \underbrace{5x^2}_{u} + \underbrace{(-4x^2)}_{v}\, i$$

L'équation qui lie u et v est $\frac{u}{5} = \frac{v}{-4} \Rightarrow -4u = 5v \Rightarrow 5v + 4u = 0$ ou $v = -\frac{4}{5}u$.
Il s'agit, chaque fois que c'est possible, d'exprimer v comme une fonction de u. En conclusion, l'image de la droite $2x + y = 0$ par la fonction f est la droite d'équation $y = -\frac{4}{5}x$.

b. Quelle est la préimage du cercle centré en l'origine et de rayon 2, par la fonction $f(z) = z^2$?

L'image étant donnée, le lien entre u et v est connu : $u^2 + v^2 = 4$. Nous devons déterminer l'équation qui lie x et y. De l'exemple précédent nous savons que $f(z) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2xy}_{v}\, i$.

En remplaçant u et v dans $u^2 + v^2 = 4$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &= 4 \\
x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 &= 4 \\
x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &= 4 \\
(x^2 + y^2)^2 &= 4 \\
x^2 + y^2 &= \pm 2
\end{aligned}$$

Comme $x^2 + y^2$ n'est jamais négatif, l'équation de la préimage est $x^2 + y^2 = 2$. Il s'agit du cercle centré en l'origine, de rayon $\sqrt{2}$.