Chapitre 10

Nombres complexes

10.1 Introduction

10.1.1 Les ensembles de nombres

Tout d'abord, on se rappelle les différents ensembles de nombres que l'on connaît.

1. Les nombres naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Les nombres entiers $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Les nombres rationnels ou fractions $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
4. Les nombres réels $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ldots\}$ qui forment un ensemble non-dénombrable.

On a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

10.1.2 A propos des équations du deuxième degré

On sait que l'équation $x^2 - 1 = 0$ admet deux solutions qui sont -1 et 1.

On sait aussi qu'un nombre réel élevé au carré est toujours positif (à cause de la règle des signes), c'est-à-dire que $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De ce fait, l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui est équivalente à $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions réelles. Mais pourrait-on *imaginer* une solution ?

Il faudrait un nombre *non réel* dont le carré fasse -1.

10.1.3 Le nombre i et l'ensemble des nombres complexes

Notons i le *nombre imaginaire* qui satisfait $\boxed{i^2 = -1}$.

Ainsi, on a $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, etc.

Mais aussi $\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{i^2} = -1$, $\frac{1}{i^3} = i$, $\frac{1}{i^4} = 1$, etc.

On forme à l'aide de ce nombre i, un nouvel ensemble de nombres. On note $\mathbb{C}$ ce nouvel ensemble construit à partir des nombres réels et du nombre imaginaire i. Cet ensemble est appelé l'ensemble des *nombres complexes*. Tout comme dans $\mathbb{R}$, on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser deux nombres complexes.

Ce nouvel ensemble de nombres permet de prolonger la suite d'inclusions ci-dessus ainsi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

10.2 Les nombres complexes

L'idée est de traiter le nombre imaginaire i de la même manière que n'importe quel autre nombre réel. On se base sur cette idée fondamentale pour mélanger le nombre i avec les autres nombres réels, obtenant ce que l'on appelle des nombres complexes.

Tout nombre complexe z s'écrit de **manière unique** comme $z = a + bi$. Le nombre réel a est appelé *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$. Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

On définit formellement l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{où } i \text{ est un nombre imaginaire satisfaisant } i^2 = -1$$

10.2.1 Le conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On définit le *conjugué* de z par $\overline{z} = a - bi$.

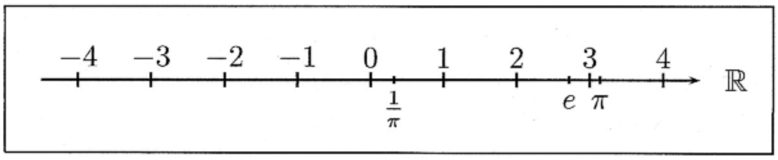
10.2.2 L'inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On détermine son inverse $\frac{1}{z}$, en amplifiant cette fraction par $\overline{z}$. On obtient ainsi

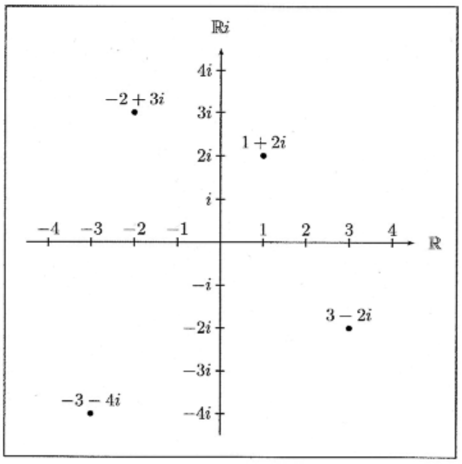
$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i\end{aligned}$$

10.2.3 Le plan de Gauss

On représente les nombres réels par une droite, appelée la droite réelle.



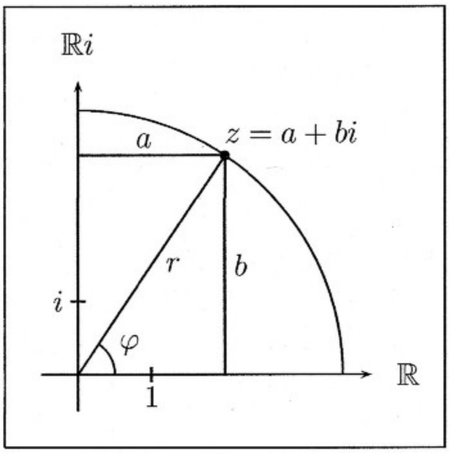
Le nombre i n'étant pas réel, il ne peut pas être représenté par un point cette droite. On ajoute une droite imaginaire comme pour le plan $\mathbb{R}^2$ et on obtient le *plan de Gauss*.



Ainsi un nombre complexe $z = a + bi$ est représenté par un point dans le plan de Gauss. La partie réelle de z est l'abscisse de ce point et sa partie imaginaire est son ordonnée.

10.2.4 La forme trigonométrique d'un nombre complexe

On peut aussi décrire un nombre complexe $z = a+bi$ à l'aide de *coordonnées polaires*. Un point du plan se trouve sur un cercle de rayon r sur une droite passant par l'origine d'angle φ. Pour les nombres complexes, r s'appelle le *module* de z et est noté $|z|$. L'angle φ est appelé l'*argument* de z et est noté $\arg(z)$.



Remarquons que l'argument est défini à un multiple de 2π près. Grâce à Pythagore et à la trigonométrie sur les triangles rectangles, on a les relations

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \tan(\varphi) = \tfrac{b}{a}$$
$$\cos(\varphi) = \tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin(\varphi) = \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

À l'inverse, on peut aussi décrire un nombre complexe lorsqu'on connaît son module et son argument. C'est la *forme trigonométrique*. On peut raccourcir son écriture en utilisant l'abréviation cis (pour **c**os, ***i*** et **s**in)

$$\boxed{z = r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) = r\operatorname{cis}(\varphi)}$$

Dans le chapitre « séries et développements de Taylor » du cours OS, on montre qu'on peut utiliser l'exponentielle en base e (où e est le nombre d'Euler qui vaut environ 2.71828) pour noter la forme trigonométrique des nombres complexes.

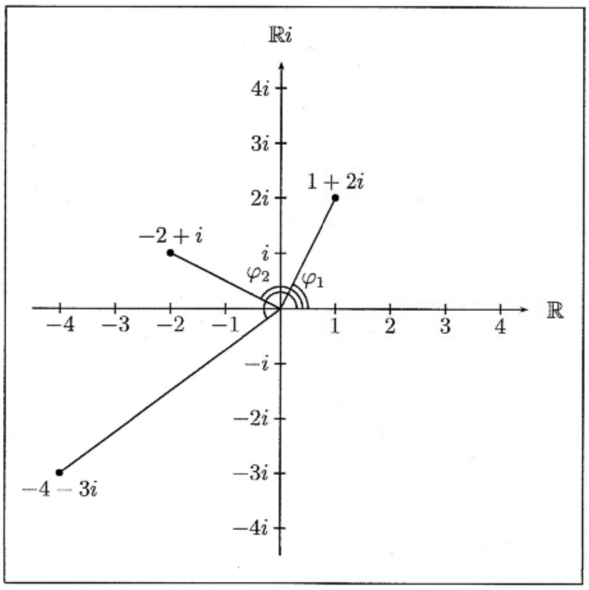
$$\boxed{z = r\operatorname{cis}(\varphi) = re^{i\varphi}}$$

10.2.5 La géométrie de la multiplication

On a la formule de multiplication suivante qui est naturelle avec la notation exponentielle.

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = r_1\operatorname{cis}(\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1} \\ z_2 = r_2\operatorname{cis}(\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2} \end{array}\right. \implies z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1+\varphi_2) = r_1 r_2 e^{i\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}$$

Cela signifie que pendant une multiplication les modules se multiplient et les arguments s'additionnent. Cela se voit sur le plan de Gauss.



10.2.6 La formule de de Moivre

Le mathématicien français Abraham de Moivre (1667-1754) a trouvé la formule trigonométrique suivante.

$$\begin{aligned} &(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx) && \text{pour tout } n \geqslant 1 \\ \iff\ &(\mathrm{cis}(x))^n = \mathrm{cis}(nx) && \text{pour tout } n \geqslant 1 \end{aligned}$$

Ce qui donne naturellement pour la notation exponentielle

$$(e^{ix})^n = e^{inx} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

10.2.7 Les racines énième d'un nombre complexe

Lorsque l'on regarde une équation sur les nombres complexes, on note l'inconnue z (plutôt que de la noter x comme on le ferait pour une équation sur les nombres réels, bien que ce ne soit pas une règle absolue).

Définition

Soit z_0 un nombre complexe.
Les solutions de l'équation $z^n = z_0$ sont appelées *racines n-ième* du nombre complexe z_0.

Attention

Contrairement à ce qui se passe pour les nombres réels où la racine n-ième d'un nombre réel a est LE nombre réel x (positif s'il y en a deux) tel que $x^n = a$ (s'il existe), on ne peut pas parler de LA racine n-ième d'un nombre complexe. En effet, un nombre complexe non nul admet n racines n-ièmes complexes (différentes) !

Pour cette raison, la notation $\sqrt[n]{\ }$ ne doit PAS être UTILISÉE pour des nombres complexes qui ne sont pas des nombres réels positifs. Cela pourrait conduire à des erreurs comme celle-ci.

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\,\right)^2 = -1$$

Le fait que l'on a $\left(\sqrt{(-1)\cdot(-1)}\right)^2 = 1 = \left(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\right)^2$, montre que $\sqrt{(-1)\cdot(-1)}$ et $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ sont toutes deux des solutions de l'équation $z^2 = 1$, mais cela ne signifie pas qu'elles sont égales. Ici, elles sont opposées.

Résultat (démonstration en exercice grâce à de Moivre)

Soit z_0 un nombre complexe non nul. Alors z_0 possède n racines n-ième distinctes.

Du point de vue de l'informatique.

La plupart des logiciels ou calculatrices font le choix suivant pour l'argument.

1. Si la partie imaginaire de z_0 est positive ou nulle, alors $z_0 = re^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [0, \pi]$.
2. Si la partie imaginaire de z_0 est négative, alors $z_0 = re^{-i\varphi}$ avec $\varphi \in \,]0, \pi[$.

De cette façon lorsque l'on active la fonction ou la touche de la racine n-ième, ils livrent la solution z_0 avec le plus petit argument. Le lecteur profitera de l'occasion pour regarder comment sa calculatrice calcule la racine cubique de -1.

10.3 Résolution d'équations

10.3.1 Le théorème fondamental de l'algèbre

L'intérêt principal de l'ensemble des nombres complexes réside dans le théorème ci-dessous dont un cas particulier sera établi dans l'exercice sur la forme trigonométrique des racines n-ièmes.

Théorème

Tout polynôme $p(z)$ de degré $n \geqslant 1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet n racines (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$.

10.3.2 Résolution d'équations du premier degré

Il y a aucune différence par rapport aux résolutions d'équation du premier degré dans les nombres réels.

10.3.3 Résolution d'équations du deuxième degré

Une équation du deuxième degré est une équation en z et z^2 seulement. Il doit obligatoirement y avoir du z^2.

Exemples

1. Les racines carrées du nombre complexe z_0 sont les solutions de l'équation du deuxième degré $z^2 - z_0 = 0$.
2. L'équation $z^2 - iz = 0$ est du deuxième degré. Ses solutions sont 0 et i puisque $z^2 - iz = z(z - i) = 0$.

Formule de résolution

Les équations du deuxième degré peuvent s'écrire sous la forme

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{avec } a,\, b \text{ et } c \in \mathbb{C}$$

On trouve les solutions d'une telle équation de la même façon que pour les équations *réelles* du deuxième degré. Tout d'abord, on calcule le *discriminant*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On extrait ensuite ses racines carrées que l'on notera d_1 et d_2. On sait que $d_2 = -d_1$. Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - d_1}{2a}$$

On remarque que si $\Delta = 0$, alors $d_1 = d_2 = 0$. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution (double) qui est

$$z = -\frac{b}{2a}$$

10.3.4 Résolution d'équations du troisième degré

Pour résoudre les équations du troisième degré de manière générale, il faut passer par les nombres complexes.

Première étape

On transforme l'équation $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ avec $a \neq 0$ en équation de la forme

$$y^3 + py + q = 0$$

Pour cela, on pose $\boxed{z = y - \frac{b}{3a}}$ (remarquer que l'on peut diviser par a puisque $a \neq 0$).

En effet, lorsqu'on effectue la substitution, l'équation devient

$$\begin{aligned} az^3 + bz^2 + cz + d &= ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} + d - \frac{bc}{3a}\right) = 0 \\ &= a\left(y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right) y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

L'équation est donc bien équivalente à une équation de la forme

$$\boxed{y^3 + py + q = 0 \quad \text{avec} \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}}$$

Deuxième étape

On trouve une formule permettant de résoudre toutes les équations du troisième degré de la forme

$$y^3 + py + q = 0$$

Comme on sait déjà résoudre cette équation lorsque p ou q sont nuls, on va supposer par la suite, qu'ils ne sont pas nuls.

L'idée, très astucieuse, consiste à transformer cette équation en un système d'équations à deux inconnues. Pour cela, on utilise la substitution $\boxed{y = u + v}$ et on ajoute la condition $\boxed{3uv = -p}$ qui est là pour simplifier l'expression obtenue lorsqu'on remplace y par $u+v$. Ainsi, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\ 3uv = -p \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ 3uv = -p \end{array} \right.$$

En effet, en développant la première équation et en remplaçant p par $-3uv$, on trouve

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3u^2v - 3uv^2 + q = 0$$

On peut ensuite simplifier cette expression qui devient

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

La deuxième équivalence est obtenue en élevant la deuxième équation au cube. On est obligé de se conserver l'équation que l'on a élevé au cube, car dans les nombres complexes, la fonction $f(z) = z^3$ n'est pas bijective.

Cette idée nous a permis d'introduire deux nombres complexes u et v tels que leur cube satisfait

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad 3uv = -p$$

On constate ici, que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du deuxième degré suivante.

$$(x - u^3)(x - v^3) = x^2 - (u^3 + v^3)x + u^3 \cdot v^3 = x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

Afin d'avoir un discriminant qui soit plus facile à mémoriser, on modifie très légèrement cette équation en la divisant par 2.

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{q}{2}x - \frac{p^3}{2 \cdot 27} = 0$$

Le *discriminant* de cette équation est

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

En notant d pour une des deux racines carrées de Δ (rappelons que la deuxième racine carrée est $-d$), on arrive à exprimer u^3 et v^3 en fonction de p et de q en résolvant cette équation.

$$\boxed{u^3 = -\frac{q}{2} + d \quad \left(\text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - d\right) \quad \text{où } d \text{ est une racine carrée de } \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Pour trouver u, on extrait les trois racines cubiques de u^3, appelées u_1, u_2 et u_3. A chaque valeur de u va correspondre une unique valeur de v donnée par la relation

$$\boxed{3uv = -p}$$

On appellera respectivement v_1, v_2 et v_3 ces valeurs. Remarquons qu'on est obligé d'utiliser cette façon pour trouver les racines cubiques de v associées à u (car si elles étaient indépendantes, il aurait neuf combinaisons possibles pour $u + v$).

Les solutions y sont données par

$y_1 = u_1 + v_1$	$y_2 = u_2 + v_2$	$y_3 = u_3 + v_3$

On revient à z pour avoir les solutions de l'équation de départ.

$z_1 = u_1 + v_1 - \frac{b}{3a}$	$z_2 = u_2 + v_2 - \frac{b}{3a}$	$z_3 = u_3 + v_3 - \frac{b}{3a}$

10.4 D'autres valeurs exactes de cosinus et de sinus

Cette idée m'a été communiquée par Paul Jolissaint. On va calculer d'abord la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Ce qui nous permettra grâce aux formules trigonométriques suivantes, vraies pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, de trouver les valeurs exactes de $\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$$

1. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

   Posons $z_0 = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Ce z_0 satisfait l'équation $z^5 - 1 = 0$.

   Or, puisqu'on a la factorisation $z^5 - 1 = (z^4+z^3+z^2+z+1)(z-1)$ et que $z_0 \neq 1$, alors z_0 satisfait les équations équivalentes suivantes.

$$\begin{aligned} & z^4+z^3+z^2+z+1=0 \overset{:z^2}{\iff} z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ \iff & \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0 \overset{\text{astuce}}{\iff} \left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0 \\ \iff & \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0 \end{aligned}$$

   Or,

$$x_0 = z_0 + \frac{1}{z_0} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

   Ainsi, x_0 est un nombre réel qui satisfait les équations équivalentes suivantes.

$$x^2+x-1=0 \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

   Or, comme $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on sait que $x_0 > 0$ et donc que $x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

   en utilisant la formule qui permet de trouver le sinus à partir du cosinus.

2. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   On utilise une des formules citées en rappel pour obtenir l'expression suivante.

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{2\pi}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}}$$

   En repérant une identité remarquable, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

   en utilisant la formule qui permet de trouver le sinus à partir du cosinus.

10.5 Une projection stéréographique

Voici une projection stéréographique p de la sphère de Riemann, notée $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\}$ où $\mathcal{N}$ est le pôle nord, sur le plan de Gauss $\mathbb{C}$. Cette projection étant bijective, elle admet une fonction réciproque notée p^{-1}.

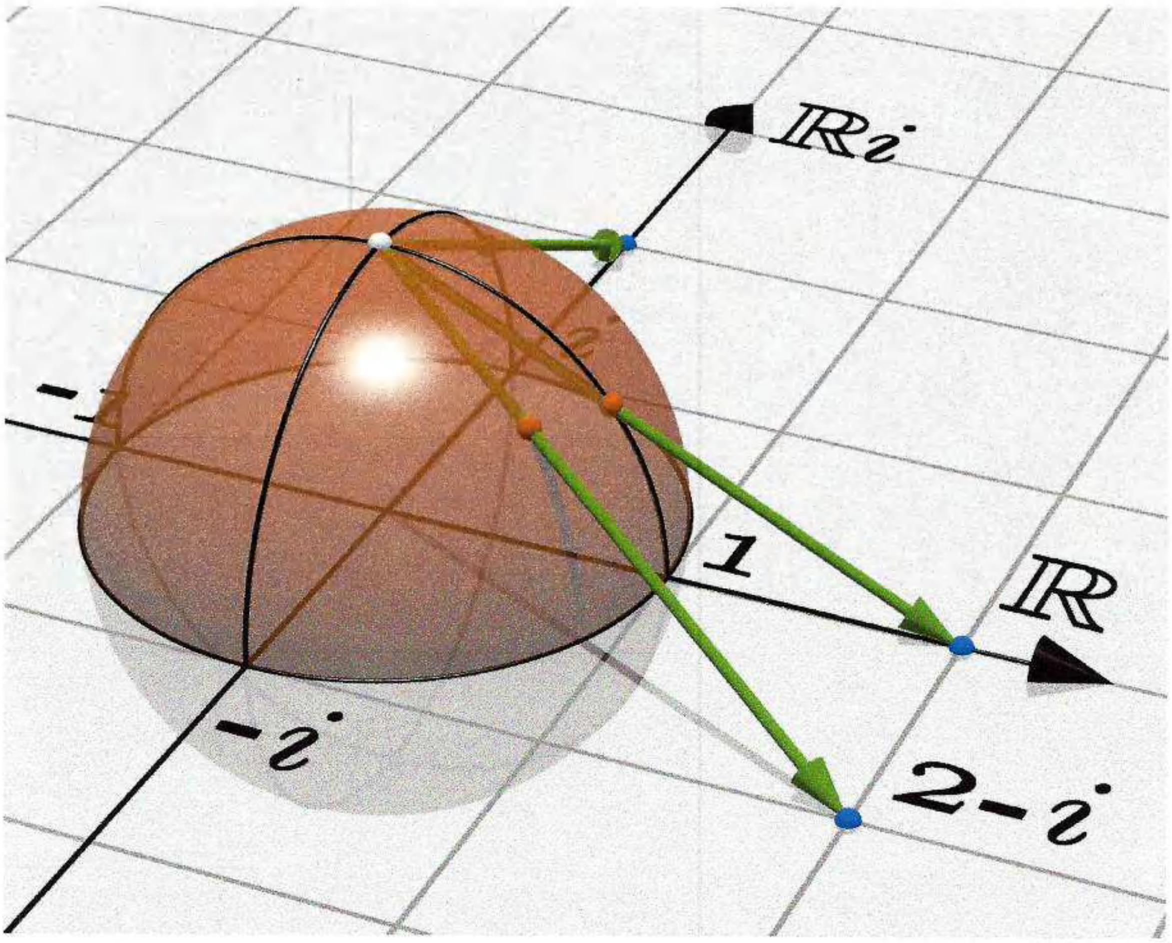
Les descriptions de ces deux applications sont

$$p: \begin{array}{rcl} \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\} & \to & \mathbb{C} \\ P(x;y;z) & \mapsto & \dfrac{x+yi}{1-z} \end{array} \quad \text{et} \quad p^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\} \\ a+bi & \mapsto & P\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}; \frac{2b}{a^2+b^2+1}; \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right) \end{array}$$

Cette projection stéréographique envoie l'hémisphère nord sur l'extérieur du cercle trigonométrique, l'hémisphère sud sur l'intérieur du cercle trigonométrique et l'équateur sur le cercle trigonométrique.

Cette projection stéréographique consiste a prendre la droite passant par le pôle nord $\mathcal{N}$ et un autre point de la sphère P. La projection de ce point est l'intersection entre cette droite et le plan de Gauss (calcul de géométrie spatiale).

Voici une représentation graphique où les points oranges sont sur la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\}$, le point blanc est le pôle nord $\mathcal{N}$ et les points bleus sont sur le plan de Gauss.



10.6 Les fonctions complexes

A partir de maintenant, la lettre D représente un domaine ou sous-ensemble de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Il est possible que le domaine D soit égal à l'ensemble des nombres complexes, on aurait ainsi $D = \mathbb{C}$.

10.6.1 Définition

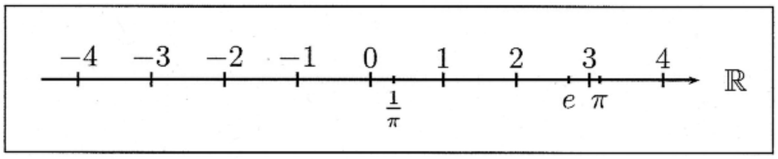
Une *fonction complexe* f est une fonction qui associe à un nombre complexe z (faisant partie d'un domaine D) un nombre complexe $f(z)$ (dépendant généralement de z).

Notation mathématique.

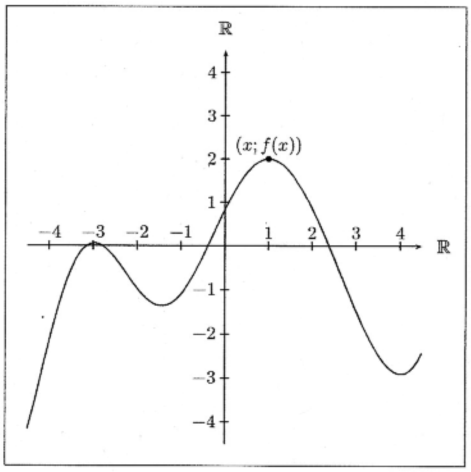
$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad f : D \to \mathbb{C}; z \mapsto f(z)$$

10.6.2 Représentation graphique

Contrairement aux fonctions réelles $f : D \to \mathbb{R}$ (où D est un domaine de $\mathbb{R}$), on ne peut pas dessiner de graphes pour les fonctions complexes.
Rappelons ce qui se passe pour les fonctions réelles. L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite, appelée la droite réelle, qui est un objet mathématique de dimension 1.

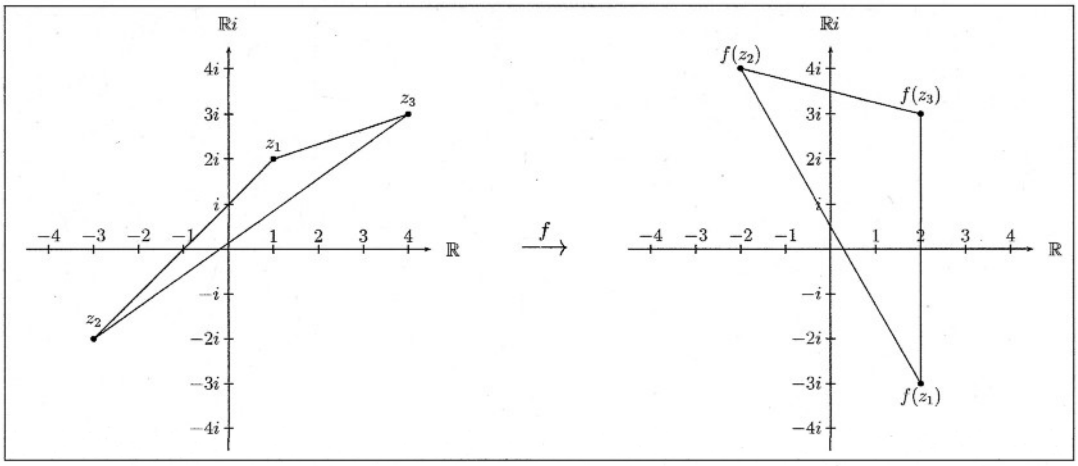


On représente le graphe d'une fonction réelle dans le plan, qui est un objet mathématique de dimension 2, de la manière suivante.



Ainsi, comme le plan de Gauss est un objet mathématique de dimension 2, si l'on tenait à représenter les fonctions complexes de la même manière, il faudrait travailler avec un objet mathématique de dimension 4 ! Ceci n'étant pas possible, on préfère faire autrement.

Pour décrire graphiquement une fonction complexe, on dessine deux plans complexes, l'un représentant le domaine D de départ et l'autre représentant l'ensemble d'arrivée qui est le plan de Gauss.



On peut aussi n'utiliser qu'un seul plan de Gauss, à condition de mettre des couleurs afin de distinguer les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction.

10.6.3 Isométries, similitudes et similitudes rétrogrades

Transformations simples

Grâce aux représentations graphiques vues ci-dessus, on peut voir une fonction complexe comme une transformation du plan de Gauss. Les transformations les plus simples sont

1. Les translations.
2. Les homothéties.
3. Les rotations.
4. Les symétries.

Définitions et résultats

Définitions

1. La composition d'un nombre fini de translations et de rotations est une *isométrie*.
2. La composition d'un nombre fini d'isométries ou d'homothéties est appelée *similitude directe* ou *similitude*.

   Deux figures, images l'une de l'autre par similitude, sont dites *semblables*.
3. La composition d'une similitude directe et d'une symétrie axiale est appelée *similitude rétrograde*.

Premiers résultats

1. Toute isométrie s'écrit $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = 1$.
2. Toute similitude s'écrit $f(z) = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
3. Toute similitude rétrograde s'écrit $f(z) = a\overline{z} + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Deuxièmes résultats

1. Une similitude directe ou rétrograde envoie une droite sur une droite et un cercle sur un cercle.
2. Une similitude directe conserve les angles (l'image par une similitude directe d'un angle droit est donc un angle droit) et envoie un triangle sur un triangle semblable (de même orientation).
3. Une similitude rétrograde inverse les angles (l'image par une similitude rétrograde d'un angle de $\frac{\pi}{6}$ est un angle de $-\frac{\pi}{6}$) et envoie un triangle sur un triangle presque semblable (dont l'orientation est inversée).

10.6.4 Points fixes

Définition

Soit f une fonction complexe. On dit que z_0 est un *point fixe de* f si $f(z_0) = z_0$.

10.6.5 Deux exercices avec leur corrigé

✠ Exercice 1

On considère la similitude rétrograde $f : z \mapsto f(z) = -2\,i\,\overline{z} + 1 + i$.
Décrire f, puis décrire l'image par f des sous-ensembles de $\mathbb{C}$ caractérisés par les conditions suivantes.

a) $|z| = 1$ b) $\frac{1}{2} < \mathrm{Im}(z) < 2$ c) $\mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Im}(z)^2$

✠ Exercice 2

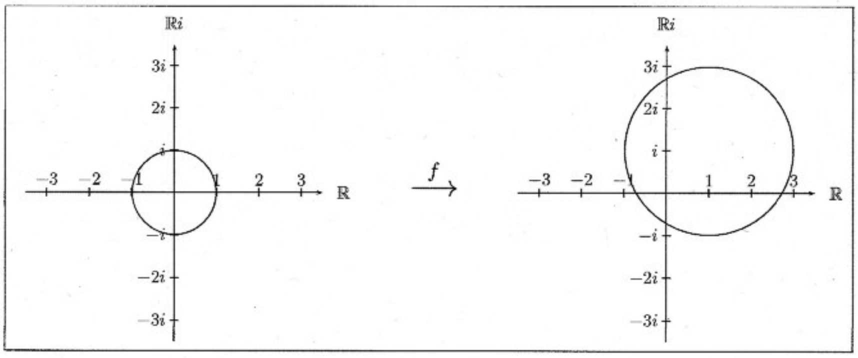
Soit $f : D \to \mathbb{C}; z \mapsto f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer le plus grand domaine de définition D possible.
2. Quelle est l'image de l'axe réel ?
3. Quelle est l'image de l'axe imaginaire ?
4. Quel est l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire ?
5. Quels sont les points fixes de f ?
6. Calculer $f \circ f$.

Correction de l'exercice 1

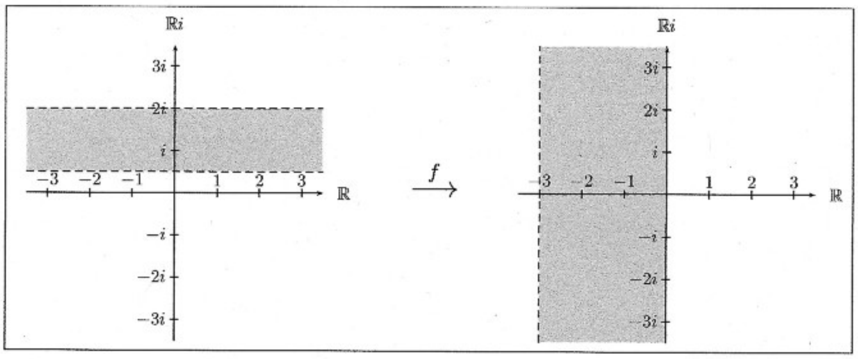
La similitude est une symétrie par rapport à l'axe réel, suivie d'une rotation de 90° autour de 0, puis d'une homothétie de facteur -2 et finalement d'une translation de $1+i$.

a) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ représente le cercle de rayon 1 centré en 0.



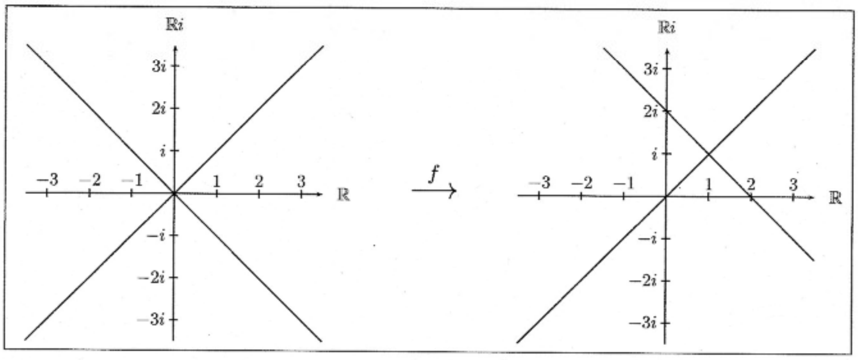
Son image par f est le cercle de rayon 2 centré en $1+i$, décrit par l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| = 2\}$.

b) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \mathrm{Im}(z) < 2\}$ représente une bande horizontale passant entre $\frac{1}{2}i$ et $2i$.



Son image par f est une bande verticale passant entre -3 et 0, décrit par l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : -3 < \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

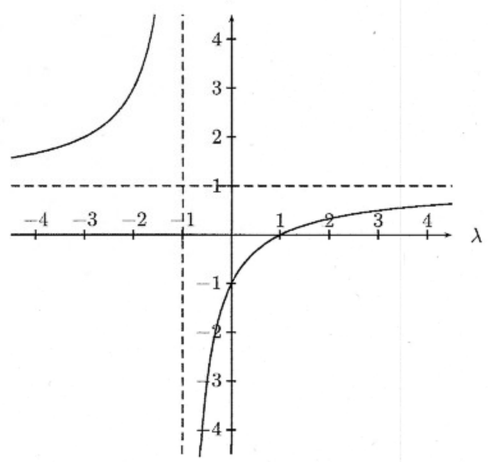
c) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Im}(z)^2\}$ représente les deux diagonales qui traversent le plan de Gauss.



Son image par f est encore deux diagonales, mais décalées de sorte que leur intersection se trouve au point $1+i$. L'ensemble correspondant est décrit comme ceci : $\{z \in \mathbb{C} : (\mathrm{Re}(z)-1)^2 = (\mathrm{Im}(z)-1)^2\}$.

Correction de l'exercice 2

1. Comme on ne peux pas diviser par 0, alors $D = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
2. L'axe réel est décrit par l'ensemble $\{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Retirons $\lambda = -1$ pour se retrouver dans le domaine de définition de f. Il faut donc examiner les valeurs possible de $f(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ces valeurs correspondent à l'image de l'application réelle $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}; \lambda \mapsto \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ dont le graphe est



On voit que tous les nombres réels différents de 1 sont dans l'image. Ainsi l'image de l'axe réel par f est $\{z \in \mathbb{R} : z \neq 1\} \subset \mathbb{C}$.

3. Calculons $f(\lambda i)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda i) &= \frac{\lambda i - 1}{\lambda i + 1} = \frac{-(1-\lambda i)}{1+\lambda i} \cdot \frac{1-\lambda i}{1-\lambda i} = \frac{-(1-\lambda i)^2}{1+\lambda^2} = \frac{-(1-2\lambda i+\lambda^2 i^2)}{1+\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda^2+2\lambda i-1}{\lambda^2+1} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} + \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} i \end{aligned}$$

On remarque que $|f(\lambda i)| = 1$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, on a

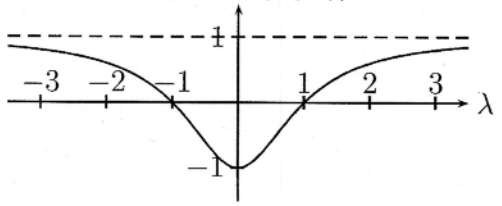
$$|f(\lambda i)| = \frac{(\lambda^2-1)^2+(2\lambda)^2}{(\lambda^2+1)^2} = \frac{\lambda^4-2\lambda^2+1+4\lambda^2}{\lambda^4+2\lambda^2+1} = 1$$

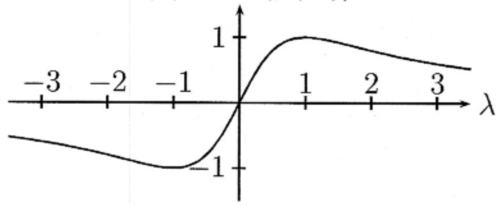
Ainsi, les nombres complexes $f(\lambda i)$ vivent dans le cercle de rayon 1 centré en 0. Mais cela ne permet pas de conclure que tous les points du cercle sont dans l'image.

Afin de déterminer quels points du cercle sont dans l'image de l'axe imaginaire, regardons les graphes des applications réelles.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \lambda \mapsto \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} \qquad\qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \lambda \mapsto \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}$$

$g(\lambda) = \mathrm{Re}(f(\lambda i))$ $\qquad\qquad$ $h(\lambda) = \mathrm{Im}(f(\lambda i))$





On a les valeurs suivantes.

λ	$\to -\infty$		-1		0		1		$\to +\infty$
$f(\lambda i)$	$\to 1$		$-i$		-1		i		$\to 1$

Puisqu'on sait que $f(\lambda i)$ est sur le cercle trigonométrique et que les fonctions g et h sont continues, l'image par f de l'axe imaginaire est exactement le cercle trigonométrique complexe sans le point 1. Autrement dit :

$$f(\mathbb{R}i) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ et } z \neq 1\}$$

4. Commençons par calculer $f(x+iy)$, on a

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x+iy-1)(x-iy+1)}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2-ixy+x+ixy+y^2+iy-x+iy-1}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i \end{aligned}$$

On cherche les nombres complexes $z = x+iy$ tels que la partie réelle de $f(z)$ soit nulle, en d'autres termes, on veut que

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

On a donc l'équation $x^2+y^2 = 1$, cela signifie que les nombres complexes recherchés sont tous de module 1. Ainsi, l'ensemble des z tels que $f(z)$ soit purement imaginaire est le cercle de rayon 1 centré en 0 moins le point -1 qui n'est pas dans le domaine de définition. En termes ensemblistes : $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ et } z \neq -1\}$.

5. On cherche à résoudre l'équation $f(z) = z$ que l'on peut écrire

$$\frac{z-1}{z+1} = z$$

En multipliant par $z+1$ de chaque côté de l'équation, on obtient

$$z - 1 = z^2 + z$$

En simplifiant par z, on a $z^2 = -1$. Les solutions de cette équation sont i et $-i$. Ce sont les points fixes de f.

6. À calculer : $(f \circ f)(z) = f(f(z))$.
On a

$$f(f(z)) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1} = \frac{\frac{z-1}{z+1}-1}{\frac{z-1}{z+1}+1} = \frac{\frac{z-1-(z+1)}{z+1}}{\frac{z-1+(z+1)}{z+1}} = \frac{-2}{2z} = -\frac{1}{z}$$