

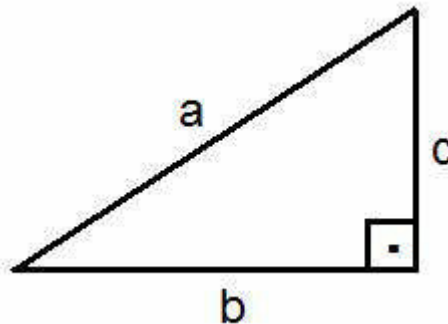
## **Découverte des nombres rationnels**

Depuis longtemps, les hommes connaissaient et utilisaient les nombres entiers naturels, les nombres décimaux, les nombres rationnels (les fractions) et les nombres négatifs.

Pythagore et ses disciples ont alors découverts une nouvelle catégorie de nombres. Il s'agit des nombres irrationnels.

Pythagore avait démontré le théorème qui porte son nom: dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Les nombres irrationnels ont été mis à jour grâce à ce théorème.

Si l'on choisit le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit valent tous deux 1, c'est-à-dire  $b=1$  et  $c=1$ , en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient  $a^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ . Ainsi on trouve  $a = \sqrt{2}$ .

$\sqrt{2}$  est-il un nombre rationnel, autrement dit une fraction ?

Supposons que  $\sqrt{2}$  soit une fraction de la forme  $\frac{x}{y}$  et que cette fraction soit écrite sous forme irréductible.

On doit avoir:  $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$ , c'est-à-dire  $(\frac{x}{y})^2 = 2$ , ou encore  $\frac{x^2}{y^2} = 2$ , ce que l'on peut écrire  $x^2 = 2y^2$ .

Ainsi  $x^2$  est un nombre pair. Si  $x$  était impair, on aurait  $x=2n+1$  et, donc,  $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$  qui est impair. Ainsi  $x$  est pair et on peut alors écrire  $x=2u$ .

La relation  $x^2 = 2y^2$  devient alors  $(2u)^2 = 2y^2$ , c'est-à-dire  $4u^2 = 2y^2$ , ou encore  $2u^2 = y^2$ .

Ainsi  $y^2$  est un nombre pair et on conclut de la manière que pour  $x$  que  $y$  est pair. On peut donc écrire  $y=2v$ .

Ainsi notre fraction irréductible  $\frac{x}{y}$  s'écrit  $\frac{2u}{2v}$  qui n'est clairement pas irréductible. On obtient donc une contradiction.

Notre hypothèse de départ, à savoir que  $\sqrt{2}$  est une fraction irréductible de la forme  $\frac{x}{y}$ , est fausse.

On en conclut donc que  $\sqrt{2}$  n'est pas une fraction, donc pas un nombre rationnel.

Ce nombre fait alors partie des nombres irrationnel (puisque pas rationnel).

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels, l'ensemble de tous les nombres que l'on connaît, est appelé l'ensemble des nombres réels.