Chapitre 13

Notions de limite

13.1 Le nombre d'Euler

On examine ce que rapporte plusieurs placements de 1 CHF à des rendements différents.

1. Le premier placement est à 100% sur une période d'une année.
2. Le deuxième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{2}\%$ sur une période de 6 mois.
3. Le troisième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{3}\%$ sur une période de 4 mois.
4. Le quatrième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{4}\%$ sur une période de 3 mois.

...

n. Le n-ième placement est à un taux périodique de $\frac{100}{n}\%$ sur une période de $\frac{1}{n}$ année.

...

Notons c_n (avec minuscule) le capital récupéré, pour le n-ième placement, après une année. En capitalisant (voir page 32) en utilisant le taux périodique, on trouve la formule suivante

$$c_n = \left(1 + \tfrac{100}{n}\%\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Voici un tableau présentant quelques valeurs de c_n.

n	1	2	3	4	5	10	25
c_n	2.000	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.666
n	50	100	500	1000	2000	4000	8000
c_n	2.692	2.705	2.716	2.717	2.718	2.718	2.718

On remarque que lorsque n devient grand, le nombre c_n a tendance à se rapprocher d'un certain nombre. Le premier à avoir pressenti l'existence de ce nombre mystérieux est l'Écossais John Napier (1550-1617), qui inventa les logarithmes (d'où le logarithme népérien après que son nom soit francisé en Néper). Malgré cela, ce nombre est appelé *nombre d'Euler*, d'après un mathématicien suisse du 18e siècle : Leonhard Euler (1707-1783). Le nombre d'Euler est défini par la limite

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828}$$

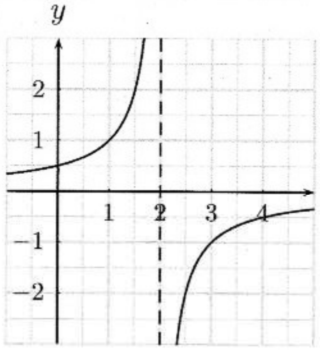
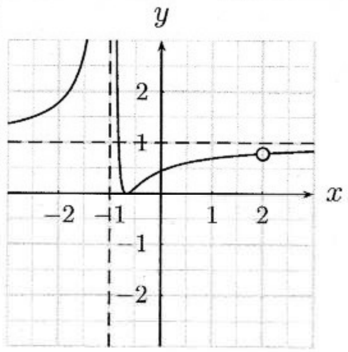
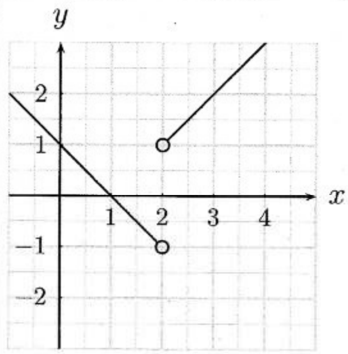
Le nombre e est irrationnel. Cela signifie qu'il ne peut pas s'écrire comme une fraction et qu'il n'y a aucune période dans son écriture décimale. Les premières décimales du nombre e sont 2.7182818284590452. En novembre 1999, le mathématicien Xavier Gourdon a établi un record (pour l'époque) en calculant ses 1'250'000'000 premières décimales.

13.2 Les limites

13.2.1 Définition intuitive des limites

La *limite* est un outil permettant de savoir comment une fonction se comporte "au bord" de son domaine de définition (ou dans son domaine de définition).

Voici plusieurs fonctions ayant toutes des comportements différents.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2-x}$	$f_2(x) = \dfrac{9x^3 - 6x^2 - 20x - 8}{9x^3 - 27x - 18}$	$f_3(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\lvert x-2 \rvert}$
		

Comportement à l'infini

On peut regarder comment $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ se comportent lorsque x devient très grand (positivement ou négativement). Par exemple, on voit que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_1(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f_3(x) = +\infty$$

Comportement local

Les domaines de définition de ces fonctions sont

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \qquad D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Ainsi, on ne peut pas parler de $f_1(2)$, de $f_2(-1)$, de $f_2(2)$, ni de $f_3(2)$. On peut par contre indiquer comment ces fonctions se comportent autour de ces nombres qui ne sont pas dans les domaines de définition à l'aide des limites. Les graphes permettent de voir que :

$$\lim_{x \to 2} f_1(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to -1} f_2(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} f_2(x) = \tfrac{64}{81} \qquad \lim_{x \to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

Mais attention, lorsqu'on dit que x tend vers un nombre a et que l'on note $x \to a$, il faut penser que x s'approche de plus en plus de a par la gauche ou/et par la droite. Ainsi :

$$\lim_{x \to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

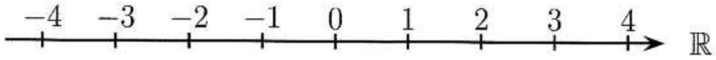
Par contre, on peut regarder les limites à gauche (lorsque x tend vers le nombre a par la gauche, c'est-à-dire en étant toujours plus petit) ou à droite (lorsque x tend vers a par la droite en étant toujours plus grand que a). Ces limites existent[1] et sont les suivantes :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f_3(x) = -1 \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f_3(x) = 1$$

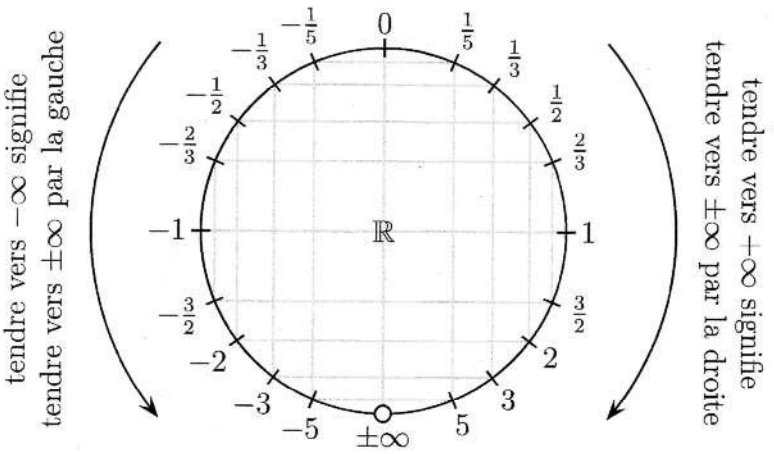
1. Il existe des fonctions pas très sympathiques pour lesquelles aucune limite à gauche ou à droite n'existe ! Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

13.2.2 La droite réelle vue par Alexandrov

Un mathématicien appelé Alexandrov avait la vision suivante des nombres réels[2]. Plutôt que de s'imaginer la droite réelle présentée en première année,



Alexandrov a pensé à plier[3] la droite réelle et à y 'ajouter' un point, noté $\pm\infty$, afin de pouvoir représenter les nombres réels sur un cercle dont un point est $\pm\infty$.



C'est ainsi que l'on peut se permettre de noter $\pm\infty$ quand on n'est pas sûr du signe. C'était le cas pour trois des limites de la page précédente qui peuvent maintenant s'écrire comme suit :

$$\lim_{x\to 2} f_1(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1} f_2(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f_3(x) = \pm\infty$$

13.2.3 Lien entre les limites et les limites à gauche et à droite

On peut démontrer le résultat suivant.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\overset{<}{\to} a} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to} a} f(x) \left(= \lim_{x\to a} f(x)\right)}$$

Cela signifie que si une des limites à gauche et à droite n'existe pas ou qu'elles ne sont pas égales, alors la limite n'existe pas (c'est la contraposée de l'implication ci-dessus).

Réciproquement

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\overset{<}{\to} a} f(x) \ \text{ et } \ \lim_{x\overset{>}{\to} a} f(x) \text{ existent et valent toutes les deux le même nombre } b \\[2ex] \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ (et donc existe)} \end{array}}$$

Cela signifie que si la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a n'existe pas, alors une des limites à gauche et à droite n'existe pas ou elles ne sont pas égales.

---

2. En topologie générale, on parle du compactifié d'Alexandrov. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle du cercle à travers une projection stéréographique.

3. la sphère de Riemann suit le même principe pour représenter le plan $\mathbb{R}^2$ (ou les nombres complexes $\mathbb{C}$). Elle est aussi décrite à travers une projection stéréographique.

13.2.4 Calculs de limites et types de limites

Les limites permettent de donner une information sur le comportement de la fonction, et par conséquent sur son graphe. De plus, dans la plupart des cas, il est plus simple de calculer directement les limites que de faire le graphe de la fonction afin de les visualiser.

La façon de calculer une limite dépend du *type de la limite*. C'est la valeur brute que l'on obtient en remplaçant la variable par la valeur vers laquelle tend cette variable : le type d'une limite n'est pas toujours un nombre et il sera noté entre parenthèses.

Quelques types de limites que l'on peut rencontrer :

Pour l'instant, on va se restreindre aux fonctions f qui sont rationnelles (c'est-à-dire $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes), tout simplement parce qu'on n'a pas encore établi la règle de l'Hospital (voir page 210).

Les exemples qui suivent concernent les fonctions rationnelles f_1, f_2 et f_3 définies en page 170 et ne fournissent pas une liste exhaustive des types de limites que l'on va étudier durant cette deuxième année.

1. Les limites du type $(\frac{b}{c})$ avec $b, c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x \to a} f(x) \overset{(\frac{b}{c})}{=} \frac{b}{c}$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b et le dénominateur s'approche de c, donc $f(x)$ s'approche de $\frac{b}{c}$ (cette fraction donne un nombre car $b, c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$).

   Par exemple :

   (a) $$\lim_{x \to 3} f_1(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{-1})}{=} \frac{1}{-1} = -1.$$

   (b) $$\lim_{x \to 1} f_2(x) = \lim_{x \to 1} \frac{9x^3 - 6x^2 - 20x - 8}{9x^3 - 27x - 18} \overset{(\frac{-25}{-36})}{=} \frac{-25}{-36} = \frac{25}{36} \cong 0.6944.$$

2. Les limites du type $(\frac{b}{0})$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $b \neq 0$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x \to a} f(x) \overset{(\frac{b}{0})}{=} \pm\infty$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b, qui est non nul, et le dénominateur s'approche de 0. Or, si on divise un nombre non nul par un nombre qui devient de plus en plus petit (proche de zéro), on obtient un nombre de plus en plus grand. Donc $f(x)$ s'approche de $\pm\infty$ lorsque x tend vers a.

   Par exemple :

   (a) $$\lim_{x \to 2} f_1(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{0})}{=} \pm\infty.$$

   (b) $$\lim_{x \to -1} f_2(x) = \lim_{x \to -1} \frac{9x^3 - 6x^2 - 20x - 8}{9x^3 - 27x - 18} \overset{(\frac{-3}{0})}{=} \pm\infty.$$

   Remarquons que pour établir les limites à droite et à gauche dans ce cas, il suffit de faire un tableau de signes des fonctions f_1 et f_2.

3. Les limites du type $(\frac{b}{\pm\infty})$ avec $b \in \mathbb{R}$.

   Dans ce cas la limite vaut : $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\frac{b}{\pm\infty})}{=} 0$.

   En effet, lorsque x s'approche de a, le numérateur s'approche de b et le dénominateur s'approche de $\pm\infty$. Or, si on divise un nombre par un nombre qui devient de plus en plus grand (négativement ou positivement), on obtient un nombre de plus en plus petit (proche de zéro). Donc $f(x)$ s'approche de 0 lorsque x tend vers a.

   Par exemple :

   (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{2-x} \overset{(\frac{1}{\pm\infty})}{=} 0.$

4. Les limites du type $(\frac{0}{0})$.

   Dans ce cas, on ne peut rien dire immédiatement : C'est la pire situation possible !

   Pour une fonction rationnelle, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur (puisqu'on sait depuis la première année que si un polynôme s'annule en a alors il se factorise par Horner par $x - a$). Cela permet de se ramener à un autre type de limite et de pouvoir conclure le calcul.

   Par exemple :

   (a)
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f_2(x) &= \lim_{x\to 2} \frac{9x^3-6x^2-20x-8}{9x^3-27x-18} \underset{\text{Horner}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{(9x^2+12x+4)(x-2)}{(9x^2+18x+9)(x-2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{9x^2+12x+4}{9x^2+18x+9} \overset{(\frac{64}{81})}{=} \frac{64}{81}\end{aligned}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-2|} \underset{\text{Horner}}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{|x-2|}$

   Ici, à cause de la valeur absolue, il faut examiner la limite à gauche et la limite à droite. Pour cela, on utilise la simplification suivante :

   $$\frac{(x-1)(x-2)}{|x-2|} = \begin{cases} -(x-1) & \text{si} \quad x < 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

   On peut donc calculer les limites à gauche et à droite et affirmer que la limite n'existe pas.

   $$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f_3(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 2} f_3(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 2} f_3(x) \text{ n'existe pas}$$

5. Les limites du type $(\frac{\pm\infty}{\pm\infty})$.

   Pour les fonctions rationnelles, ces types de limites seront étudiés dans la section sur les comportements à l'infini

13.3 Propriétés des limites

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a, a et λ deux nombres réels. Le lecteur pourra aussi remplacer a par $+\infty$ ou par $-\infty$ dans les écritures ci-dessous.

Addition et soustraction de fonctions

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(f(x)\pm g(x)\Big)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)}$$

Multiplication d'une fonction par un nombre

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(\lambda f(x)\Big)=\lambda\cdot\lim_{x\to a}f(x)}$$

Multiplication de deux fonctions

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)}$$

Division d'une fonction par une autre

Si toutes les limites ci-dessous existent, alors on a la propriété suivante.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\qquad \text{si } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0 \text{ et si } g(x)\neq 0 \text{ pour } x \text{ proche de } a}$$

Remarque pour la composition de fonction

Même si les limites existent et que les fonctions peuvent être composées, IL N'Y A PAS DE PROPRIÉTÉ DES LIMITES POUR LA COMPOSITION DE FONCTIONS. En effet, il existe des exemples qui montrent que

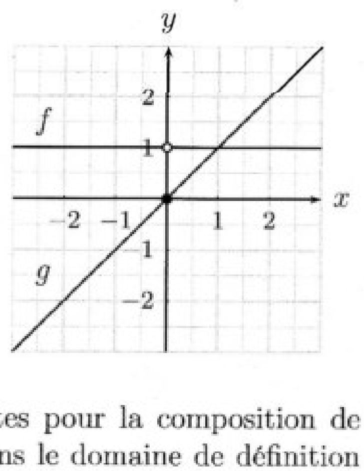
$$\lim_{x\to a}f\big(g(x)\big)\neq f\Big(\lim_{x\to a}g(x)\Big)$$

La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

et la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto x$ donnent un tel exemple car

$$1=\boxed{\lim_{x\to 0}f(g(x))\neq f\Big(\lim_{x\to 0}g(x)\Big)}=f(0)=0$$

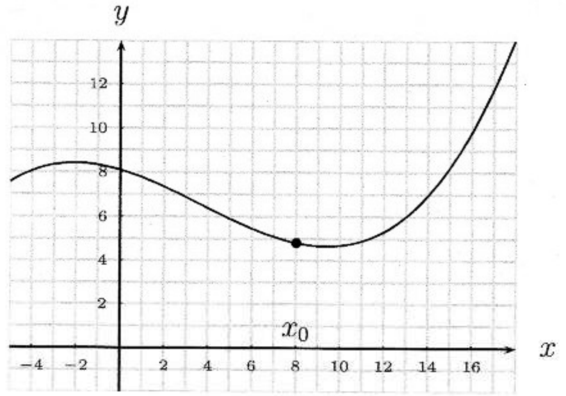


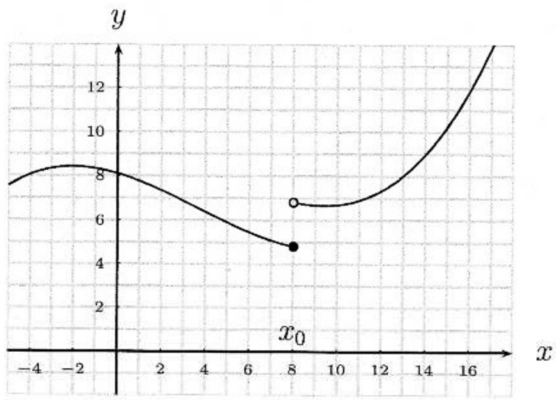
Il y a néanmoins un moyen d'avoir une propriété des limites pour la composition de fonctions si les fonctions sont continues et si a est choisi dans le domaine de définition des fonctions dont on calcule la limite. La continuité est définie dans la section suivante.

13.4 Continuité d'une fonction

Intuitivement, on dit qu'une fonction réelle est continue si on peut dessiner son graphe (au dessus de son domaine de définition) sans lever le crayon. Mais on peut définir formellement la continuité[4] grâce aux limites.

Voici tout d'abord le graphe d'une fonction continue et le graphe d'une fonction non continue.





On voit que sur le graphe de gauche la fonction est continue, tandis qu'elle ne l'est pas sur le graphe de droite. En effet, en $x_0 = 8$, la fonction effectue un saut.

La limite est une notion permettant de vérifier si une fonction saute ou non en un point.

Définitions

1. On dit que *la fonction f est continue en $x_0 \in D$* lorsque

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f\big(\lim_{x \to x_0} x\big)} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

2. On dit que *la fonction f est continue à gauche de $x_0 \in D$* lorsque

$$\boxed{\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f\big(\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} x\big)} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{h \overset{<}{\to} 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

3. On dit que *la fonction f est continue à droite de $x_0 \in D$* lorsque

$$\boxed{\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f\big(\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} x\big)} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{h \overset{>}{\to} 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

On voit ci-dessus que la fonction de gauche est continue (à gauche et à droite) en $x_0 = 8$. La fonction de droite, quant à elle, est continue à gauche, mais pas à droite.

Définition

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est *continue* lorsqu'elle est continue en tout point de son domaine de définition D.

---

4. La définition qui suit est en fait la définition de la continuité séquentielle. Mais, dans les espaces métriques (l'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace métrique), cette définition est équivalente à celle en ε-δ (bien plus complexe à comprendre) que l'on peut trouver dans certains livres.

13.5 Comportement asymptotique des fonctions continues (par morceaux)

13.5.1 Comportement local

1. Lorsqu'on étudie le comportement local d'une fonction continue, seul le bord du domaine de définition est important !
2. Lorsqu'on étudie le comportement local d'une fonction définie par morceaux, continue sur chaque morceau, seule la réunion des bords des domaines de définition de chaque morceau est importante !

Définitions : les asymptotes verticales, les trous et les sauts

On considère une fonction réelle $f : D \to A$ (avec D, $A \subset \mathbb{R}$).

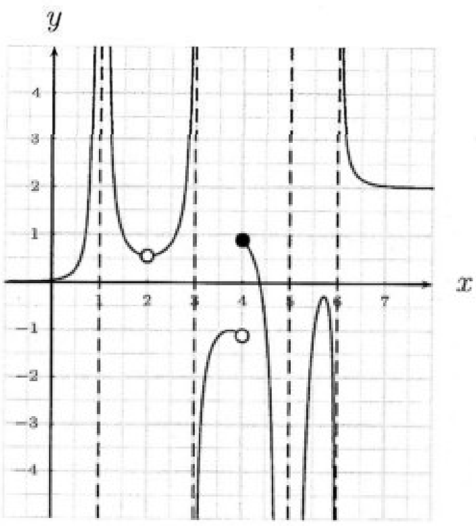
On suppose que la fonction f n'est pas continue en x_0 (x_0 n'est pas forcément dans D).

1. On dit que f a une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$ si
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \pm\infty$$
2. On dit que f a un *trou* en $(x_0; a)$ si $x_0 \notin D$ et s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$
3. On dit que f a un *saut* en x_0 dans tous les autres cas.

Illustration

Voici le graphe d'une fonction qui n'est pas continue sur son domaine de définition ($D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, 5, 6\}$), mais qui est continue sur chacun de ses deux morceaux. Elle est définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1,2,3,5,6\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} \frac{20(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-5)^2(x-6)} & \text{si } x < 4 \\ \frac{20(x-2)}{(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-5)^2(x-6)} + 2 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$



Dans cette illustration, on voit quatre asymptotes verticales (qui ont toute un comportement différent) dont les équations sont $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ et $x = 6$.

On a aussi un trou en $(2; \frac{5}{9})$, puisque les limites à gauche et à droite existent et valent les deux $\frac{5}{9}$.

On remarque encore un saut en $x = 4$, puisque la limite à gauche n'est pas égale à $f(4)$. La fonction n'est donc pas continue en $x = 4$.

13.5.2 Comportement à l'infini des fonctions rationnelles

Constatations

Lorsque x devient très grand (négativement ou positivement), autrement dit lorsque $x \to \pm\infty$. Alors :

$$\begin{array}{rl} x & \text{devient négligeable par rapport à} \quad x^2,\, x^3,\, \ldots \\ x^2 & \text{devient négligeable par rapport à} \quad x^3,\, x^4,\, \ldots \\ x^3 & \text{devient négligeable par rapport à} \quad x^4,\, x^5,\, \ldots \\ & \text{etc.}\ldots \end{array}$$

Par conséquent

On peut donc calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^3 \overbrace{+15x^2-103}^{\text{devient négligeable par rapport à } 12x^3}}{3x^4 \underbrace{-21x^2+55}_{\text{devient négligeable par rapport à } 3x^4}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x^3}{3x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^4+16x^3-2}{2x^4+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^4}{2x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

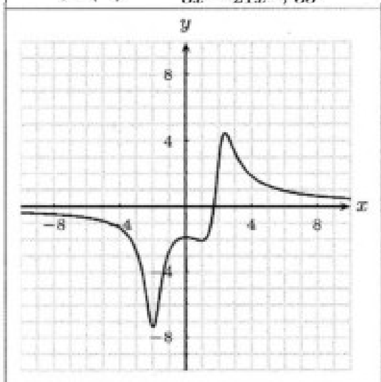
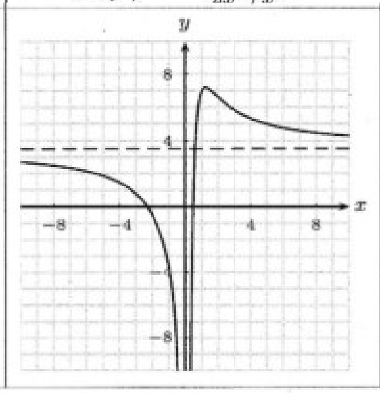
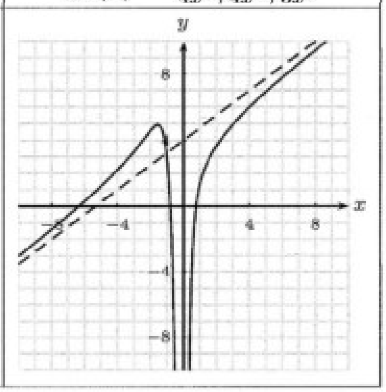
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5+19x^4-7}{4x^4+4x^3+3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^5}{4x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{4} = \pm\infty$$

En résumé

On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

Voici les graphes de ces trois fonctions où l'on découvre les trois types de comportement qui vont nous intéresser.

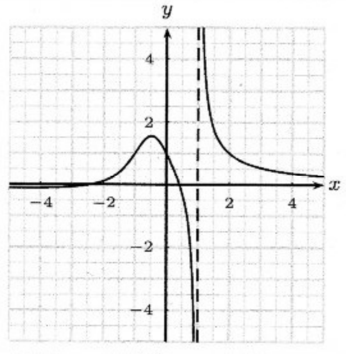
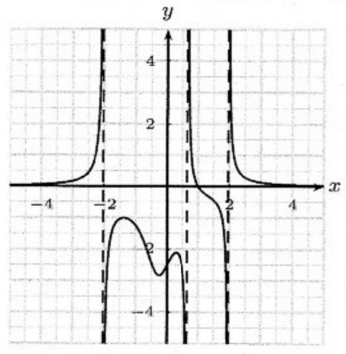
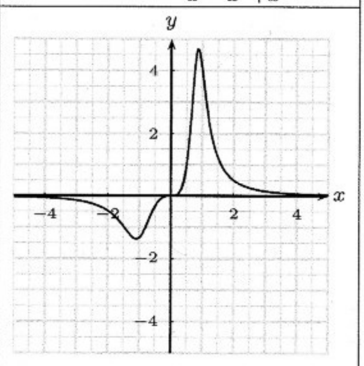
$f_1(x) = \frac{12x^3+15x^2-103}{3x^4-21x^2+55}$	$f_2(x) = \frac{7x^4+16x^3-2}{2x^4+x^2}$	$f_3(x) = \frac{3x^5+19x^4-7}{4x^4+4x^3+3x^2}$
		

On a donc trois possibilités pour une fonction rationnelle.

1. **Le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur.**
   C'est le cas pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-1} \qquad f_2(x) = \frac{x^3+4x-5}{2x^5-8x^3+2} \qquad f_3(x) = \frac{4x^4}{x^7-x^2+x}$$

   Pour toutes ces fonctions, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x) = 0$. Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se rapproche de 0. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^3-1}$	$f_2(x) = \frac{x^3+4x-5}{2x^5-8x^3+2}$	$f_3(x) = \frac{4x^4}{x^7-x^2+x}$
		

2. **Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur.**
   C'est le cas pour les fonctions suivantes

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{7x^3+4x^2-3}{3x^3-5x^2+3x} \qquad f_3(x) = \frac{-5x^7+x^4-1}{2x^7+x^2-2x}$$

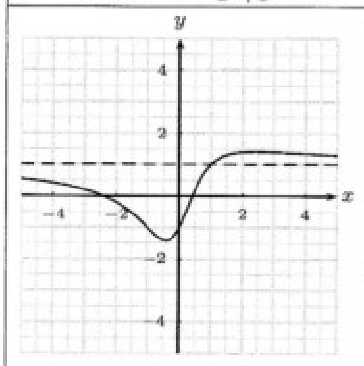
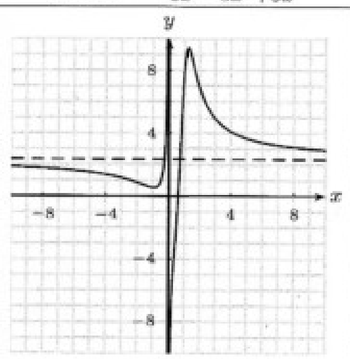
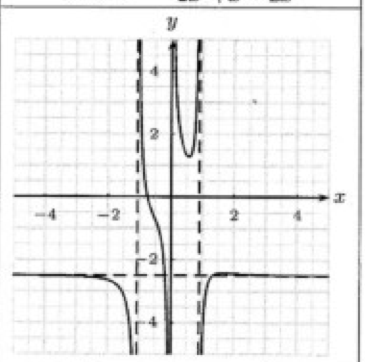
   On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \frac{7}{3} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = -\frac{5}{2}$$

   Pour toutes ces fonctions, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_i(x) = \text{nombre non nul}$$

   Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se rapproche d'un nombre h non nul. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = h$.

$f_1(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$	$f_2(x) = \frac{7x^3+4x^2-3}{3x^3-5x^2+3x}$	$f_3(x) = \frac{-5x^7+x^4-1}{2x^7+x^2-2x}$
		

3. **Le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur.**

   (a) **Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur plus 1.**

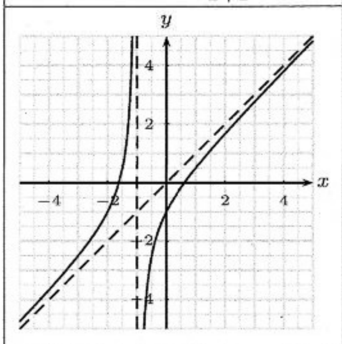
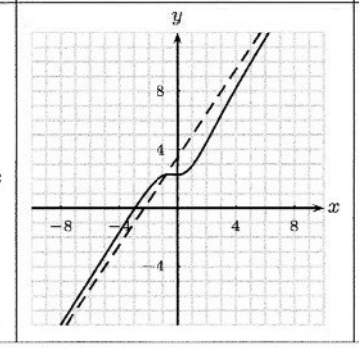
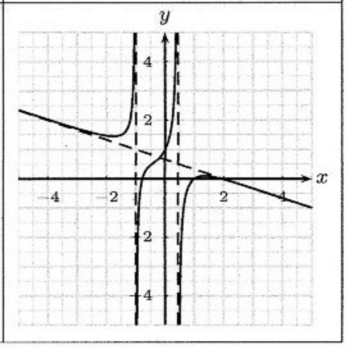
   C'est le cas pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1} \qquad f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} \qquad f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1}$$

On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{2} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{3}$$

Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se comporte comme une droite. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + h$. C'est une droite de pente m et de hauteur h.

$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$	$f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7}$	$f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1}$
		

Dans ce cas, on peut écrire la fonction différemment en faisant une division euclidienne.

La division euclidienne de $x^2 + x - 1$ par $x + 1$ donne :

$$x^2 + x - 1 = (x+1)x - 1$$

En divisant cette expression par $(x+1)$, cela permet d'écrire $f_1(x)$ autrement :

$$f_1(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1} = \overbrace{x}^{\text{asymptote oblique}} - \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

Ainsi, lorsque $x \to \pm\infty$, $f_1(x)$ s'approche de son asymptote oblique $y = x$.

Pour f_2, on trouve par division euclidienne que :

$$f_2(x) = \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} = \overbrace{\tfrac{3}{2}x + \tfrac{7}{2}}^{\text{asymptote oblique}} - \underbrace{\frac{21x+17}{2(2x^2+7)}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

Pour f_3, on trouve par division euclidienne que :

$$f_3(x) = \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} = \overbrace{-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}^{\text{asymptote oblique}} + \underbrace{\frac{2x^2-5x-1}{3(3x^4+2x-1)}}_{\text{tend vers 0 lorsque } x\to\pm\infty}$$

On peut aussi trouver l'asymptote oblique avec une méthode plus générale, en utilisant les formules suivantes pour trouver la pente m et la hauteur h de l'asymptote oblique ($y = mx + h$).

$$\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Pour f_1, on trouve l'asymptote $y = x$ en effectuant le calcul suivant :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2+x} = 1$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_1(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} - x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-1-x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x+1} = 0
\end{aligned}$$

Pour f_2, on trouve l'asymptote $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ en effectuant le calcul suivant :

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+7x^2+16}{2x^3+7x} = \frac{3}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_2(x) - \tfrac{3}{2}x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} - \tfrac{3}{2}x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3+7x^2+16}{2x^2+7} - \frac{\frac{3}{2}x(2x^2+7)}{2x^2+7}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+7x^2+16-\frac{3}{2}x(2x^2+7)}{2x^2+7} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^2-\frac{21}{2}x+16}{2x^2+7} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Pour f_3, on trouve l'asymptote $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ en effectuant le calcul suivant :

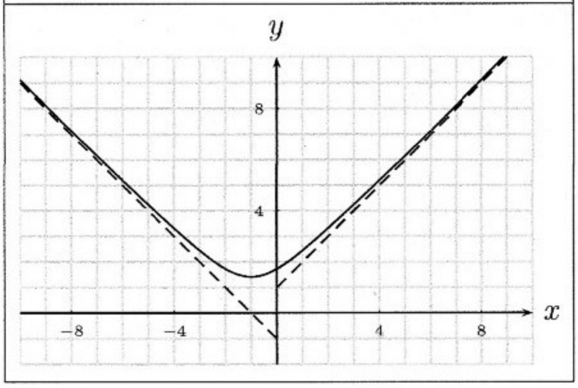
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^5+2x^4-1}{3x^5+2x^2-x} = -\frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned}
h &= \lim_{x\to\pm\infty} (f_3(x) + \tfrac{1}{3}x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} + \tfrac{1}{3}x\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^5+2x^4-1}{3x^4+2x-1} + \frac{\frac{1}{3}x(3x^4+2x-1)}{3x^4+2x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^5+2x^4-1+\frac{1}{3}x(3x^4+2x-1)}{3x^4+2x-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x-1}{3x^4+2x-1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

L'avantage de ces deux formules est qu'elles s'appliquent aussi lorsque la fonction n'est pas rationnelle. Par exemple, pour la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$



Pour trouver les asymptotes obliques de cette fonction, il faut utiliser les formules

$$\boxed{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

et

$$\boxed{h = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Cette fonction admet une asymptote oblique à gauche d'équation $y = -x - 1$ et une asymptote oblique à droite d'équation $y = x + 1$.

(b) **Le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur plus 1.** Dans ce cas, il n'y a pas d'asymptote oblique. Néanmoins, il y a une asymptote polynomiale de degré $\geqslant 2$ (en fait le degré est égal au degré du numérateur moins celui du dénominateur). Par curiosité, examinons le comportement de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^3(x-3)}{2(x-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{2x^2 - 4x + 2}$$

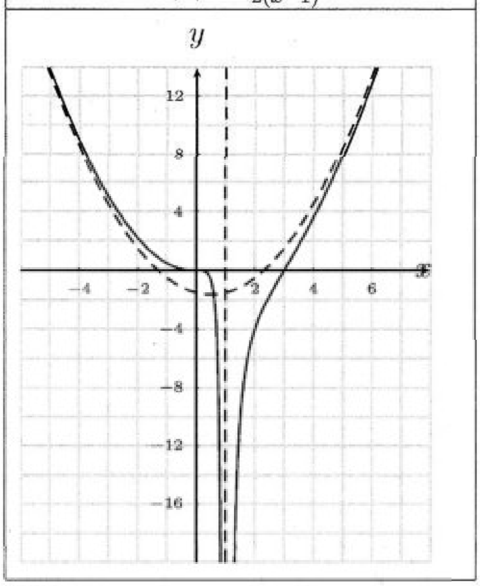
Pour cette fonction, on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

Cela signifie que lorsque x devient très grand, la fonction se comporte comme une parabole. En termes techniques, on dit que la fonction admet une asymptote parabolique d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Cette fonction admet l'asymptote parabolique $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

$f(x) = \frac{x^3(x-3)}{2(x-1)^2}$



Pour trouver l'asymptote parabolique de cette fonction, il faut utiliser les formules (ces formules sont données à titre culturel, il n'y a pas besoin de les connaître)

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}$$

et

$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax^2 + bx)\big)$$

On aurait aussi pu effectuer une division euclidienne.

13.5.3 Comportement à l'infini des fonctions non rationnelles

La plupart du temps, il faudra séparer l'étude du comportement à l'infini en deux.

1. Cas où $x \to -\infty$ (à n'effectuer que si $-\infty$ est dans le bord du domaine de définition).

   Il y a principalement deux cas à distinguer.

   (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$
   Alors, il y a une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = a$.

   (b) Si
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$
   Alors il *est possible qu'il y ait une asymptote oblique à gauche*, mais ce n'est pas forcément le cas. Il faut alors utiliser les formules suivantes pour décider s'il y a une asymptote oblique à gauche d'équation $y = mx + h$.
   $$\boxed{m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$
   En effet, si la fonction n'est pas rationnelle, alors on ne peut pas effectuer de division euclidienne et on est donc obligé d'utiliser ces formules.

   Dans le cas où l'asymptote serait parabolique, on utiliserait les formules de la page précédente.

2. Cas où $x \to +\infty$ (à n'effectuer que si $+\infty$ est dans le bord du domaine de définition).

   Il y a principalement deux cas à distinguer.

   (a) S'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$$
   Alors, il y a une asymptote horizontale à droite d'équation $y = a$.

   (b) Si
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$
   Alors il *est possible qu'il y ait une asymptote oblique à droite*, mais ce n'est pas forcément le cas. Il faut alors utiliser les formules suivantes pour décider s'il y a une asymptote oblique à droite d'équation $y = mx + h$.
   $$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$
   En effet, si la fonction n'est pas rationnelle, alors on ne peut pas effectuer de division euclidienne et on est donc obligé d'utiliser ces formules.

   Dans le cas où l'asymptote serait parabolique, on utiliserait les formules de la page précédente.

Or, la plupart des calculs de ces limites nécessitent l'utilisation de la règle de l'Hospital

13.5.4 Compléments sur le comportement asymptotique à l'infini

Définition

On dit que f et g ont le *même comportement asymptotique à l'infini* lorsque

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$$

Si tel est le cas et que g est une droite définie par $y=mx+h$ avec $m\neq 0$, alors on dit que la droite $y=mx+h$ est une *asymptote oblique* de f. Lorsque $m=0$, on parle d'*asymptote horizontale.*

Remarque Lorsque $x\to+\infty$, on parle de *comportement asymptotique à droite* ou d'*asymptote oblique ou horizontale à droite.* Lorsque $x\to-\infty$, on parle de *comportement asymptotique à gauche* ou d'*asymptote oblique ou horizontale à gauche.*

Les formules pour les asymptotes horizontales, obliques et paraboliques

Lorsqu'il y a une asymptote oblique ou horizontale d'équation $y=mx+h$, on peut trouver un moyen de la détecter même si la fonction f n'est pas une fonction rationnelle. Il en va de même dans le cas d'une asymptote parabolique d'équation $y=ax^2+bx+c$.

On obtient ainsi une méthode plus générale que la division euclidienne puisqu'elle fonctionne aussi pour les fonctions qui ne sont pas rationnelles.

Théorème de l'asymptote horizontale

La droite $y=h$ est une asymptote horizontale de f si et seulement si la limite suivante qui donne h existe dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{h=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)}$$

Preuve

"$\Rightarrow$" On suppose que la droite $y=h$ est une asymptote horizontale de f. On doit montrer qu'on a bien la formule donnée pour h.

Par hypothèse, on peut écrire

$$f(x)=h+d(x)\qquad\text{avec}\qquad\lim_{x\to\pm\infty}d(x)=0\ (\bigstar)$$

où $d(x)$ est la distance verticale signée en x qui sépare f de son asymptote.

En effet,
$$\lim_{x\to\pm\infty}d(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-h\big)\overset{\text{hypothèse}}{=}0$$

On a ainsi
$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)\ =\ \lim_{x\to\pm\infty}\big(h+d(x)\big)\overset{(\bigstar)}{=}h+0\ =\ h$$

"$\Leftarrow$" On suppose que la limite donnée existe dans $\mathbb{R}$ et on montre que $y=h$ est une asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-h\big)=\overbrace{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)}^{=h}-h=0$$

$\square$

Théorème de l'asymptote oblique

La droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de f si et seulement si les limites suivantes qui donnent m et h existent dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}$$

Dans le cas particulier où $m = 0$, on retombe sur l'énoncé du théorème de l'asymptote horizontale (si h existe).

Preuve

"$\Rightarrow$" On suppose que la droite $y = mx + h$ est une asymptote oblique de f. On doit montrer qu'on a bien les formules données pour m et h.

Par hypothèse, on peut écrire

$$f(x) = mx + h + d(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\pm\infty} d(x) = 0 \ (\bigstar)$$

où $d(x)$ est la distance verticale signée en x qui sépare f de son asymptote.

En effet,
$$\lim_{x\to\pm\infty} d(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (mx + h)\big) \overset{\text{hypothèse}}{=} 0$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx + h + d(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(m + \frac{h}{x} + \frac{d(x)}{x}\right) \\ &= m + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h}{x} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x} \overset{(\bigstar)}{=} m + 0 + 0 = m \end{aligned}$$

En effet, la limite $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{d(x)}{x}$ est du type $\left(\frac{0}{\pm\infty}\right)$, elle vaut bien 0.

On a aussi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(mx + h + d(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(h + d(x)\big) \overset{(\bigstar)}{=} h + 0 = h$$

"$\Leftarrow$" On suppose que les limites données existent dans $\mathbb{R}$ et on montre que $y = mx + h$ est une asymptote oblique.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (mx + h)\big) = \overbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big)}^{=h} - h = 0$$

Même si on a l'impression de n'avoir eu besoin que de la limite qui définit h, on a aussi implicitement utilisé l'existence de m. $\square$

Théorème de l'asymptote parabolique

La parabole $y = ax^2 + bx + c$ est une asymptote parabolique de f si et seulement si les limites suivantes qui donnent a, b et c existent dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^2}}\ , \quad \boxed{b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{c = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (ax^2 + bx)\big)}$$

Dans le cas particulier où $a = 0$, on retombe sur l'énoncé du théorème de l'asymptote oblique (si b et c existent).