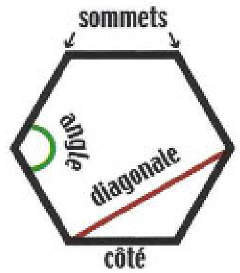
Géométrie (polygones et cercles)

DES DROITES ET DES COURBES

Cercles et polygones sont des figures simples du plan, dont les propriétés sont connues et étudiées depuis l'Antiquité. Si les premiers ne sont que courbes, les seconds ne sont qu'angles et arêtes, mais leurs propriétés sont parfois très liées.

GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYGONES

• Un polygone est une figure géométrique plane formée par une série de segments joints (adjacents) se refermant sur elle-même.
• Le terme polygone vient du grec polus « nombreux » et gônia « angle ».
• Chaque segment d'un polygone est un côté.
• Les extrémités des segments forment les sommets du polygone.
• Chaque sommet est caractérisé par un angle (angle intérieur au polygone).

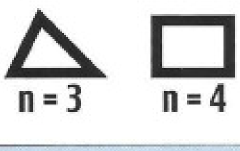


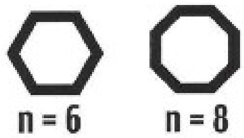
• Les segments qui joignent des sommets non consécutifs sont les diagonales.

Ces figures ne sont pas des polygones (ligne polygonale ouverte, figure avec un côté courbe).

Classification

• Les polygones peuvent être classés en fonction du nombre de leurs côtés.
• Le plus simple des polygones est le triangle (3 côtés et 3 angles, comme son nom l'indique).
• L'appellation des polygones à n côtés utilise
- des racines latines pour $n = 3$ (triangle) et $n = 4$ (quadrilatère) ;
- et des racines grecques pour $n > 4$ (pentagone, hexagone, octogone, etc.).



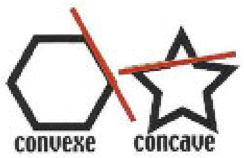


Polygones réguliers et irréguliers

• Un polygone est dit irrégulier si tous ses angles sont égaux.
• Les côtés d'un polygone régulier ont tous la même longueur.
Ex. : le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier, etc.

Polygones convexes, concaves, croisés

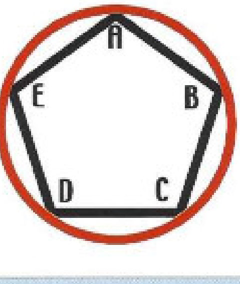
• Si, pour toute droite passant par un quelconque des côtés d'un polygone, les côtés restants se trouvent tous du même côté de la droite, alors le polygone est convexe.
• Si, pour toute droite passant par un quelconque des côtés d'un polygone, les côtés restants ne se trouvent pas tous du même côté de la droite, alors le polygone est concave.



• Un polygone est dit croisé (ou réflexe) si deux ou plusieurs segments se coupent.

Propriétés mathématiques des polygones

• Le nombre de côtés est égal au nombre de sommets.
• Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.
• Un polygone convexe à n côtés possède $(n(n-3))/2$ diagonales.
Ex. : un triangle possède $(3(3-3))/2 = 0$ diagonale ; un carré $(4(4-3)/2 = 2$ diagonales ;
• Un polygone régulier convexe possède n côtés égaux et n angles égaux ;



• La somme des angles vaut $(n-2) \times 180$;
• On peut tracer un cercle, dit cercle circonscrit au polygone, qui passe par tous les sommets du polygone.

TRIANGLES $n=3$

• Le triangle est un polygone de 3 angles, 3 côtés et 3 sommets. On peut aussi le définir à partir de 3 points non alignés, les sommets.

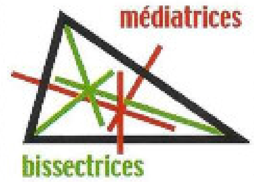
Propriétés générales des triangles

• La somme de deux côtés quelconques est toujours inférieure au troisième côté (ce qui illustre le principe selon lequel « le plus court chemin entre deux points est la ligne droite »).
• La somme des angles vaut 180°.

Droites remarquables d'un triangle

• La bissectrice d'un sommet coupe l'angle de ce sommet en 2 angles égaux.
• Les 3 bissectrices d'un triangle se coupent en un seul point appelé centre du cercle inscrit au triangle.
• La médiatrice d'un côté est la droite qui coupe ce côté perpendiculairement en son milieu. Les 3 médiatrices d'un triangle se coupent en un point unique appelé centre du cercle circonscrit au triangle.
• La hauteur est la droite qui passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé. Les 3 hauteurs d'un triangle se coupent en un point appelé orthocentre.
• Une médiane est une droite qui relie un sommet au milieu du côté opposé.
• Les 3 médianes d'un triangle se coupent en un point unique, appelé centre de gravité.

Périmètre et surface (ou aire) d'un triangle



• Le périmètre d'un triangle est égal à la somme des longueurs de ses 3 côtés.
• Soit h la longueur d'une des hauteurs d'un triangle. Soit b la longueur du côté opposé au sommet par lequel passe cette hauteur. La surface S d'un triangle vaut

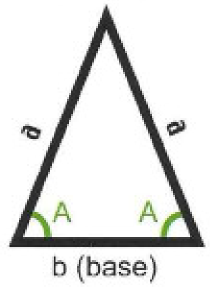
$$S = (h \times b) / 2$$

On dit encore que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par la hauteur.
• Formule de Heron : on peut aussi calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs a, b, c de ses trois côtés et de son périmètre p.

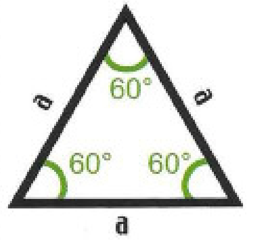
$$S = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}$$

Les triangles remarquables et leurs propriétés

Triangle isocèle
• Un triangle est dit « isocèle » s'il possède 2 côtés de même longueur.
• Le troisième côté s'appelle base du triangle.
• Dans un triangle isocèle, les angles opposés des 2 côtés de même longueur sont égaux.



Triangle équilatéral
• Un triangle est dit « équilatéral » si ses 3 côtés sont égaux.
• Les angles d'un triangle équilatéral sont égaux et valent chacun 60°.



Triangle rectangle
• Un triangle est dit « rectangle » s'il possède un angle droit (90°).
• Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse.
• Théorème de Pythagore. Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Soit c l'hypoténuse et a et b les deux autres côtés :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

• Théorème de la hauteur. Dans un triangle rectangle, la hauteur partant du sommet de l'angle droit coupe l'hypoténuse en deux segments de longueur b et d :

$$h^2 = b \times d$$

QUADRILATÈRES $n = 4$

• Un quadrilatère est un polygone à 4 côtés (vient du latin quadrilatus : « quatre côtés »).
La somme des 4 angles d'un quadrilatère est de 360°.

Quadrilatères particuliers

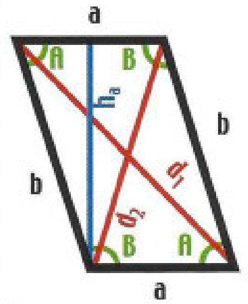
Parallélogramme
• Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
• Son périmètre vaut

$$p = 2a + 2b$$

(a : longueur de 2 côtés parallèles ; b : longueur des deux autres côtés).
• Sa surface est égale au produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante.

$$S = ha \times a$$

(S : surface ; a longueur d'un côté ; ha : hauteur correspondante).
• Les 2 diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
• Les angles intérieurs opposés d'un parallélogramme sont égaux.



Losange
• Un losange est un parallélogramme dont les 4 côtés ont la même longueur.
• Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.
• Son périmètre vaut

$$p = 4a$$

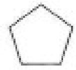
(a est la longueur des côtés).
• Sa surface est égale à la moitié du produit de la longueur des 2 diagonales ($d1$ et $d2$)

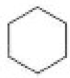
$$S = (d1 \times d2) / 2$$

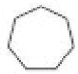
Dénomination

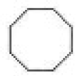
$n=3$ Triangle

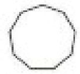
$n=4$ Quadrilatère

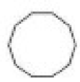
$n=5$

Pentagone

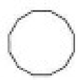
$n=6$

Hexagone

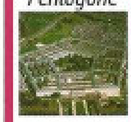
$n=7$

Heptagone

$n=8$

Octogone

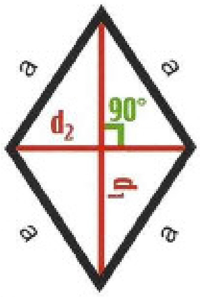
$n=9$

Ennéagone (ou nonagone)

$n=10$

Décagone

$n=12$

Dodécagone

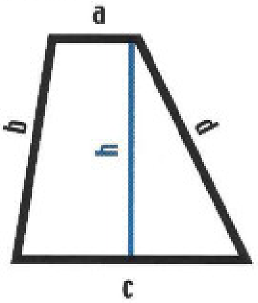
Le Pentagone

Ministère de la défense américain

Le polygone **le plus célèbre**



Trapèze

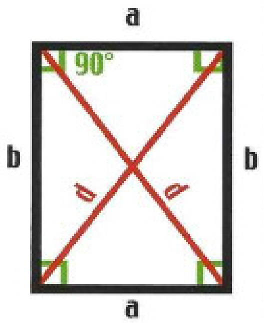
- Un trapèze est un quadrilatère dont 2 côtés opposés sont parallèles.
- La surface d'un trapèze vaut
$$S = (a + c) \times h / 2$$
où *a* et *c* sont les longueurs des 2 côtés parallèles et *h* est la longueur de la hauteur du trapèze (mesure de la distance entre les deux côtés parallèles).



- Son périmètre p vaut
$$p = a + b + c + d$$

Rectangle

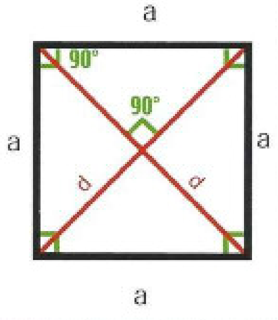
- Un rectangle est un parallélogramme dont tous les angles sont droits (90°).



- Sa surface est égale au produit de la largeur *(a)* par la longueur *(b)*
$$S = a \times b$$
- Son périmètre *p* est égal à
$$p = 2\,a + 2\,b$$
- Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur.

Carré

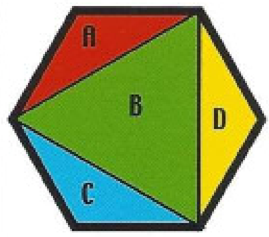
- Un carré est un rectangle dont tous les côtés sont égaux.
- Sa surface est égale à la longueur des



côtés élevée au carré
$$S = a^2$$
- Son périmètre *p* est égal à
$$p = 4\,a$$
- Les diagonales d'un carré ont la même longueur (comme celles d'un rectangle) et sont perpendiculaires.

AUTRES POLYGONES ($n > 4$)

Il n'existe pas de formule donnant l'aire d'un polygone quelconque. En revanche, on peut calculer l'aire d'un polygone régulier en le divisant en triangles.

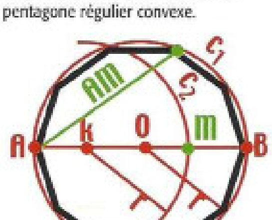


PENTAGONE (N=5)

- Un pentagone est un polygone à 5 côtés.
- Toutes les diagonales d'un pentagone régulier ont la même longueur.
- Nombre d'or. On peut calculer le nombre d'or à partir d'un pentagone régulier. Le nombre d'or est égal à la longueur de la diagonale divisée par la longueur d'un côté.

Construction d'un pentagone

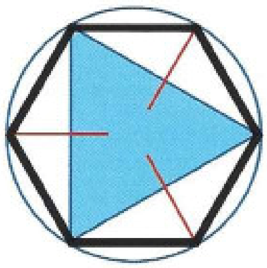
- Tracer un cercle C 1 de rayon *r* et de centre O.
- Tracer un diamètre du cercle. Soit A et B les deux extrémités de ce diamètre. Soit K le milieu du segment [AO].
- Tracer un cercle C 2 de centre K et de rayon *r*. Il coupe le segment [AB] en un point M.
- À l'aide d'un compas, reporter dix fois la longueur OM sur le cercle C 1.
- Joindre les dix points pour obtenir un décagone régulier, et seulement un point sur deux pour obtenir un pentagone régulier convexe.



HEXAGONE (N=6)

- Un hexagone est un polygone à 6 côtés.

Construction d'un hexagone régulier

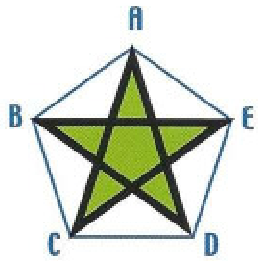


- Construire un triangle équilatéral et son cercle circonscrit.
- La médiatrice de chaque côté coupe le cercle en 3 points.
- Les 6 sommets de l'hexagone correspondent à ces 3 points, plus les 3 sommets du triangle.

PENTAGRAMME

- Une étoile à 5 branches est un pentagone régulier concave.
On l'appelle pentagramme.

Construction d'un pentagramme

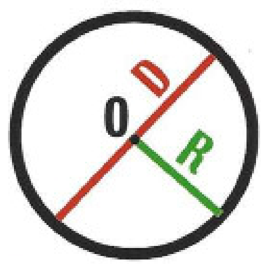


- Soit un pentagone régulier concave dont les sommets consécutifs sont A, B, C, D et E : en reliant les sommets selon l'ordre ADBEC on obtient un pentagramme.

CERCLES, ELLIPSES ET PARABOLES

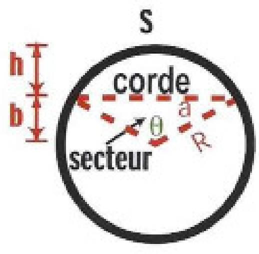
CERCLES

- Un cercle est une ligne courbe fermée sur elle-même, plane et dont tous les points se trouvent à égale distance d'un point O, le centre du cercle.
- Rayon *(r)* : distance commune entre le centre et les points du cercle, matérialisée par un segment de droite dont une extrémité est le centre O, l'autre étant un point du cercle.
- Corde : segment de droite dont les extrémités sont des points du cercle.
- Diamètre *(d)* : corde passant par le centre O.
$$d = 2\,r$$



Cercle de centre O et de rayon r.

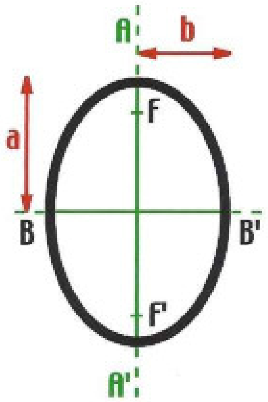
- Circonférence (C) : longueur du cercle (ou périmètre de la surface délimitée par le cercle).
$$C = 2\,\pi\,r$$
Aire, A : surface délimitée par le cercle.
$$A = \pi\,r^2$$



À périmètre égal, le cercle est la figure géométrique qui présente la plus grande aire.

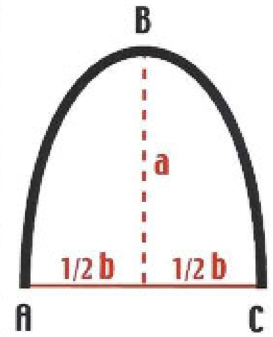
ELLIPSES

- Une ellipse est, comme le cercle, une courbe plane fermée, mais telle que la somme des distances de tout point de cette courbe à deux points particuliers, les foyers (F et F'), est constante.

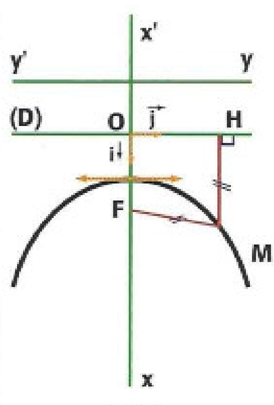


- Axes : le segment AA', de la plus grande longueur, est le grand axe ; le segment BB', de plus petite longueur, est le petit axe.
- Aire A :
$$A = \pi\,a\,b$$

PARABOLES



Une parabole est une courbe plane telle que chacun de ses points se trouve à égale distance d'une droite (D), appelée directrice et d'un point F, appelé foyer, situé à l'extérieur de la droite.

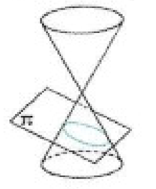


HM = MF

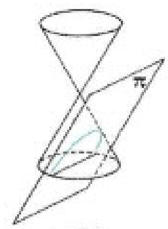
Parabole de foyer F et de directrice (D).

CONIQUES

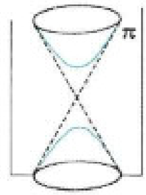
Les cercles, les ellipses et les paraboles sont des coniques : chacune de ces différentes figures géométriques s'obtient par section d'un cône par un plan.



ellipse



parabole



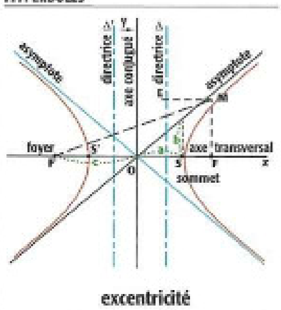
hyperbole

Selon la position du plan par rapport à ce cône circulaire, la figure ainsi obtenue peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole (qui est donc également une conique).
L'ellipse devient un cercle lorsque le plan est perpendiculaire à l'axe du cône.

Définition géométrique des coniques

On peut définir une conique comme un ensemble de points dont les distances à une droite fixe (directrice) et à un point fixe (foyer), sont dans un rapport constant. Ce rapport, e, est appelé « excentricité » de la conique.
L'excentricité est supérieure à 1 pour l'hyperbole, égale à 1 pour la parabole et inférieure à 1 pour l'ellipse.

HYPERBOLES



excentricité
$$e = \frac{c}{a} = \frac{MF}{ME} > 1$$

On obtient une hyperbole lorsque le plan est parallèle à l'axe du cône.
Formée de quatre arcs infinis symétriques, l'hyperbole peut se réduire à deux droites concourantes.
Sa particularité, parmi les coniques, est d'admettre deux asymptotes (droites dont les arcs de l'hyperbole se rapprochent indéfiniment sans les couper).