Chapitre 2

Preuves par récurrence

2.1 Principe de la récurrence

Lorsqu'on cherche à démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tous les nombres naturels $n \geqslant n_0$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$), on peut souvent faire une *preuve par récurrence* :

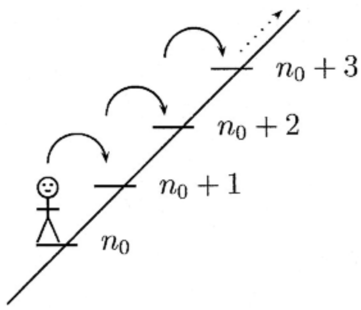
Une telle démonstration se déroule en deux étapes :

1. Ancrage 2. Pas de récurrence

2.1.1 Le schéma de récurrence le plus courant

Voici le schéma le plus courant d'une preuve par récurrence :

1. **Ancrage :**
   On montre que la propriété $P(n_0)$ est vraie.
2. **Pas de récurrence :**
   On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on utilise cette hypothèse pour montrer que $P(n+1)$ est encore vraie.



Exemple

Montrons la formule suivante

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ (ou } n \geqslant 1)$$

1. **Ancrage :**
   Montrons que la formule est vraie pour $n = 1$.
   On a
   $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$
   Les deux termes de la formule pour $n = 1$ sont bien égaux (ils valent les deux 1).

2. **Pas de récurrence (PR) :**
   On suppose que la formule est vraie pour n (c'est l'*hypothèse de récurrence* HR) et on montre qu'elle est encore vraie pour $n+1$.

   À montrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(2n^2+n+6n+6\big)}{6} = \frac{(n+1)\big(2n^2+7n+6\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big((n+2)(2n+3)\big)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

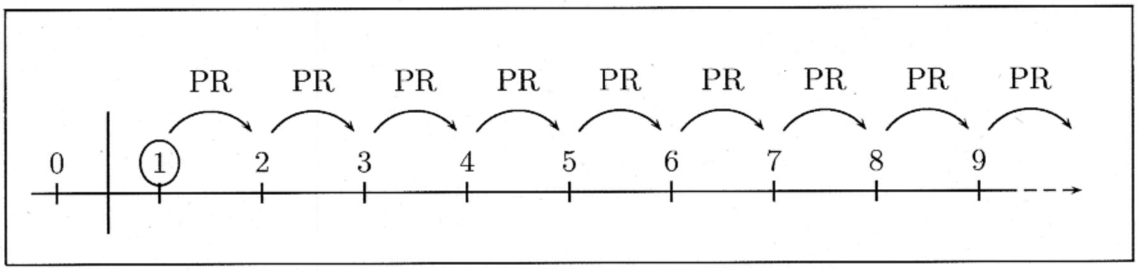
$\square$

En conclusion, l'ancrage vérifie la formule pour $n = 1$.

Le pas de récurrence permet de dire que, puisque la formule est vraie pour $n = 1$, elle est encore vraie pour $n = 2$; du coup, puisque la formule est vraie pour $n = 2$, elle est encore vraie pour $n = 3$; par conséquent, puisque la formule est vraie pour $n = 3$, elle est encore vraie pour $n = 4$; etc...

C'est ainsi que l'on démontre que la formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$!

Schéma explicatif : Représentons la technique de récurrence appliquée à l'aide d'un schéma explicatif. On entoure l'ancrage et on représente comment le pas de récurrence est utilisé par une flèche.



Le schéma nous permet de visualiser la récurrence et de bien vérifier que tout va bien !

2.1.2 Autres schémas de récurrence

Il existe d'autres schémas de récurrence comme par exemple la récurrence à double ancrage et la récurrence forte. Ces schémas seront découverts en exercices !