Chapitre 1

Les principes de base de la logique

En mathématique, une *expression bien formée* ou *proposition* est une expression qui a du sens et qui peut être vraie ou fausse.

1.1 Le principe de non-contradiction

La logique (et donc les mathématiques) est basée sur le *principe de non-contradiction*. Ce principe dit qu'une expression bien formée ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

1.2 Le principe du tiers exclu

Le *principe du tiers exclu* stipule que si une expression bien formée n'est pas vraie, alors elle est fausse (ou que si elle n'est pas fausse, alors elle est vraie).

Ce principe est vrai pour la plupart des expressions bien formées, bien qu'il y ait des expressions qui ne vérifient pas le principe du tiers exclu (voir l'énigme du cyclope ci-dessous). Ces expressions très particulières se prononcent, en général, sur leur propre valeur de vérité. Dans la suite du cours, on admettra que nos propositions vont satisfaire ce principe.

L'énigme du cyclope

Vous voilà enfermé dans une caverne en compagnie d'un cyclope qui veut votre mort. Il vous donne néanmoins un choix : soit vous dites une proposition vraie et vous serez bouilli ; soit vous dites une proposition fausse et vous serez roti.

Que dire ?

Réponse : il y a plusieurs propositions possibles. Voici deux exemples.

1. On peut dire : «Vous allez me rotir !» (ou «Vous n'allez pas me bouillir !»)

   Si cette proposition était vraie, alors vous finiriez bouilli et ainsi cette proposition serait fausse ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être vraie.

   Si cette proposition était fausse, alors vous finiriez roti et ainsi cette proposition serait vraie ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être fausse.

   Cette proposition n'est donc ni vraie, ni fausse.

2. On peut aussi dire : «Je suis en train de mentir !»

   Si cette proposition était vraie, alors vous seriez en train de dire la vérité et ainsi cette proposition serait fausse ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être vraie.

   Si cette proposition était fausse, alors vous seriez en train de mentir et ainsi cette proposition serait vraie ; il s'agit d'une contradiction, donc cette proposition ne peut pas être fausse.

   Cette proposition n'est donc ni vraie, ni fausse.

3. On peut aussi dire : «Cette phrase est fausse !»

1.3 Les implications

Lorsqu'on a deux expressions bien formées P et Q, on écrit

$$\boxed{P \Rightarrow Q}$$

pour dire que l'expression P *implique* l'expression Q. Dans ce cas, P est l'*hypothèse* et Q est la *conclusion*.

Il y a différentes façons de lire $P \Rightarrow Q$. On peut dire :

Si P, alors Q	Si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie
Q si P	La proposition Q est vraie si la proposition P est vraie
P seulement si Q	La proposition P est vraie seulement si la proposition Q est vraie

Lorsque l'expression P n'implique pas l'expression Q, on note $P \not\Rightarrow Q$. C'est le cas lorsque Q est fausse quand P est vraie.

Remarques importantes

1. En mathématiques, on n'écrit jamais d'expressions bien formées fausses (sauf si on s'est trompé en toute bonne foi).
2. En mathématiques, lorsqu'on dit qu'une proposition (ou implication) est vraie, cela signifie qu'elle est TOUJOURS vraie (l'expression «l'exception qui confirme la règle» n'a pas sa place en mathématiques). Ainsi une proposition (ou implication) est fausse lorsqu'elle n'est pas toujours vraie.

Exemples d'implications

1. Jean a gagné au loto $\Rightarrow$ Jean a joué au loto.

   On lit : a) Le fait que Jean a gagné au loto implique le fait qu'il a joué au loto.
   b) Si Jean a gagné au loto, alors il a joué au loto.
   c) Jean a joué au loto, s'il a gagné.
   d) Jean a gagné au loto seulement s'il a joué.

   Cette implication est vraie, car on ne peut pas gagner sans jouer.

2. $2x = 6 \overset{:2}{\Longrightarrow} x = 3$.

   Cette implication est vraie, car si le double d'un nombre x vaut 6, alors le nombre x est égal à 3 (on divise chaque côté de l'égalité par 2).

3. Si un enseignant vous dit : «Les cancres s'asseyent au fond de la classe», il pense que :

   $$\text{Un élève est un cancre} \Longrightarrow \text{Il s'assied au fond de la classe}$$

   Non seulement cela ne signifie pas qu'il y a des cancres dans la classe, mais surtout cela ne signifie en aucun cas que tous les élèves du fond de la classe sont des cancres. Ainsi, l'enseignant n'a pas affirmé que : «Ceux qui s'asseyent au fond de la classe sont des cancres». D'ailleurs, même cet enseignant sera d'accord de penser que :

   $$\text{Un élève s'assied au fond de la classe} \not\Longrightarrow \text{C'est un cancre}$$

1.4 La réciproque d'une implication

La *réciproque* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $P \Leftarrow Q$.
Lorsque la réciproque n'est pas vraie, on trace l'implication : $P \not\Leftarrow Q$.

Exemples Regardons les réciproques des deux premiers exemples précédents.

1. Jean a gagné au loto $\not\Leftarrow$ Jean a joué au loto.

   En effet, il y a au moins une personne qui joue au loto et qui ne gagne pas.

2. $2x = 6 \stackrel{\cdot 2}{\Longleftarrow} x = 3$.

   En effet, si un nombre x vaut 3, alors son double vaut 6 (on multiplie chaque côté de l'égalité par 2).

Moralité

La valeur de vérité de la réciproque d'une implication est indépendante de celle de l'implication.

En effet, la première implication de l'exemple est vraie, alors que sa réciproque est fausse. Tandis que la deuxième implication de l'exemple est vraie et que sa réciproque est vraie.

1.5 Les équivalences

Lorsqu'on a deux expressions bien formées P et Q telles que $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q$, on écrit :

$$\boxed{P \Longleftrightarrow Q}$$

et on dit que la proposition P *est équivalente à* la proposition Q.

Lorsque la proposition P n'est pas équivalente à la propostion Q, on note $P \not\Leftrightarrow Q$. C'est le cas lorsque $P \not\Rightarrow Q$ ou $P \not\Leftarrow Q$.

Au lieu de dire que P est équivalent à Q, on peut aussi dire que

$$P \textit{ si et seulement si } Q$$

Exemples d'équivalence

1. Georges est le frère de Sophie si et seulement si Sophie est la sœur de Georges.

   Il est évident que «Georges est le frère de Sophie» et «Sophie est la sœur de Georges» sont des propositions synonymes.

2. Jean a gagné au loto $\not\Longleftrightarrow$ Jean a joué au loto.

   En effet, l'implication '$\Leftarrow$' est fausse, donc l'équivalence est fausse (malgré le fait que '$\Rightarrow$' est vraie).

3. $2x = 6 \Longleftrightarrow x = 3$.

   En effet, les deux implications '$\Leftarrow$' et '$\Rightarrow$' sont vraies.

1.6 Le contraire d'une expression bien formée

Si P est une proposition, alors sa *proposition contraire* est notée non P, $\neg P$ ou $\sim P$.

Par exemple

Si P est la proposition «Il pleut», alors non P est la proposition «Il ne pleut pas» (et non pas «Il fait beau», car il peut aussi neiger, grêler, etc.).

Remarques

1. Le principe de non-contradiction affirme que P et non P ne peuvent pas être vraies en même temps. De même, elles ne peuvent pas être fausses en même temps.
2. Le principe du tiers exclu permet d'affirmer que :

$$\begin{cases} P \text{ est vraie} & \Longleftrightarrow \quad \text{non } P \text{ est fausse} \\ P \text{ est fausse} & \Longleftrightarrow \quad \text{non } P \text{ est vraie} \end{cases}$$

   On voit l'importance du principe du tiers exclu, car les contraires des phrases de l'énigme du cyclope, qui ne sont ni vraies, ni fausses, sont des phrases vraies.

1.7 La contraposée

La *contraposée* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication non $Q \Rightarrow$ non P.

Théorème

La contraposée d'une implication I est une implication qui a la même valeur de vérité que l'implication I.

$$\boxed{\underbrace{P \Rightarrow Q}_{\text{implication } I} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P}_{\text{contraposée de l'implication } I}} \quad (\bigstar)$$

Interprétations

1. Le sens '$\Longrightarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
   Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors sa contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est vraie.
2. Le sens '$\Longleftarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
   Si la contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.
3. La contraposée du sens '$\Longrightarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
   Si la contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est fausse, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse.
4. La contraposée du sens '$\Longleftarrow$' de $(\bigstar)$ signifie que
   Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, alors sa contraposée non $Q \Rightarrow$ non P est fausse.

Moralité

Quelque soit la valeur de vérité d'une implication, sa contraposée a exactement la même valeur de vérité et inversement.

Exemples

1. La contraposée de l'implication

$$\text{Jean a gagné au loto} \Longrightarrow \text{Jean a joué au loto}$$

est

$$\text{Jean n'a pas joué au loto} \Longrightarrow \text{Jean n'a pas gagné au loto}$$

Comme la première implication est vraie, le théorème affirme que la deuxième implication est aussi vraie.

2. La contraposée de la proposition

$$\text{Jean a joué au loto} \not\Longrightarrow \text{Jean a gagné au loto}$$

est

$$\text{Jean n'a pas gagné au loto} \not\Longrightarrow \text{Jean n'a pas joué au loto}$$

Comme la première proposition est vraie (l'implication «Jean a joué au loto $\Rightarrow$ Jean a gagné au loto» est fausse), le théorème affirme que la deuxième proposition est aussi vraie (l'implication «Jean n'a pas gagné au loto $\Rightarrow$ Jean n'a pas joué au loto» est fausse).

3. La contraposée de l'équivalence $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ est $x \neq 3 \Leftrightarrow 2x \neq 6$.

C'est la raison principale pour laquelle on résout rarement des équations où le symbole '=' est remplacé par le symbole '$\neq$'.

Remarque

Si on contrapose la contraposée d'une implication, on retrouve cette implication.

Preuve du théorème

'$\Longrightarrow$' On suppose que $P \Rightarrow Q$ est vraie. On doit montrer que non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, donc encore supposer que non Q est vraie, afin de montrer que non P est vraie.

On remarque que si P était vraie, alors l'implication $P \Rightarrow Q$ nous permettrait d'affirmer que Q serait vraie, ce qui est impossible (principe de non contradiction) car Q est fausse (puisque non Q est supposé vraie (principe du tiers exclu)).

Par conséquent, P n'est pas vraie, donc non P est vraie (principe du tiers exclu).

On vient donc de montrer, grâce aux principes de non-contradiction et du tiers exclu, que :

$$\Big(P \Rightarrow Q\Big) \Longrightarrow \Big(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P\Big)$$

'$\Longleftarrow$' En refaisant le raisonnement '$\Longrightarrow$' en remplaçant P par non Q et Q par non P, on a :

$$\Big(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P\Big) \Longrightarrow \Big(\text{non (non } P) \Rightarrow \text{non (non } Q)\Big) \Longleftrightarrow \Big(P \Rightarrow Q\Big) \qquad \square$$

1.8 Trois méthodes pour démontrer des implications

Pour montrer que l'implication ci-dessous est vraie

$$P \Rightarrow Q$$

on peut utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous.

1. La première est la *méthode directe* : on suppose que P est vraie et on essaie de démontrer que Q est aussi vraie.

2. La deuxième façon utilise la contraposée, c'est la *preuve par contraposée* : on montre l'implication équivalente non $Q \Rightarrow$ non P de manière directe. C'est-à-dire que l'on suppose que non Q est vraie et on cherche à démontrer que non P est vraie.

3. La troisième façon de faire, c'est de procéder *par l'absurde*. Cela consiste à faire comme si la conclusion Q était fausse et à essayer d'en dégager une contradiction (c'est-à-dire une proposition vraie et fausse en même temps). Par le principe de non-contradiction, cela signifie donc qu'il y a une erreur quelque part et, si la preuve est bien ficelée, que cette erreur ne peut être que le fait que Q est fausse. Ainsi, Q doit donc être vraie (si Q satisfait le principe du tiers exclu).

   Voici un exemple d'une *preuve par l'absurde* :

   > Montrons qu'il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$.
   >
   > Par l'absurde, on suppose que la conclusion est fausse, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel x tel que $x^2 = -1$. Or, grâce à la règle des signes, on sait que $x^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a $-1 = x^2 \geqslant 0$.
   > On a une contradiction : $-1 \geqslant 0$.
   > Donc, il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

1.9 Contre-exemples

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse, il faut un *contre-exemple*, c'est-à-dire un cas particulier pour lequel P est vraie et Q est fausse.

Exemple

On a :

$$x \text{ est un nombre pair } \not\Rightarrow \frac{x}{2} \text{ est un nombre pair}$$

En effet, $x = 2$ fournit un contre-exemple, car 2 est un nombre pair et que $\frac{2}{2} = 1$ n'est pas un nombre pair. Ici, le nombre 2 est un contre-exemple.

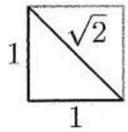
Attention

On ne démontre pas une implication à l'aide d'un exemple.

En effet, x est un nombre pair $\not\Rightarrow$ $\frac{x}{2}$ est un nombre pair. Pourtant, si on essaye avec $x = 4$, alors $\frac{x}{2} = \frac{4}{2} = 2$ est bien un nombre pair.

1.10 La découverte des nombres irrationnels

À la fin du VI[e] siècle, les mathématiciens grecs, membres de l'école pythagoricienne, pensaient que deux grandeurs a et b étaient toujours *commensurables*, c'est-à-dire qu'il existait un nombre réel u (u comme unité) et deux nombres entiers m et n tels que $a = mu$ et $b = nu$, donc que $\frac{a}{b}$ est une fraction (car $\frac{a}{b} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}$).
Ils furent troublés de découvrir qu'ils avaient tort en étudiant un objet pourtant très simple, la diagonale du carré de côté 1, qui se trouve aussi être l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle dont les cathètes sont de longueur 1.



car $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$
(par le théorème de Pythagore)

En effet, il se trouve que 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables, car $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ n'est pas une fraction. Puisque, pour les grecs, l'existence de tels nombres dépassait la raison, ces nombres furent appelés *irrationnels*.

Théorème

Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve

On note M_2 l'ensemble des nombres qui sont des multiples de 2.

1. **Ingrédient** : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n^2 \in M_2$, alors $n \in M_2$.

   Il est équivalent de montrer la contraposée : si $n \notin M_2$, alors $n^2 \notin M_2$.

   Si n n'est pas un multiple de 2, alors n s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a

   $$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\overbrace{2k^2 + 2k}^{\in \mathbb{Z}}) + 1$$

   Ainsi, n^2 n'est pas un multiple de 2.

2. **La preuve par l'absurde.**

   Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$. On peut encore supposer que $\frac{a}{b}$ est irréductible.

   On a ainsi : $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 = \frac{a^2}{b^2} \implies \boxed{a^2 = 2b^2} (\bigstar)$$

   Ainsi, on constate que $a^2 \in M_2$. Par l'**ingrédient**, on sait que $a \in M_2$.

   Par conséquent $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. En substituant ce résultat dans l'équation ($\bigstar$), on obtient

   $$(2k)^2 = 2b^2 \implies 4k^2 = 2b^2 \implies b^2 = 2k^2$$

   Ainsi, on constate que $b^2 \in M_2$. Par l'**ingrédient**, on sait que $b \in M_2$.

   Par conséquent, la fraction est réductible par 2. $\lightning$ contradiction avec l'irréductibilité de $\frac{a}{b}$.

   Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.