Probabilités et statistiques

Analyse combinatoire

§ 1. Dénombrements

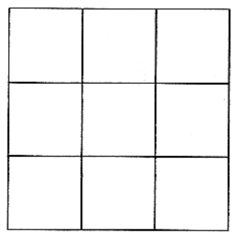
Un **dénombrement** est l'action de compter les éléments que l'on considère. Le dénombrement est un recensement.

On utilise cette terminologie lorsqu'on veut savoir combien de possibilités présente une situation.

La manière la plus simple de pratiquer le dénombrement est de compter systématiquement toutes les possibilités.

Exemple 1:

Combien y a-t-il de carrés dans la figure ci-contre?



Il y a: 1 carré 3 sur 3
4 carrés 2 sur 2
9 carrés 1 sur 1.

Ainsi, il y a au total 1 + 4 + 9 = **14 carrés** dans la figure.

Exemple 2:

Combien de mots de 2 lettres (qu'ils aient un sens ou non) peut-on former?

Il y a 26 lettres dans l'alphabet. Il y a donc 26 possibilités pour la première lettre et 26 possibilités pour la deuxième lettre, ce qui correspond à 26 possibilités et 26 possibilités. Comme **le "et" en probabilités (et plus généralement en mathématiques) correspond à la multiplication (alors que le "ou" correspond à l'addition)**, le nombre total de possibilités de mots de 2 lettres est 26 · 26 = **676 lettres**.

Exemple 3:

Combien existe-t-il de manières différentes d'aligner 4 personnes?

4 personnes différentes peuvent prendre la place la plus à gauche: 4 possibilités.

Une personne s'étant mise à la place la plus à gauche, 3 personnes différentes peuvent prendre la deuxième place depuis la gauche: 3 possibilités.

Une personne s'étant mise à la place la plus à gauche et une autre personne s'étant mise à la deuxième place depuis la gauche, 2 personnes différentes peuvent prendre la troisième place depuis la gauche: 2 possibilités.

La dernière personne qui n'a pas encore de place prend alors la place la plus à droite: 1 possibilité.

Ainsi, on a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ = **24 possibilités** pour aligner les 4 personnes.

§ 2. Factorielles

Dans l'exemple 3 ci-dessus, on a effectué le calcul $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ pour savoir le nombre de possibilités d'aligner 4 personnes.

Si on avait cherché le nombre de possibilités d'aligner 5 personnes, on aurait dû effectuer le calcul $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Si on avait cherché le nombre de possibilités d'aligner 10 personnes, on aurait dû effectuer le calcul $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Si on avait cherché le nombre de possibilités d'aligner n personnes, on aurait dû effectuer le calcul $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Pour simplifier l'écriture des calculs on va utiliser la notation suivante:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

et on nomme cette opération la **factorielle de n**.

On peut calculer n'importe quelle factorielle directement à la calculatrice en utilisant les touches $[2nd][3]$:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = [6][2nd][3] = 720$,

$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = [11]\,[2nd][3] = 39'916'800$.

Par convention, on a $0! = 1$.

§ 3. Permutations sans répétition

Considérons une suite finie de n éléments distincts: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.
Avec les mêmes éléments, nous pouvons former d'autres suites: $a_3, a_2, a_4, a_1, a_5, \ldots, a_n$ ou $a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ou etc.
L'ensemble des suites que nous pouvons ainsi former avec ces éléments s'appelle l'ensemble des **permutations sans répétition** de ces éléments.
Dans l'exemple 3 ci-dessus, on a recherché le nombre de possibilités d'aligner 4 personnes, ce qui correspond au nombre de permutations (sans répétition, puisqu'une personne ne peut pas être à deux endroits différents) de 4 éléments.

Exemple:

Avec les éléments a, b et c, nous pouvons former les 6 permutations suivantes:

a, b, c   a, c, b   c, a, b   c, b, a   b, c, a   b, a, c.

D'après ce que nous avons vu au § 2, le nombre de permutations de n éléments sera donné par $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Nous noterons P_n le **nombre de permutations (sans répétition) de n éléments**.
Nous avons donc: $P_n = n!$.

§ 4. Permutations avec répétition

Supposons maintenant que les n éléments ne soient pas tous distincts. Alors les $n!$ permutations (sans répétition) formées avec ces éléments ne seront pas toutes distinctes.

Exemple:

Si nous reprenons les 6 permutations des 3 éléments a, b et c de l'exemple du § 3 et que nous supposions que a est identique à b, nous n'aurons alors plus que 3 permutations distinctes (on a remplacé b par a):   a, a, c   a, c, a   c, a, a.

Plus généralement, soit $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ n éléments parmi lesquels p soient semblables, q soient semblables et r soient semblables (on doit avoir $p + q + r \leq n$).

Alors le nombre de permutations distinctes que l'on pourra former à partir de ces n éléments sera donné par $\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$

Nous noterons $P_n(p;q;r)$ le **nombre de permutations avec répétitions de n éléments**.

Nous avons donc: $P_n(p;q;r) = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$.

Exemple:

Combien de nombres différents de 7 chiffres peut-on former en utilisant le chiffre 1 trois fois, le chiffre 5 deux fois et les chiffres 4 et 9 chacun une fois?

Nous obtenons le résultat en calculant le nombre de permutations de 7 éléments, dont 3 et 2 sont semblables, c'est-à-dire: $P_7(3;2) = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{5040}{6 \cdot 2} = 420$.

§ 5. Arrangements sans répétition

De combien de manières peut-on former un comité de 2 personnes comprenant un président et un secrétaire lorsqu'on a 3 personnes à disposition?

Notons A, B, et C les trois personnes. Les groupes de 2 personnes qu'on peut former sont (la première lettre correspond au choix du président et la deuxième au choix du secrétaire): A, B A, C B, A B, C C, A C, B.

On a donc 6 possibilités.

De manière générale, soient k et n deux entiers positifs avec $k \leq n$ et soient n éléments distincts. On appelle **arrangement sans répétition de n éléments pris k à k** toute permutation de k éléments distincts que l'on peut former à partir de n éléments (**en tenant compte de l'ordre des éléments choisis**).

Le **nombre d'arrangements sans répétition de n éléments pris k à k**, noté A_k^n, est donné par $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple:

Un comité se compose de 7 membres. De combien de manières différentes pouvons-nous nommer le bureau comprenant le président, le vice-président, le secrétaire et le trésorier?

Le nombre cherché est le nombre d'arrangements de 7 éléments pris 4 à 4, sans répétition, soit $A_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{5050}{6} = 840$.

Le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments pris k à k (A_k^n) peut être calculer directement à la calculatrice en utilisant les touches $[2nd][9]$.

Par exemple, $A_4^7 = [7][2nd][9][4][=] \ = 840$ et $A_5^8 = [8][2nd][9][5][=] \ = 6720$.

§ 6. Arrangements avec répétition

Dans l'exemple 2 du § 1, on a cherché le nombre de possibilités de former un mot de 2 lettres (qu'il ait un sens ou non). Comme il y a 26 lettres dans l'alphabet, le nombre de possibilités est donné par 26 · 26 = 26^2 = 676.

Soient maintenant k et n deux entiers positifs avec k $\leq$ n et soient n éléments distincts. On appelle **arrangement avec répétitions de n éléments pris k à k** toute permutation de k éléments distincts que l'on peut former à partir de n éléments (en tenant compte de l'ordre des éléments choisis), chaque élément pouvant figurer jusqu'à k fois dans la permutation.

Le **nombre d'arrangements avec répétitions de n éléments pris k à k**, noté A_k^n, est donné par $$\overline{A_k^n} = n^k.$$

Dans l'exemple ci-dessus du nombre de possibilités de former un mot de 2 lettres (qu'il ait un sens ou non), on choisit 2 éléments parmi 26 avec possibilité de répétition et en tenant compte de l'ordre, ce qui nous donne bien $\overline{A_2^{26}} = 26^2 = 676$ mots possibles.

Exemple:

Combien de nombres de 4 chiffres pouvons former avec les chiffres 4, 5 et 7, chacun pouvant figurer jusqu'à 4 fois?

Le nombre cherché est le nombre d'arrangements de 3 éléments pris 4 à 4, avec répétition, soit $\overline{A_4^3} = 3^4 = 81$.

§ 7. Combinaisons sans répétition

Soient n et k deux entiers positifs avec k $\leq$n et soient n éléments distincts.

Une **combinaison sans répétition de n éléments pris k à k** est un sous-ensemble de k éléments formé à partir des n éléments donnés. La différente entre les combinaisons et les arrangements est que, dans les combinaisons, **on ne tient pas compte de l'ordre des éléments choisis**: les choix a, b, c et a, c, b sont les mêmes.

Ainsi, si on dispose des éléments a, b, c, d et que l'on cherche le nombre de combinaison sans répétition des 4 éléments pris 2 à 2, on a les possibilités suivantes:

a, b a, c a, d b, c b, d c, d,

soit un total de 6 possibilités.

On appelle **combinaison sans répétition de n éléments pris k à k** tout sous-ensemble de k éléments distincts que l'on peut former à partir de n éléments (**sans tenant compte de l'ordre des éléments choisis**).

Le **nombre de combinaison sans répétition de n éléments pris k à k**, noté C_k^n, est donné par $C_k^n = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

On remarque que $C_k^n = \frac{A_k^n}{k!}$.

Exemple:

Soit E un ensemble de 11 éléments. Combien existe-t-il de sous-ensembles de E comptant 3 éléments?

Comme on cherche le nombre de sous-ensembles, cela signifie qu'on ne tient pas compte de l'ordre. On est donc en présence de combinaisons sans répétition de 11 éléments pris 3 à 3. Le nombre de sous-ensemble de E comptant 3 éléments est donc $C_3^{11} = \frac{11!}{3!\cdot(11-3)!} = \frac{39^\wedge 916'800}{6\cdot 40320} = 165$.

Le nombre de combinaisons sans répétition de n éléments pris k à k (C_k^n) peut être calculer directement à la calculatrice en utilisant les touches $[2nd][8]$.

Par exemple, $C_3^{11} = [11][2nd][8][3][=] = 165$ et $C_5^8 = [8][2nd][8][5][=] = 56$.