Probabilités et statistiques

Probabilités

§ 1. Terminologie

Jetons une pièce de monnaie en l'air. L'arrivée de pile ou de face nous apparaît comme déterminée par le hasard. Ces deux événements possibles sont dits des **événements aléatoires**.

L'expérience consistant à jeter la pièce est appelée **épreuve**.

Voici des exemples d'épreuves: jeter un dé, tirer une carte d'un jeu, extraire un jeton numéroté d'un sac de loto.

Répéter une épreuve, c'est la refaire dans des **conditions identiques**. Toutes les répétitions forment une **catégorie d'épreuves**.

Lors d'une épreuve au jeu de pile ou face, nous ne voyons pas de raison pour que face apparaisse plutôt que pile, et nous admettons dès lors que les deux événements sont également possibles.

De même, lorsque nous jetons un dé, nous admettons comme également probable l'arrivée de l'une quelconque des six faces. C'est le **principe de symétrie**.

En fait, ni la pièce de monnaie, ni le dé à jouer ne sont exactement symétriques. En admettant le principe de symétrie, nous faisons une hypothèse qui n'est jamais réalisée qu'avec une certaine approximation dans la pratique. Les résultats que nous obtiendrons à partir du calcul des probabilités seront donc d'autant plus valables que les conditions de l'épreuve se rapprocheront d'avantage du principe de symétrie, admis à priori.

Considérons une épreuve dont les résultats également possibles forment un ensemble fini E d'**événements élémentaires**.

Par exemple, au jeu de pile ou face, les événements élémentaires sont l'arrivée de pile ou celle de face. Lorsque nous jetons un dé, il y a 6 événements élémentaires, à savoir l'arrivée de l'une quelconque des six faces.
Distinguons, parmi ces événements élémentaires, ceux qui remplissent certaines conditions données, c'est-à-dire réalisent un événement A.
Au jeu de dé, nous pouvons appeler l'événement A l'arrivée d'un chiffre pair, par exemple.
Par définition, la **probabilité d'un événement** A est le rapport du nombre n des événements élémentaires qui réalisent A - on les appelle les cas favorables - au nombre total N des événements élémentaires - on les appelle les cas possibles (ces événements élémentaires doivent être équiprobables, c'est-à-dire avoir la même probabilité de se réaliser). La **probabilité de l'événement A** est notée $P(A)=\frac{n}{N}$.
On peut donc calculer la probabilité de l'événement A en utilisant:

$$P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Souvent, pour le calcul du nombre de cas favorables et/ou le nombre de cas possibles, on utilise les éléments vus dans le chapitre "Analyse combinatoire" (à savoir, les permutations sans répétition, les permutations avec répétitions, les arrangements sans répétition, les arrangements avec répétitions ou les combinaisons sans répétition).
La résultat du calcul de la probabilité d'un événement peut être donnée sous forme de fraction, sous forme de code à virgule ou sous forme de pourcent.

Exemples:

1. Si A est l'arrivée d'un chiffre pair au jeu de dé, il y a 6 cas possibles dont 3 sont favorables. On a donc $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5=50\%$.
2. L'épreuve consiste à jeter simultanément 2 dés. L'événement A est: obtenir 10 points. Le nombre de cas possibles est le nombre d'arrangements avec répétition de 6 éléments pris 2 à 2 et vaut donc $\overline{A_2^6}=6^2=36$. Le nombre de cas favorable est 3, car il y a 3 arrangements favorables possibles: 4/6, 6/4, 5/5. Ainsi, $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\simeq 0,083=$ $=8,3\%$.

Remarques:

1. De la définition de $P(A)$ découle immédiatement que $0\leq P(A)\leq 1$.
2. Si $P(A)=0$, on dit que A est un **événement impossible**.

3. Si $P(A) = 1$, on dit que A est un **événement certain**.

4. Lorsque A ne se réalise pas, on dit qu'il y a réalisation de l'**événement contraire**, noté $\overline{A}$. La probabilité de $\overline{A}$ est égale à (voir ci-dessus): $P\left(\overline{A}\right) = \frac{N-n}{N}$. On a la relation $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$, que l'on peut aussi écrire $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

§ 2. Calculs des probabilités avec l'analyse combinatoire

Voici deux exemples de calcul de probabilités qui utilisent l'analyse combinatoire du § 1.

Exemple 1:

Trois balles sont tirées simultanément au hasard d'un sac contenant 8 balles blanches et 12 balles noires. Quelle est la probabilité:

A) Que les 3 balles tirées soient blanches?

B) Que, parmi les 3 balles tirées, 2 soient blanches et 1 noire?

C) Que, parmi les 3 balles tirées, 1 seule soit blanche?

D) Que les 3 balles tirées soient noires?

Solution:

A) Nombre de cas possibles N: c'est le nombre de combinaisons sans répétition de 20 éléments pris 3 à 3, soit C_3^{20}; ainsi $N = C_3^{20} = \frac{20!}{3! \cdot (20-17)!} = [20][2nd][8][3][=] = 1140$.

Nombre de cas favorables n: c'est le nombre de combinaisons de 8 éléments (il y a 8 boules blanches) pris 3 à 3, soit C_3^8; ainsi $n = C_3^8 = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = [8][2nd][8][3][=] = 56$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285} \simeq 0,049 = 4,9\%$.

B) Le nombre N des cas possibles est encore $N = C_3^{20}$. Pour trouver le nombre n des cas favorables, on peut raisonner ainsi: il y a C_3^8 combinaisons possibles des 8 boules blanches prises 2 à 2; à chacune de ces combinaisons, on peut associer l'une quelconque des 12 boules noires. D'où le nombre n de cas favorables: $n = 12 \cdot C_2^8$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{12 \cdot C_2^8}{C_3^{20}} = \frac{12 \cdot 28}{1140} = \frac{336}{1140} = \frac{28}{95} \simeq 0,295 = 29,5\%$.

C) Le nombre N des cas possibles est encore $N = C_3^{20}$. Pour trouver le nombre n des cas favorables, on peut raisonner ainsi: il y a C_3^{12} combinaisons possibles des 12 boules noires prises 2 à 2; à chacune de ces combinaisons, on peut associer l'une quelconque des 8 boules blanches. D'où le nombre n de cas favorables: $n = 8 \cdot C_2^{12}$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{8 \cdot C_2^{12}}{C_3^{20}} = \frac{8 \cdot 66}{1140} = \frac{528}{1140} = \frac{44}{95} \simeq 0,463 = 46,3\%$.

D) Le nombre N des cas possibles est encore $N = C_3^{20}$. Le nombre n des cas favorables est, similairement à A), C_3^{12} (il y a 12 boules noires).

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{C_3^{12}}{C_3^{20}} = \frac{220}{1140} = \frac{11}{57} \simeq 0,193 = 19,3\%$.

Exemple 2:

On lance au hasard 6 boules numérotées de 1 à 6 dans 6 cases numérotées de 1 à 6.

A) Quelle est la probabilité pour que la boule 3 entre dans la case 3?

B) Quelle est la probabilité pour que les boules 3 et 4 entrent dans les cases 3 et 4?

C) Quelle est la probabilité pour que chacun des 6 boules soit dans la case de même numéro?

Solution:

A) Le nombre N de cas possibles sera le nombre des permutations de 6 éléments distincts: $N = P_6 = 6! = [6][2nd][3] = 720$. Pour calculer le nombre n de cas favorables, supposons l'événement souhaité réalisé, à savoir la balle 3 dans la case 3. Les 5 balles restantes peuvent se répartir dans les 5 cases restantes de $P_5 = 5! =$ $= [5][2nd][3] = 120$ manières différentes. On a donc $n = 120$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6} \simeq 0,166 = 16,6\%$.

B) A nouveau, on a $N = P_6 = 6! = 720$. Supposons que l'événement souhaité se réalise. Les boules 3 et 4 étant placées, il reste 4 boules qui peuvent se répartir dans les 4 cases restantes de $P_4 = 4! = 24$ manières différentes. On a donc $n = 24$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} \simeq 0,033 = 3,3\%$.

C) A nouveau, on a $N = P_6 = 6! = 720$. Il n'y a qu'une manière de réaliser l'événement souhaite. Par conséquent, on a $n = 1$.

La probabilité cherchée est donc $p = \frac{n}{N} = \frac{1}{720} \simeq 0,0014 = 0,14\%$.

§ 3. Utilisation d'arbres dans le calcul de probabilités

Lorsqu'on considère 2 ou 3 épreuves consécutives, on peut utiliser un **arbre**. Il s'agit d'un schéma qui nous donne successivement les différentes possibilités que l'on a (**branches de l'arbre**). Les probabilités des événements élémentaires sont inscrites sur les branches de l'arbre (voir l'exemple ci-dessous). Cela permet souvent de résoudre un problème de probabilités.

Exemple:

Trois balles sont tirées au hasard, consécutivement et sans remise d'un sac contenant 8 balles blanches et 12 balles noires. Quelle est la probabilité:

A) Que les 3 balles tirées soient blanches?

B) Que, parmi les 3 balles tirées, 2 soient blanches et 1 noire?

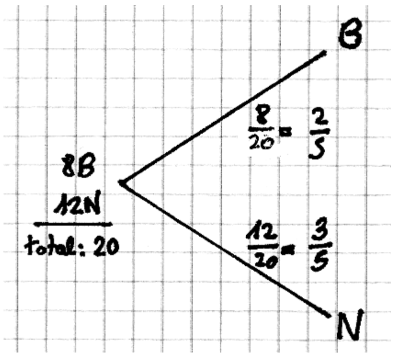
C) Que, parmi les 3 balles tirées, 1 seule soit blanche?

D) Que les 3 balles tirées soient noires?

C'est le même exemple que l'exemple 1 du § 2, la différence étant que le mot "simultanément" a été remplacé par "consécutivement et sans remise" (sans remise signifie qu'on ne remet pas une balle tirée dans le sac avant de tirer la suivante).

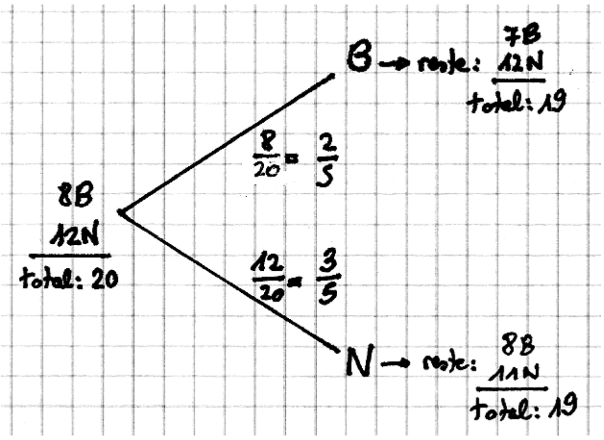
Construction de l'arbre:

Pour le tirage de la première balle, on a les branches suivantes (B signifiant une balle blanche et N une balle noire):



On a 8 balles blanches et 12 balles noires, soit 20 balles au total. On a donc une probabilité de $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ de tirer une balle blanche et une probabilité de $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ de tirer une balle noire.

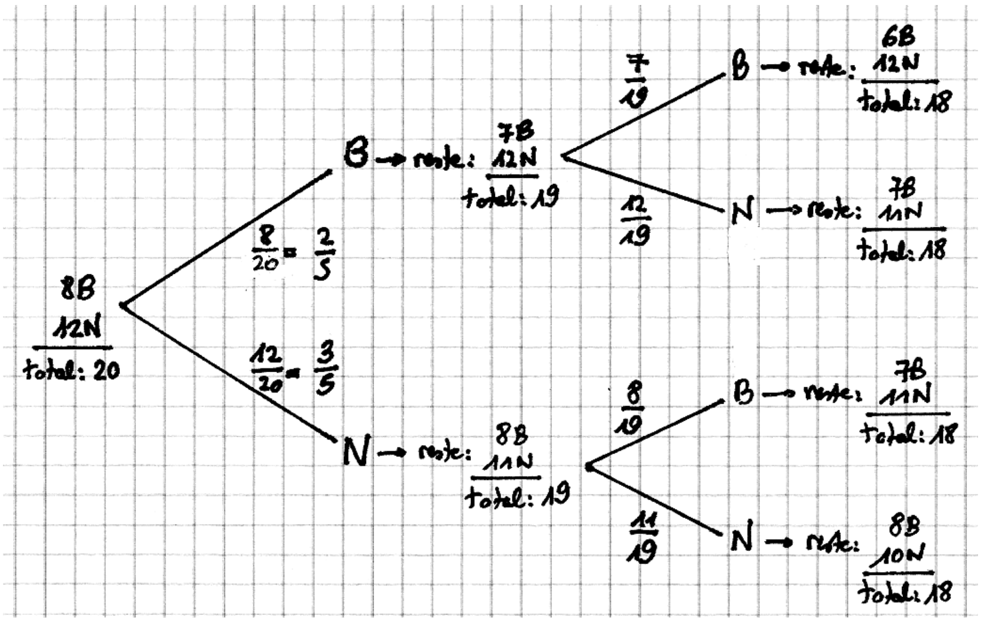
On indique alors ce qu'il reste comme balles blanches et comme balles noires après le tirage d'une boule:



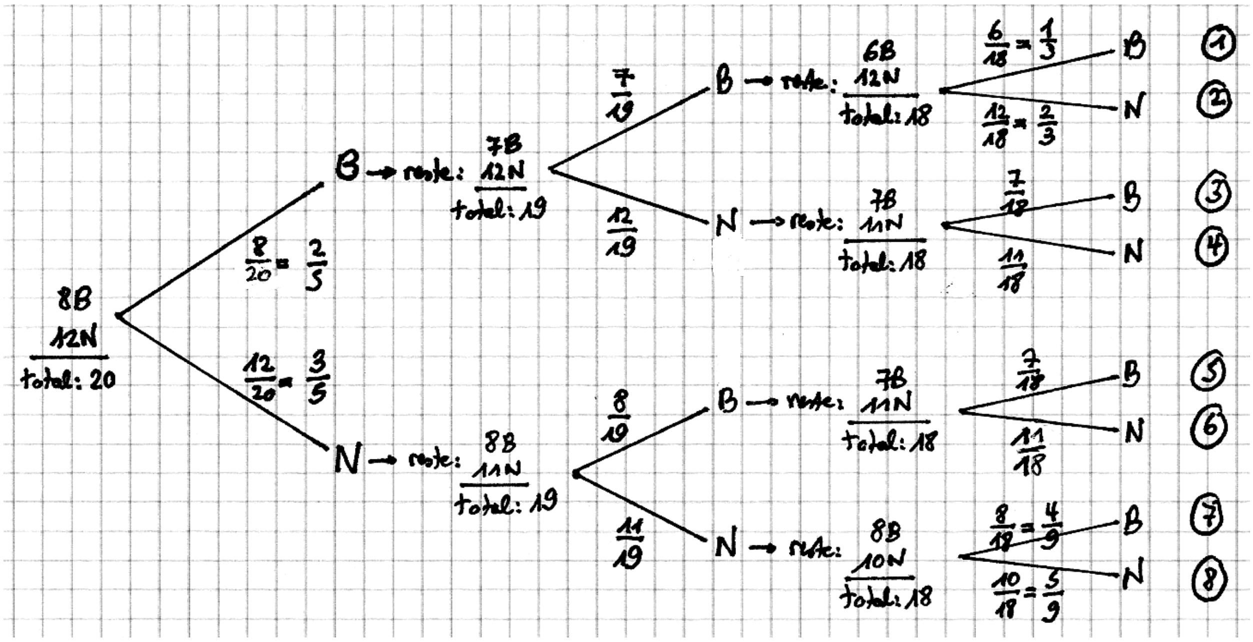
Comme on a tiré une balle blanche et qu'on ne la remet pas dans le sac, il reste 7 balles blanches et toujours 12 balles noires, soit 19 balles au total.

Comme on a tiré une balle noire et qu'on ne la remet pas dans le sac, il reste 11 balles noires et toujours 8 balles blanches, soit 19 balles au total.

Pour le tirage de la deuxième balle, on a les branches suivantes sur lesquelles on écrit les probabilités, puis ce qu'il reste dans le sac:



On continue similairement pour le tirage de la troisième balle:



On obtient ainsi l'arbre complet.

Il contient 8 chemins (numérotés de (1) à (8)) reliant le point de départ et chaque point d'arrivée.

Pour calculer une probabilité dans ce genre d'arbre, on regarde quelles chemins sont concernés. Sur chaque chemin, on multiplie les probabilités qui y apparaissent. Si on a plusieurs chemins, on additionne finalement les résultats obtenus pour chaque chemin.

En faisant un arbre, on a déjà bien avancé dans la résolution du problème. En fonction des questions posées, il suffira de trouver les informations sur l'arbre et de calculer les probabilités demandées.

Reprenons les questions posées:

Quelle est la probabilité:

A) Que les 3 balles tirées soient blanches?

B) Que, parmi les 3 balles tirées, 2 soient blanches et 1 noire?

C) Que, parmi les 3 balles tirées, 1 seule soit blanche?

D) Que les 3 balles tirées soient noires?

<u>**Solution:**</u>

A) Le chemin correspondant à 3 balles blanches tirées est le chemin (1). La probabilité cherchée est donc le produit des probabilités de chaque partie du chemin (1): $p=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{1}{3}=\frac{14}{285}\simeq 0,049=4,9\%$.

B) Les chemins correspondant à 2 balles blanches et 1 balle noire sont les chemins (2), (3) et (5). La probabilité sur le chemin (2) est $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{2}{3} = \frac{28}{285}$, celle sur le chemin (3) est $\frac{2}{5} \cdot \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{28}{285}$ et celle sur le chemin (5) est $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{28}{285}$ aussi. Ainsi, la probabilité cherchée est la somme des probabilités trouvées pour ces trois chemins: $p = 3 \cdot \frac{28}{285} = \frac{28}{95}$ $\simeq 0,295 = 29.5\%$.

C) Les chemins correspondant à 1 seule balle blanche tirée sont les chemins (4), (6) et (7). La probabilité sur le chemin (4) est $\frac{2}{5} \cdot \frac{12}{19} \cdot \frac{11}{18} = \frac{44}{285}$, celle sur le chemin (6) est $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{11}{18} = \frac{44}{285}$ et celle sur le chemin (7) est $\frac{3}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{4}{9} = \frac{44}{285}$ aussi. Ainsi, la probabilité cherchée est la somme des probabilités trouvées pour ces trois chemins: $p = 3 \cdot \frac{44}{285} = \frac{44}{95}$ $\simeq 0,463 = 46,3\%$.

D) Le chemin correspondant à 3 balles noires tirées est le chemin (8). La probabilité cherchée est donc le produit des probabilités de chaque partie du chemin (8): $p = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{5}{9} = \frac{11}{57} \simeq 0,193 = 19,3\%$.

On remarque qu'on obtient les mêmes résultats que dans l'exemple 1 du § 2. Cela vient du fait que **"simultanément" peut être vu comme "consécutivement et sans remise" si on ne tient pas compte de l'ordre**, ce qui est bien le cas ici.