Probabilités

Fait par Roland Vuille, Perma'math

Définition de la probabilité :

On appelle événement le résultat d'une expérience à caractère aléatoire, i.e. où le hasard entre en jeu (par exemple le lancé d'une pièce de monnaie).

La probabilité d'un événement est le nombre de chances que l'on a que l'événement se produise par rapport au nombre total des événements possibles. Cette probabilité se calcule de la manière suivante :

$$\text{probabilité que E se produise} = \frac{\text{nb de cas où E se produit}}{\text{nb de cas possibles}}.$$

On résume souvent cette définition est disant que la probabilité est le nombre de cas favorable sur le nombre de cas possibles.

Calculs de probabilités par comptage des cas :

Lorsqu'on veut appliquer la définition de probabilité ci-dessus, on doit calculer le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Dans les cas simples (comme le lancement d'une ou deux pièces de monnaie ou le lancement de un ou deux dés), on peut facilement faire la liste exhaustive de toutes les possibilités et les compter, ce qui nous donne le nombre de cas possibles.

Dans la liste ainsi faite, on peut alors mettre en évidence les cas favorables, i.e. les cas qui répondent à la question de la probabilité et compter ces cas, ce qui nous donne alors le nombre de cas favorables. On peut alors en déduire la probabilité cherchée.

Lorsque le nombre de cas possibles devient trop grand, on ne peut alors plus écrire toutes les possibilités. On utilise alors des techniques de dénombrement de cas qui s'appelle analyse combinatoire.

Analyse combinatoire :

Il y a 3 sortes de situations différentes :

1) les permutations ;
2) les combinaisons ;
3) les arrangements.

Les permutations correspondent au nombre de manière possible de classer tous les éléments que l'on a à disposition.
Les combinaisons et les arrangements correspondent au nombre de possibilités de choisir une partie des éléments du tout, les combinaisons ne tenant pas compte de l'ordre du choix (pile-face est la même chose que face-pile), alors que les arrangements tiennent compte de l'ordre du choix (pile-face n'est pas la même chose que face-pile).
Dans chacune de ces possibilités, on peut aussi différencier les cas où on remet l'objet en question après l'avoir tiré (on dit alors "avec remise" ou "avec répétition") ou les cas où on ne remet pas l'objet après l'avoir tiré (on dit alors "sans remise" ou "sans répétition").
On a alors 6 situations différentes:
1a) les permutations sans répétition;
1b) les permutations avec répétition;
2a) les combinaisons sans répétition;
2b) les combinaisons avec répétition;
3a) les arrangement avec répétition;
3b) les arrangements sans répétition.
Dans chacun de ces cas, il existe une formule pour calculer le nombre de cas.
Certaines d'entre elles utilisent la notion de factorielle.

<u>Factorielle</u>:
La factorielle d'un nombre n est définie par $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ et se note $n!$.
Ainsi $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
A noter que $0! = 1$.

<u>Permutations sans répétitions</u>:
Si on classe dans un ordre particulier n éléments distincts, on forme une permutation sans répétitions (puisque tous les éléments sont distincts) de ces n éléments.
Le nombre P_n de permutations sans répétitions est : $P_n = n!$.

<u>Permutations avec répétitions</u>:
Si on classe dans un ordre particulier n éléments dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 identiques de type 2, ..., n_p identiques de type p (on doit avoir $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$), on forme une permutation avec répétitions de ces n

éléments.
Le nombre $\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de permutations avec répétitions est :
$$\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_p!}.$$

Combinaisons sans répétitions :
Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts (on doit avoir $k \leq n$) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison sans répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.
Le nombre C_k^n de combinaisons sans répétitions est :
$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$
Ces nombres sont souvent utilisés et on les appelle coefficients binomiaux et on les écrit $\binom{n}{k}$ plutôt que C_k^n. Ils seront utilisés dans la loi binomiale (voir ci-dessous).
Remarquons que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
On peut calculer ces coefficients directement à la machine à calculer en utilisant la touche "nCr" qui se trouve derrière le "8".
Par exemple, pour calculer $\binom{9}{5}$, on procède comme suit :

9	2nd	8	5	=

126.

Combinaisons avec répétitions :
Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) sans les classer dans un ordre particulier, on forme une combinaison avec répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.
Le nombre $\overline{C_k^n}$ de combinaisons avec répétitions est :
$$\overline{C_k^n} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$
On remarque que $\overline{C_k^n} = \binom{n+k-1}{k}$ (voir la définition des coefficients binomiaux ci-dessus).

Arrangements sans répétitions :
Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ($k \leq n$) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement sans répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.

Le nombre A_k^n d'arrangement sans répétitions est :

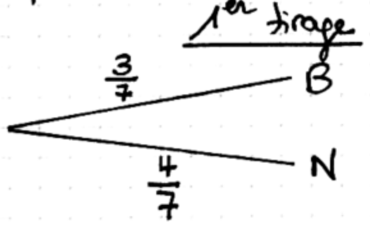
$$A_k^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Arrangements avec répétitions :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement avec répétitions de k éléments choisis parmi n éléments.
Le nombre $\overline{A_k^n}$ d'arrangements avec répétitions est : $\overline{A_k^n} = n^k$.

Arbres :

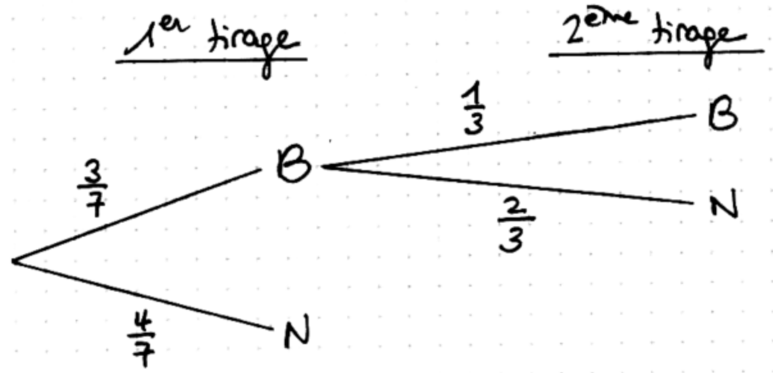
Quand on s'intéresse à des épreuves successives (on tire une boule d'une urne, puis une deuxième boule, etc.), on a avantage à représenter la situation par un diagramme en forme d'arbre. C'est une manière de faire que l'on utilise très souvent.
Illustrons cette méthode par un exemple :
Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne sans les remettre dans l'urne une fois tirées (on dit que c'est un tirage sans remise).
Lors du tirage de la $1^{ère}$ boule, on a 7 boules au total (3 blanches et 4 noires).
La probabilité de tirer une boule blanche est donc de $\frac{3}{7}$ et celle de tirer une boule noire est de $\frac{4}{7}$.
Le premier embranchement de l'arbre peut alors se symboliser comme suit :



B = boule blanche tirée
N = boule noire tirée

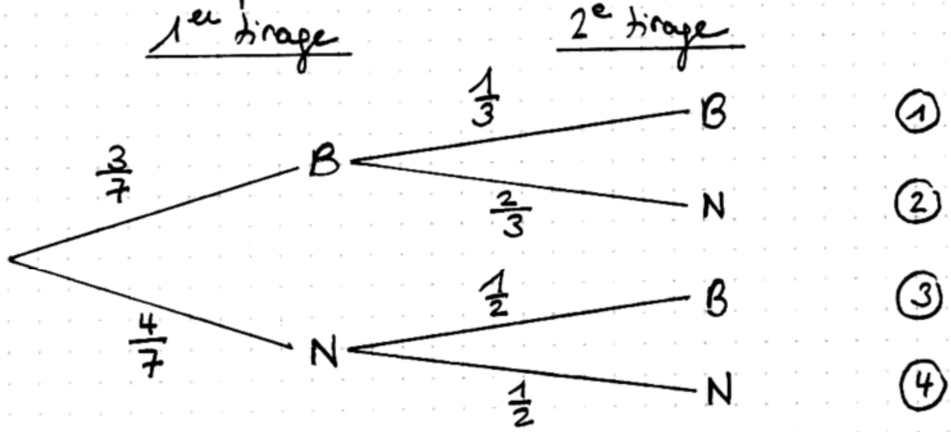
Passons maintenant au 2^e tirage.
Si on a tiré une boule blanche au 1^{er} tirage, il nous reste alors 6 boules (2 blanches et 4 noires), puisqu'on n'a pas remis la première boule tirée dans l'urne.
La probabilité de tirer alors une boule blanche est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
La probabilité de tirer une boule noire est de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L'arbre peut alors se continuer comme suit :



Si on a tiré une boule noire au 1er tirage, il nous reste alors 6 boules (3 blanches et 3 noires), puisqu'on n'a pas remis la première boule tirée dans l'urne.
La probabilité de tirer alors une boule blanche est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
La probabilité de tirer une boule noire est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On peut alors compléter l'arbre:



On a alors 4 chemins différents:

chemin 1 : B – B
chemin 2 : B – N
chemin 3 : N – B
chemin 4 : N – N

Pour calculer la probabilité sur un de ces chemins, on va multiplier les nombres écrits le long de ses branches.
Par exemple, la probabilité d'obtenir 2 boules blanches (i.e. B-B), ce qui correspond au chemin 1, vaut $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

Lorsque la probabilité que l'on cherche concerne plusieurs chemins, on calcule la probabilité sur chaque chemin comme ci-dessus, puis on additionne les résultats obtenus.
Ainsi, par exemple, calculons la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur (soit B-B, soit N-N). Cela correspond aux

chemins 1 et 4 :

chemin 1 : $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

chemin 4 : $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$.

Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}.$$

Probabilités conditionnelles:

Parfois on doit calculer une probabilité en sachant que quelque chose s'est produit. On utilisera cette technique à chaque fois que les termes "sachant que", "si on sait que", "si", etc., apparaissent.

On notera A l'événement dont on cherche la probabilité et B l'événement dont on sait qu'il s'est produit.

Par exemple, dans l'exemple décrit ci-dessus (§ Arbres), si on doit calculer la probabilité que la 1ère boule tirée soit blanche sachant que la deuxième boule tirée est noire, on a:

A = la 1ère boule tirée est blanche, et

B = la 2e boule tirée est noire.

Il faut toujours bien expliciter ces A et B avant d'aller plus loin.

En notant $p(\ldots)$ la probabilité et $p(A|B)$ la probabilité que A se passe sachant que B s'est passé, on a alors:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

où $A \cap B$ est l'événement où A et B ont lieu ensemble.

Dans l'exemple, on a :

$A \cap B$ = la 1ère boule tirée est blanche et la 2e boule tirée est noire.

En utilisant l'arbre ci-dessus, cela correspond au chemin 2 et on a:

$$p(A \cap B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}.$$

On calcule maintenant $P(B)$, i.e. la probabilité que la 2e boule tirée soit noire. Cela correspond aux chemins 2 et 4 dans l'arbre ci-dessus:

chemin 2 : $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$

chemin 4 : $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$.

Ainsi $p(B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$.

On en déduit que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2/7}{4/7} = \frac{2}{7} : \frac{4}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$.

Ainsi la probabilité que la 1ère boule tirée soit blanche sachant que la deuxième boule tirée est noire est : $\frac{1}{2}$.

Remarques sur les probabilités:

La probabilité d'un événement est toujours supérieure ou égale à 0 et inférieure ou égale à 1.
Si la probabilité d'un événement est 0, alors l'événement ne se produit jamais (événement impossible).
Si la probabilité d'un événement est 1, alors l'événement se produit toujours (événement certain).

Loi binomiale:

Lorsqu'on répète n fois une expérience qui présente à chaque fois 2 issues possibles (l'événement A de probabilité p et l'événement contraire $\overline{A}$ de probabilité $q = 1-p$), la probabilité que l'événement A se produise k fois au cours des n épreuves est donnée par : $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (où $q = 1-p$ et $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial). C'est la loi binomiale.

Premier exemple d'application de la loi binomiale:

On lance une pièce de monnaie 10 fois. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 7 fois "face".
Ici A = obtenir face, $\overline{A}$ = obtenir pile, $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Ainsi la probabilité d'obtenir 7 fois "face" est, selon la loi binomiale, donnée par: $\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 120 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{15}{128} \cong 0,117$.

Deuxième exemple d'application de la loi binomiale:

Combien de fois doit-on lancer un dé conventionnel à 6 faces pour que la probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" soit supérieure à 99%.
La probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" = 1 − la probabilité d'obtenir à chaque fois "1".
Ici A = obtenir 1, $\overline{A}$ = obtenir autre chose que "1", $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
Donc la probabilité d'obtenir à chaque fois "1" est, selon la loi binomiale, donnée par: $\binom{n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-n} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, où n est le nombre de fois qu'on lance le dé.
Ainsi, la probabilité d'obtenir à chaque fois autre chose que "1" est donnée par $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
Cherchons n de telle manière que $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0,99$ (= 99%):

$1-\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0{,}99$	$+\left(\frac{1}{6}\right)^n$, -1
$\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0{,}01$	on applique log de chaque côté
$\log\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n\right] = \log(0{,}01)$	propriété de log
$n\log\left(\frac{1}{6}\right) = \log(0{,}01)$	$: \log\left(\frac{1}{6}\right)$
$n = \frac{\log(0{,}01)}{\log(1/6)} \simeq 2{,}57$	

Ainsi on doit lancer le dé au moins 3 fois (3 est l'entier immédiatement supérieur à 2,57).