# Probabilités

## 11.1 Introduction aux probabilités

La théorie des probabilités est l'étude et la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires ou incertains.
Lorsqu'une pièce de monnaie est lancée de manière aléatoire, elle peut tomber sur pile ou sur face sans que nous soyons en mesure de prédire l'issue de cet unique lancer.
Décidons de compter le nombre $s$ de fois que face apparaît au cours de $n$ lancers successifs. A mesure que $n$ croît, le rapport $f = \frac{s}{n}$, appelé la **fréquence relative**, devient de plus en plus stable. Si la pièce est bien équilibrée alors nous nous attendons à ce que face apparaisse lors de 50% des lancers, autrement dit que la fréquence relative soit proche de 0.5 .
Cette valeur attendue de $\frac{1}{2}$ (qu'on appelle espérance de l'expérience) s'obtient aussi de manière déductive. En effet chaque côté de la pièce ayant la même chance d'apparaître, la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{2}$ .
Bien que l'issue d'un unique lancer soit imprévisible, le comportement à long terme est déterminé. Cette stabilité à long terme d'un phénomène aléatoire est à la base de la théorie des probabilités (loi des grands nombres).
Considérons une autre expérience : lançons un dé et observons le nombre obtenu sur la face supérieure. Répétons l'épreuve $n$ fois et appelons $s$ le nombre d'occurrence du résultat 4. A nouveau, lorsque $n$ augmente, la fréquence relative $f = \frac{s}{n}$ se stabilise. Supposant que le dé n'est pas pipé, la fréquence d'apparition du 4 sur le long terme tendra vers $\frac{1}{6}$ . Nous disons alors que la probabilité d'obtenir un 4 vaut $\frac{1}{6}$ .
Alternativement ce résultat peut être obtenu par déduction. En effet chaque face est autant susceptible d'apparaître que les autres!

## 11.2 Univers et événement

Lors d'une expérience aléatoire, l'ensemble $\Omega$ de toutes les issues se nomme **l'univers** des possibles, ou encore espace des événements élémentaires. Un **événement** est un ensemble d'issues, autrement dit c'est un sous-ensemble de l'univers $\Omega$ . En particulier l'ensemble $\{a\}$ constitué d'une unique issue $a \in \Omega$ s'appelle **événement élémentaire**. De plus, l'ensemble vide $\emptyset$ et l'univers $\Omega$ lui-même sont des événements car ce sont des sous-ensembles de $\Omega$ . L'événement $\emptyset$ est appelé **événement impossible** et $\Omega$ est **l'événement certain**.
Comme les événements sont des ensembles, les combinaisons d'événements permettent de former de nouveaux événements en utilisant les opérations ensemblistes :

a. $A \cup B$ est l'événement qui se produit si et seulement si (ssi) $A$ se produit **ou** $B$ se produit (ou les deux - réunion non exclusive).
b. $A \cap B$ est l'événement qui se produit ssi $A$ se produit **et** $B$ se produit.
c. $A^c$, le complément de $A$, souvent noté $\bar{A}$ , est l'événement qui se produit ssi $A$ ne se produit pas.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements sont **incompatibles** (ou disjoints).

► **Exemple :**

Lors de l'épreuve du lancer d'un dé, l'univers est constitué de six issues : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit $A$ l'événement "obtenir un nombre pair", $B$ l'événement "obtenir un nombre impair" et $C$ l'événement "obtenir un nombre supérieur à 3". Nous avons donc $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ et $C = \{4, 5, 6\}$ . Alors...

$A \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$ = "obtenir un nombre pair ou un nombre supérieur à 3"
$A \cap C = \{4, 6\}$= "obtenir un nombre pair et un nombre supérieur à 3"
$C^c = \overline{C} = \{1, 2, 3\}$ = "ne pas obtenir un nombre supérieur à 3".

## 11.3 Axiomes des probabilités

Soient $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire et $A$ un événement. $P(A)$ est appelé **probabilité de l'événement** $A$, si les axiomes suivants sont satisfaits

a. Pour tout événement $A$, nous avons $P(A) \geq 0$ .

b. L'événement certain est tel que $P(\Omega) = 1$ .

c. Toute paire d'événements incompatibles $A$ et $B$ est telle que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

.

► **Remarque :** A tout événement associe donc une probabilité qui est un nombre compris entre 0 et 1. Si deux événements ne peuvent se produire simultanément, la probabilité de leur réunion est la somme des probabilités de chacun des événements.

## 11.4 Théorèmes des probabilités

Ces résultats découlent des axiomes ci-dessus.

| L'événement impossible ($\emptyset$) a une probabilité nulle : $P(\emptyset) = 0$ . |
|---|

**Preuve :**

Pour tout événement $A$, nous avons $A \cup \emptyset = A$. Comme $A$ et $\emptyset$ sont incompatibles, nous avons par le dernier axiome :

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A)$$

En ajoutant $-P(A)$ aux deux membres de l'équation, nous obtenons $P(\emptyset) = 0$. □

Le théorème suivant formalise le résultat intuitif que si la probabilité de réussite (succès) d'une épreuve vaut, disons $p = \frac{1}{3}$, alors celle de sa non réalisation (échec) vaut $q = 1 - p = \frac{2}{3}$ .

| Pour tout événement on a. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. |
|---|

**Preuve :**

$\Omega = A \cup \overline{A}$ avec $A$ et $\overline{A}$ incompatibles. Comme $P(\Omega) = 1$ le dernier axiome nous donne :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

En ajoutant $-P(A)$ taux deux membres de l'équation, nous obtenons $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. □

Deux résultats énoncés sans preuve !

| Tout événement $A$ est tel que $0 \leq P(A) \leq 1$. |
|---|

| Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$. |
|---|

Enfin un dernier théorème...

| Pour toute paire d'événements $A$ et $B$, nous avons<br>$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |
|---|

**Preuve :**

Intuitivement, par le dernier axiome, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ce qui est faux ! En effet comme $A$ et $B$ ne sont pas incompatibles, l'intersection de probabilité $P(A \cap B)$ est comptée deux fois, (avec $P(A)$ et $P(B)$). Nous devons donc soustraire $P(A \cap B)$ et donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Plus formellement, $A \cup B$ est la réunion des événements disjoints $A \cap \overline{B}$ et $B$.
Ainsi $P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B)$. Comme $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ nous obtenons

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\square$

► **Exemple :** Si $p(A) = \frac{2}{3}$, $p(\bar{B}) = \frac{3}{4}$ et $p(A \cup B) = \frac{1}{2}$, que vaut of $p(A \cap B)$ ?

On a

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

De plus,

$$p(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

Ainsi,

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

## 11.5 Espérance

**L'espérance mathématique** est une valeur numérique permettant de mesurer le degré d'équité d'un jeu de hasard. Elle est égale à la somme des gains (et des pertes) pondérées par la probabilité du gain (ou de la perte). Il s'agit donc du montant moyen que l'on s'attend à gagner (ou perdre) à chaque répétition de l'expérience. Une situation ou un jeu pour lesquels l'espérance mathématique est nulle pour tous les joueurs (ni gain, ni perte) est appelé « **jeu équitable** ».

► **Exemple :**

La roulette comporte 37 numéros (0 à 36). La mise sur un numéro fixe rapporte 35 fois la mise. L'espérance de gain en misant 1 CHF sur un numéro vaut...

$$1\text{ CHF} \cdot \frac{36}{37} + 35\text{ CHF} \cdot \frac{1}{37} \equiv -0.027\text{ CHF}$$

Ainsi on doit s'attendre à perdre 0.027 CHF pour chaque franc joué. Ce n'est évidemment pas un jeu équitable.

## 11.6 Ensembles probabilisés finis

### 11.6.1 Ensembles finis équiprobables

Soit $\Omega$ l'univers d'une épreuve telle que le nombre d'issues est fini et que les caractéristiques physiques de l'expérience suggèrent que chaque résultat de l'univers ait la même probabilité. Un tel ensemble probabilisé fini est appelé **espace fini équiprobable.**
En particulier, si $\Omega$ contient $n$ issues, la probabilité de chaque issue est $\frac{1}{n}$. D'autre part, un événement $A$ contenant $r$ issues élémentaires a une probabilité $\frac{r}{n}$. Autrement dit,

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre d'issues dans } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

ou

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement } A}{\text{nombre de cas possible de l'univers } \Omega}$$

► **Remarque :** Il est important de se souvenir que cette formule n'est utilisable que pour des univers dont les issues sont équiprobables.

▶ **Exemple :**

Une carte est choisie au hasard dans un jeu de poker, de 52 cartes. Considérons les événements suivants : $A = \{\text{coeur}\}$ et $B = \{\text{carte "figure"}\}$. Une carte « figure » est un valet, une dame ou un roi. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ and $P(A \cup B)$.

Comme l'univers est équiprobable :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de coeurs}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\text{nomber de "figure"}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{nombre de "figure" en coeur}}{\text{nombre de cartes}} = \frac{3}{52}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{13} - \tfrac{3}{52} = \tfrac{22}{52} = \tfrac{11}{26}$$

### 11.6.2 Ensemble probabilisé fini

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire. Un **ensemble probabilisé fini** est obtenu en attribuant à chaque issue $a_i$ de $\Omega$ un nombre réel $p_i$, appelé probabilité de $a_i$, tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a. chaque $p_i$ est non négatif, c'est-à-dire $p_i >\geq$.

b. la somme des $p_i$ vaut 1, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ .

La probabilité $P(A)$ d'un événement $A$ est alors définie par la somme des probabilités des issues qui satisfont $A$ :

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} P(a_i) = \sum_{a_i \in A} p_i$$

▶ **Exemple :**

On lance trois pièces équilibrées et compte le nombre de faces. L'univers est $\omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Le tableau ci-contre indique la probabilité de chaque issue.

| Issue | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

Soit $A$ l'événement "au moins un face apparait", et $B$ l'événement « toutes les faces ou tous les piles apparaissent ». Ainsi $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 3\}$. Alors, par définition,

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{7}{8} \text{ et } \mathrm{P(B) = P(0) + P(3)} = \frac{1}{4}$$

## 11.7 Représentations

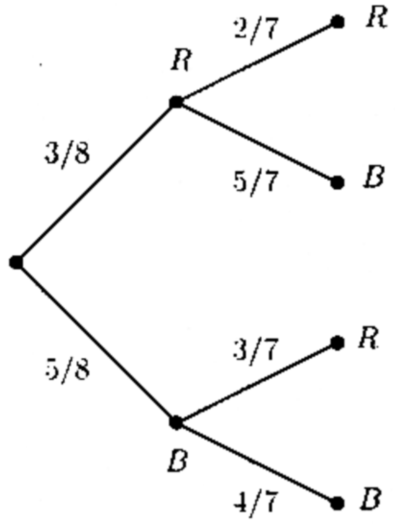
Les situations rencontrées dans les exercices de probabilité peuvent souvent être illustrées par des diagrammes.

### 11.7.1 Diagramme en arbre

Si l'événement dont la probabilité doit être déterminée est obtenu par la répétition d'épreuves (ex : trois lancers successifs d'un dé) ou la réalisation simultanée de plusieurs épreuves (ex : un lancer de 3 dés), on fait recours à un diagramme en arbre.

► **Exemple :** D'une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules blanches, on tire au hasard et sans remise deux boules successivement. Quelle est la probabilité que deux boules de même couleur soient choisies ?

$$P(\text{même couleur}) = P(RR) + P(BB) = \frac{13}{28}$$




$P(RR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

$P(RB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

$P(BR) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

$P(BB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{28}$

► **Remarque :**

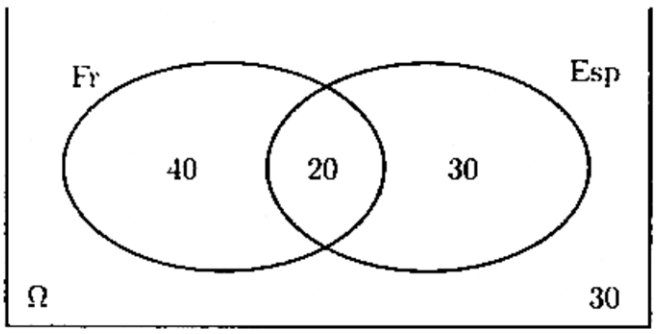
a. La probabilité d'un chemin (une issue de l'univers) est obtenue en **multipliant** les probabilités des choix faits. (théorème de la multiplication)

b. La probabilité d'un événement satisfait par plusieurs chemins (composé de plusieurs issues) est obtenue en **additionnant** les probabilités de chaque issue. (dernier axiome).

### 11.7.2 Diagramme de Venn

Lorsqu'une population $\Omega$ est partagée selon plusieurs critères (sous-ensembles non nécessairement disjoints), on peut la représenter à l'aide d'un diagramme de Venn.

► **Exemple :** Sur 120 étudiants, 60 étudient le français, 50 étudient l'espagnol et 20 étudient les deux. Le diagramme de Venn correspondant est dessiné ci-contre. Il nous permet de répondre aux questions suivantes :




Un étudiant est choisi au hasard. Calculer la probabilité qu'il étudie :

a. seulement le français : $P(\text{"seulement le français"}) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

b. ni le français ni l'espagnol : $P(\text{"ni le français ni l'espagnol"}) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

## 11.8 Probabilités conditionnelles, indépendance

La notion de probabilité conditionnelle et d'indépendance est motivée par l'exemple bien connu suivant :

► **Exemple :** Prime d'assurance

Les primes d'assurances auto dépendent habituellement de la probabilité qu'a une personne choisie au hasard d'être impliquée dans un accident. Il est connu que les conducteurs masculins de moins de 25 ans sont impliqués dans plus d'accidents que les autres conducteurs. Par conséquent, si $P(A)$ représente la probabilité d'un accident et $B$ représente les conducteurs masculins de moins de 25 ans, les données nous disent que :

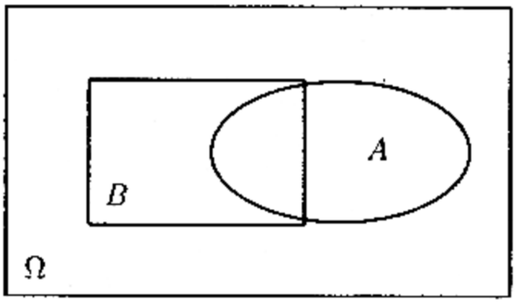
$$P(A) < P(A \mid B)$$

Où $P(A \mid B)$ est appelée probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$. Ici $P(A \mid B)$ représente la probabilité d'avoir un accident sachant que le conducteur est un homme de moins de 25 ans. Le but de ce paragraphe est de calculer explicitement $P(A \mid B)$.

### 11.8.1 Probabilités conditionnelles

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un univers $\Omega$. Si $P(B) \neq 0$, alors on appelle **probabilité conditionnelle** de $A$ par $B$ (probabilité de $A$ sachant $B$), le nombre noté $P(A \mid B)$ et défini par la formule :

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$




Comme représentée dans le diagramme de Venn ci-dessus, $P(A \mid B)$ mesure, dans un certain sens, la probabilité relative de $A$ par rapport à l'espace réduit $B$.

► **Exemple :**

Une paire de dés est jetée. L'univers consiste en 36 paires ordonnées$(a, b)$, où $a$ et $b$ peuvent être un entier quelconque entre 1 et 6. Ainsi, la probabilité est la même pour toute les issues et vaut $\frac{1}{36}$. Trouver la probabilité que l'on obtienne 2 avec l'un des deux dés si la somme vaut 6.

On doit trouver $P(A \mid B)$ où $B = \{\text{somme est } 6\}$ et $A = \{2 \text{ apparait sur au moins un des deux dés}\}$. La probabilité conditionnelle est donnée par $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. On a besoin de :

$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

Deux éléments de $B$ appartiennent également à $A$, donc $A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{5}{36} \quad \text{ainsi} \quad P(A \mid B) = \frac{1/18}{5/36} = \frac{2}{5}$$

► **Remarque :** Parfois un événement $B$ se produit sans aucune influence sur la probabilité qu'un autre événement $A$ se réalise. Dans ce cas, on a alors $P(A \mid B) = P(A)$. Comme $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, il en résulte que $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

### 11.8.2 Événements indépendants

Deux événements $A$ et $B$ sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un des deux n'influence pas la réalisation de l'autre. Plus formellement, $A$ est indépendant de $B$ si $P(A)$ est la même que $P(A \mid B)$ Si l'on substitue $P(A)$ dans la formule $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on obtient :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

On dit que deux événements $A$ et $B$ sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Dans le cas contraire ils sont appelés **dépendants.**

► **Exemple :**

On jette une pièce trois fois de suite. L'univers correspondant est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

On considère les événements :

$$A = \{\text{Face au premier jet}\} = \{FFF, FFP, FPF, FPP\}$$
$$B = \{\text{Face au second jet}\} = \{FFF, FFP, PFF, PFP\}$$
$$C = \{\text{Exactement deux faces à la suite}\} = \{FFP, PFF\}$$

Clairement $A$ et $B$ sont des événements indépendants, ce fait est vérifié ci-dessous. Par contre il est plus difficile de se prononcer pour $A$ et $C$ et pour $B$ et $C$. Pour vérifier si ce sont des événements indépendants, on va utiliser la définition :

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{8} \qquad P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

De plus :

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B) \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}$$

$$P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C) \text{ donc } A \text{ et } C \text{ sont indépendants.}$$

$$P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C) \text{ donc } B \text{ et } C \text{ sont dépendants.}$$

► **Remarque :**

| |
|---|
| **Evénements indépendants : tous les tirages avec remise** |
| **Evénements dépendants : tous les tirages sans remise** |

## 11.9 Distribution binomiale

Considérons les épreuves répétées et indépendantes d'une même expérience n'ayant que deux résultats possibles. On nommera ces résultats « Succès » et « Echec ». Si la probabilité d'un « Succès » vaut $p$ alors celle d'un échec est $q = 1 - p$.

► **Exemples :**

a. Tir d'une fléchette dans une cible
b. Lancers successifs d'une pièce de monnaie. Evénement « succès » : obtenir pile
c. Lancers successifs d'un dé. Evénement « succès » : obtenir « 6 »

Ces lancers successifs sont bien indépendants : la probabilité d'un succès ne dépend en effet pas du résultat précédent ! (la fléchette n'a pas de mémoire !!)
Considérons que l'épreuve est répétée $n$ fois et intéressons-nous au nombre de succès obtenus lors de ces $n$ répétitions.

► **Exemples :**

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois « 6 » en lançant 5 fois un dé ?
b. Quelle est la probabilité d'atteindre 8 fois une cible en 11 lancers de fléchettes, sachant que chacune a une probabilité de, disons, 0.7 d'atteindre la cible ?

Pour schématiser ces $n$ épreuves, on peut construire un arbre de probabilités. Il comporte $2^n$ chemins. Une issue de l'expérience se code alors à l'aide de **S**uccès et **E**chec : par exemple $\underbrace{\mathbf{SSEES \cdots SE}}_{n \text{ fois}}$

Le nombre de $S$ indique le nombre de succès. La probabilité d'une issue (un chemin) qui compte $k$ succès (et donc $(n-k)$ échecs) vaut $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ .

Le nombre de façons d'obtenir $k$ fois $S$ en $n$ épreuves s'appelle **coefficient binomial.**
Il se note $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, et vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

En effet, il s'agit du nombre de manières de former un mot de $n$ lettres avec $k$ fois $E$ et $(n-k)$ fois $S$.

► **Exemples :**

a. L'événement « 2 succès parmi 5 lancers » est obtenu $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$ fois.

b. L'événement « 8 cibles en 11 lancers » est satisfait $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{11!}{8!3!} = 165$ fois.

Soit $X$ la variable aléatoire qui indique le nombre de succès. La probabilité d'obtenir $k$ succès lors de $n$ répétitions d'une épreuve dont la probabilité de succès vaut $p$ se note $P(X = k)$ .
C'est la **distribution binomiale.** et elle se calcule par

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

► **Exemples :**

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois « 6 » en lançant 5 fois un dé ?

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 16,08\%$$

b. Quelle est la probabilité d'atteindre 8 fois une cible en 11 lancers de fléchettes, sachant que chaque fléchette a une probabilité de 0,7 d'atteindre la cible ?

$$P(X = 8) = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \simeq 25.68\%$$

c. En tirant, avec remise, 10 cartes d'un jeu de jass, quelle est la probabilité de tirer exactement 2 fois un as ?
La probabilité de tirer un as vaut $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8 \simeq 21.65\%$$

## 11.10 Probabilité d'obtenir au moins un succès, série géométrique

Voici encore quelques exemples de questions que l'on trouve dans les exercices...

► **Exemples :**

a. Pour calculer la probabilité qu'au moins un succès se produise en $n$ épreuves, on utilise $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ (événement complémentaire) En effet, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$, avec $P(X = 0) = (1-p)^n$ (que des échecs). Ainsi

$$P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n.$$

b. Lors d'une unique épreuve, la probabilité d'obtenir au moins un succès vaut $p$. En deux épreuves, cette probabilité passe à $1-(1-p)^2$ . En trois épreuves, elle augmente encore et vaut $1-(1-p)^3$. Etc... Une question souvent posée est : **Combien d'épreuves faut-il considérer, au moins, pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès dépasse une probabilité donnée, disons 99% ?**

Ici l'inconnue est $n$, le nombre d'épreuves à considérer. Déterminons $n$ par un calcul plutôt que par tâtonnements ! On souhaite que $P(X \geq 1) > 0.99$ . C'est-à-dire que $P(X \geq 1) = 1-(1-p)^n > 0.99 \Rightarrow 0.01 > (1-p)^n$. Comment résoudre cette équation ? On utilise les logarithmes car l'inconnue est en exposant !

$$0.01 > (1-p)^n \Rightarrow \ln(0.01) > \ln((1-p)^n) = n \cdot \ln(1-p)$$

Ainsi $n \cdot \ln(1-p) < \ln(0.01)$. Attention, comme $\ln(1-p) < 0$, quand on divise par $\ln(1-p)$, on doit changer le signe de l'inéquation ! Ainsi $n > \dfrac{\ln(0.01)}{\ln(1-p)}$ (arrondir à l'entier supérieur) .

c. Parce qu'elle intervient dans quelques problèmes de probabilité, rappelons encore ce qu'est la série géométrique.

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

En effet,

$$\begin{array}{rl} S_n & = 1 \quad + r \quad + \cdots \quad + r^{n-1} + r^n \\ r \cdot S_n & = r \quad + r^2 + \cdots \quad + r^n \quad + r^{n+1} \quad - \\ \hline \end{array}$$

$$S_n - rS_n = S_n(1-r) = 1 - r^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Qu'en est-il de $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ?

Cette limite n'existe que si $|r| < 1$. En effet dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ , si bien que

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$$

Déterminer la probabilité lors du lancer d'un dé que le premier 6 apparaisse après un nombre pair de lancers.

Cet événement est $\bar{6}6 \cup \bar{6}\bar{6}\bar{6}6 \cup \bar{6}\bar{6}\bar{6}\bar{6}\bar{6}6...$ .

Sa probabilité est

$$p = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + ...$$

On peut réécrire

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + ...\right) = \frac{5}{36} \cdot \left(1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \left(\frac{25}{36}\right)^3 + ...\right)$$

Il s'agit d'une série géométrique avec $r = \frac{25}{36}$.

Comme $|r| < 1$ cette limite existe. On obtient

$$p = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$$