Chapitre 20

Probabilités

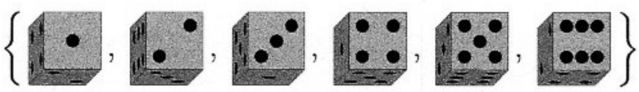
20.1 Univers, événements et probabilités

20.1.1 Univers

Lorsqu'on parle d'une expérience quelconque possédant différentes issues possibles, on appelle *univers* l'ensemble Ω de toutes les *issues élémentaires* ω possibles.

Exemples

1. Si on lance un dé, l'univers est donné par

   $\Omega =$ 

   Que l'on peut se permettre de noter

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas), l'univers est donné par

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte), l'univers est donné par

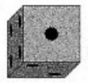
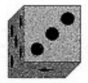
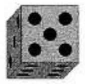
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1), & (1;2), & (1;3), & (1;4), & (1;5), & (1;6), \\ (2;1), & (2;2), & (2;3), & (2;4), & (2;5), & (2;6), \\ (3;1), & (3;2), & (3;3), & (3;4), & (3;5), & (3;6), \\ (4;1), & (4;2), & (4;3), & (4;4), & (4;5), & (4;6), \\ (5;1), & (5;2), & (5;3), & (5;4), & (5;5), & (5;6), \\ (6;1), & (6;2), & (6;3), & (6;4), & (6;5), & (6;6) \end{array} \right\}$$

20.1.2 Événements

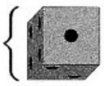
Un *événement* est un sous-ensemble de l'univers Ω. Un *événement élémentaire* est un sous-ensemble à un élément de l'univers Ω (c'est un singleton).

Exemples

1. Si on lance un dé :
   (a) L'événement «le résultat est un nombre impair» correspond au sous-ensemble de Ω suivant.

   $P = \{$  ,  ,  $\}$ ou $P = \{1, 3, 5\}$

   (b) L'événement «le résultat est un 1» correspond au sous-ensemble de Ω suivant.

   $T = \{$  $\}$ ou $T = \{1\}$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas) :
   (a) L'événement «il y a (au moins) un 1 qui apparait» correspond à :
   $$U = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}\}$$
   (b) L'événement «la somme des nombres vaut au moins 11» correspond à :
   $$S = \{\{5,6\}, \{6,6\}\}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte) :
   (a) L'événement «le premier dé tombe sur 1» correspond à :
   $$D_1 = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6)\}$$
   (b) L'événement «le deuxième dé tombe sur 1» correspond à :
   $$D_2 = \{(1;1), (2;1), (3;1), (4;1), (5;1), (6;1)\}$$

Définitions

1. On dit qu'un événement A *a lieu* si l'une des issues de A se produit lors du déroulement de l'expérience.
2. Chaque univers Ω admet un *événement impossible*, il s'agit de l'ensemble vide $\emptyset$.
3. Chaque univers Ω admet un *événement certain*, il s'agit de l'ensemble Ω.
4. Chaque événement A ($\subset \Omega$), admet son *événement complémentaire*, noté $\overline{A}$ et défini par
   $$\overline{A} = \complement_\Omega A \ (= \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\})$$
5. Deux événements A et B sont dit *incompatibles* s'ils s'excluent mutuellement. Autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.
6. Deux événements A et B sont dit *indépendants* si le fait que l'un ait lieu n'influence pas la possibilité que l'autre ait lieu (et vice-versa).

Ici, on remarque que l'événement T est un événement élémentaire, que les événements U et S sont incompatibles et que les événements D_1 et D_2 sont indépendants.

Remarque.

Soit A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles, alors on peut montrer que A et B ne sont pas incompatibles.

20.1.3 Probabilités : la fonction probabilité

On définit une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements. En d'autres termes, pour CHAQUE événement A d'une expérience aléatoire ($A \subset \Omega$), on associe un UNIQUE nombre, appelé *probabilité*, noté $\mathbb{P}(A)$. Cette fonction probabilité obéi aux règles de base suivantes appelées *axiomes.*

1. $\boxed{\mathbb{P}(A) \geqslant 0}$.
2. $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$.
3. $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ si } A \text{ et } B \text{ sont des événements incompatibles}}$.

Conséquences

Les règles suivantes peuvent se déduire des deux axiomes précédents.

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, et sa conséquence directe $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Slogan La probabilité associée à A mesure la proportion de A dans l'univers Ω.

C'est comme si on disait que Ω avait une aire de 1. On peut retrouver rapidement toutes ces règles par des considérations sur les aires.

Remarque

Lorsque Ω est un ensemble fini, il suffit d'attribuer un nombre entre 0 et 1 à chaque événement élémentaire de manière à ce que la somme des probabilités associées aux événements élémentaires soit égale à 1.

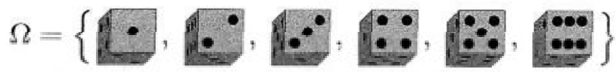
Par abus de langage, on note $\mathbb{P}(\omega)$ la probabilité d'une issue élémentaire (au lieu de $\mathbb{P}(\{\omega\})$ qui est aussi accepté). Dans ce cas, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)}$$

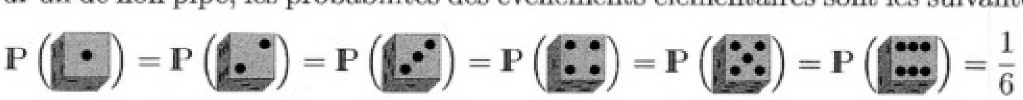
Cela signifie que la probabilité de A est la somme des probabilités des issues élémentaires de A

Exemples

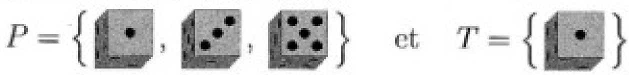
1. Si on lance un dé, l'univers est le suivant.



Pour un dé non pipé, les probabilités des événements élémentaires sont les suivantes.



On avait considéré les événements suivants.



Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(P) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T) = \frac{1}{6}$$

2. Si on lance deux dés simultanément (l'ordre ne compte pas), l'univers est donné par

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}, & \{1,2\}, & \{1,3\}, & \{1,4\}, & \{1,5\}, & \{1,6\}, \\ & \{2,2\}, & \{2,3\}, & \{2,4\}, & \{2,5\}, & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\}, & \{3,4\}, & \{3,5\}, & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\}, & \{4,5\}, & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\}, & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}$$

Pour des dés non pipés, les probabilités des événements élémentaires ne sont pas les mêmes.

(a) Lorsque les deux dés tombent sur le même nombre.

$$\mathbb{P}(1,1) = \mathbb{P}(2,2) = \mathbb{P}(3,3) = \mathbb{P}(4,4) = \mathbb{P}(5,5) = \mathbb{P}(6,6) = \frac{1}{36}$$

(b) Lorsque les deux dés n'ont pas la même valeur (il y a deux possibilités d'avoir $\{1,2\}$: soit on fait $(1;2)$, soit on fait $(2;1)$).

$$\mathbb{P}(1,2) = \cdots = \mathbb{P}(1,6) = \mathbb{P}(2,3) = \cdots = \mathbb{P}(2,6) = \cdots = \mathbb{P}(5,6) = \frac{2}{36}$$

On a bien un total de 1 pour les probabilités des événements élémentaires.

$$6 \cdot \frac{1}{36} + 15 \cdot \frac{2}{36} = \frac{6+30}{36} = 1$$

On avait considéré les événements suivants.

$$U = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}\} \quad \text{et} \quad S = \{\{5,6\},\{6,6\}\}$$

Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(U) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{11}{36} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3. Si on lance deux dés l'un après l'autre (l'ordre compte), l'univers est donné par

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1), & (1;2), & (1;3), & (1;4), & (1;5), & (1;6), \\ (2;1), & (2;2), & (2;3), & (2;4), & (2;5), & (2;6), \\ (3;1), & (3;2), & (3;3), & (3;4), & (3;5), & (3;6), \\ (4;1), & (4;2), & (4;3), & (4;4), & (4;5), & (4;6), \\ (5;1), & (5;2), & (5;3), & (5;4), & (5;5), & (5;6), \\ (6;1), & (6;2), & (6;3), & (6;4), & (6;5), & (6;6) \end{array} \right\}$$

Pour des dés non pipés, les probabilités des événements élémentaires sont les suivantes.

$$\mathbb{P}(i,j) = \frac{1}{36} \quad \text{pour tout } i,j \in \{1,\ldots,6\}$$

On avait considéré les événements suivants.

$$D_1 = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6)\}$$
$$\text{et } D_2 = \{(1;1),(2;1),(3;1),(4;1),(5;1),(6;1)\}$$

Ces événements ont donc les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(D_2)$$

20.1.4 Événements équiprobables

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on parle d'*événements élémentaires équiprobables.*

Théorème

On considère une expérience pour laquelle Ω est fini et les événements élémentaires sont équiprobables. Si A est un événement, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas totaux}}$$

Preuve

En effet, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) \overset{(\bigstar)}{=} \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

car les événements élémentaires sont équiprobables ($\bigstar$). $\square$

Exemples (voir page précédente)

1. Lorsqu'on lance un dé non pipé, le théorème s'applique.
2. Lorsqu'on lance deux dés simultanément, le théorème ne s'applique pas.
3. Lorsqu'on lance deux dés en tenant compte de l'ordre, le théorème s'applique.

20.2 Probabilités conditionnelles

20.2.1 Probabilités conditionnelles

Parfois il est utile de donner une probabilité en utilisant une information connue.

Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω. On suppose que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
La *probabilité conditionnelle de A sachant que B a eu lieu* est notée $\mathbb{P}(A|B)$ et est définie par :

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Interprétation

Cela revient à travailler dans un nouvel univers, donné par B. La formule s'explique donc ainsi : On mesure la probabilité de l'événement A dans l'événement B. En termes d'aire, il faudrait regarder non plus les aires dans l'univers Ω, mais dans le nouvel univers B.

Moralement, on peut se dire que la connaissance du fait que B ait eu lieu restreint l'univers.

Formule équivalente On a la formule $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$.

20.2.2 Événements indépendants

Définitions

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.

1. On dit que A *est indépendant de* B lorsque

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)}$$

   Autrement dit, le fait de savoir si B a eu lieu ne change pas la probabilité que A ait lieu.

2. On dit que A *et* B *sont indépendants* lorsque
   (a) A est indépendant de B ;
   (b) B est indépendant de A.

Conséquences

1. Soit A et B deux événements d'un univers Ω. Alors on a

$$\boxed{A \text{ est indépendant de } B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

   En effet,

   "$\Rightarrow$" Comme A est indépendant de B, on a $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ainsi on a

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

   "$\Leftarrow$" La formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$ est toujours vraie. L'hypothèse dit que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

   Par conséquent on a $\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

   En divisant par $\mathbb{P}(B)$ de chaque côté, on obtient $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, ce qui signifie que A est indépendant de B.

2. La formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ est symétrique, donc on a les équivalences

$$\boxed{\begin{aligned} A \text{ est indépendant de } B &\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ &\iff \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \iff B \text{ est indépendant de } A \end{aligned}}$$

3. Ainsi, on a évidemment les équivalences

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} A \text{ est indépendant de } B & \iff & A \text{ et } B \text{ sont indépendants} & \iff & B \text{ est indépendant de } A \\ \Updownarrow & & & & \Updownarrow \\ \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) & \iff & \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) & \iff & \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \end{array}}$$

   C'est pour cette raison que les auteurs qui désirent éviter de définir l'indépendance à l'aide d'une probabilité conditionnelle utilisent l'équivalence suivante.

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}$$

Exemples

1. L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé bien équilibré.
   On considère les deux événements

   A : le résultat est un nombre pair.

   B : le résultat est plus grand ou égal à 5.

			B
	1	3	5
A	2	4	6

   On a

$$\mathbb{P}(A) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \tfrac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \tfrac{1}{6} \qquad \mathbb{P}(B|A) = \tfrac{1}{3}$$

   On voit ainsi que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

   Ainsi, A et B sont indépendants.

2. L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé bien équilibré.
   On considère les deux événements

   A : le résultat est plus petit que 3.

   B : le résultat est plus grand que 4.

A		B
1	3	5
2	4	6

   On a

$$\mathbb{P}(A) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3} \qquad \mathbb{P}(B) = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = 0 \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \qquad \mathbb{P}(B|A) = 0$$

   On voit ainsi que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \qquad \mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A) \qquad \mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B)$$

   Ainsi, A et B ne sont pas indépendants.

20.2.3 Formule de Bayes

On peut trouver un résultat très intéressant en utilisant les formules de probabilité conditionnelle.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}\big((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})\big)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}
\end{aligned}$$

On a donc démontré la *formule de Bayes*.

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}}$$

20.3 Méthodes de calcul de probabilités

Voici différents problèmes classés selon leur méthode de résolution.

20.3.1 Par dénombrement

Cette méthode utilise directement la formule vue précédemment et appliquée lors des premiers exemples.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)}$$

Cela signifie que la probabilité de A est la somme des probabilités des issues élémentaires de A

Pour appliquer cette formule il faut connaître la probabilité de chaque issue élémentaire.

20.3.2 Par règles de probabilité

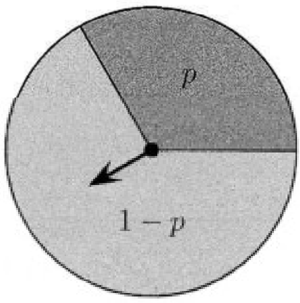
Il s'agit ici d'utiliser une règle de probabilité qui permet de calculer la probabilité cherchée.

Exemples

1. Application de la formule de probabilité conditionnelle.

   Parfois on effectue des sondages à propos de questions sensibles (avortement, maladie, informations confidentielles, informations privées protégées par la loi, etc.). Prenons ici l'exemple de la tricherie lors d'épreuves à l'école. Il faut trouver une méthode permettant de déterminer la proportion des personnes questionnées qui ont triché lors d'une épreuve sans pour autant savoir ce qu'il en est de chaque personne interrogée (afin que chacune puisse se confier sans crainte).

   Pour cela, on construit un disque scindé en deux parties, l'une de proportion p et l'autre de proportion $1 - p$. Disons que la partie en gris foncé correspond à l'événement T «J'ai triché» et que la partie en gris clair correspond à l'événement $\overline{T}$ «Je n'ai pas triché». Sur ce disque on installe une aiguille, on le cache dans une boîte afin que seule la personne interrogée puisse le voir. L'aiguille est actionnée et s'arrête aléatoirement sur une partie du disque. La personne répond «vrai» (événement V) ou «faux» (événement F) selon ce que montre l'aiguille.



   On combine l'axiome 3 et la formule de probabilité conditionnelle.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}((V \cap T) \cup (V \cap \overline{T})) = \mathbb{P}(V \cap T) + \mathbb{P}(V \cap \overline{T}) \\ &= \mathbb{P}(V|T) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|\overline{T}) \cdot \mathbb{P}(\overline{T})\end{aligned}$$

Cette formule est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|\overline{T}) \cdot \mathbb{P}(\overline{T}) \\
&\iff \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|\overline{T}) \cdot (1 - \mathbb{P}(T)) \\
&\iff \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|\overline{T}) - \mathbb{P}(V|\overline{T})\mathbb{P}(T) \\
&\iff \mathbb{P}(V) = \big(\mathbb{P}(V|T) - \mathbb{P}(V|\overline{T})\big) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|\overline{T}) \\
&\iff \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(V|\overline{T}) = \big(\mathbb{P}(V|T) - \mathbb{P}(V|\overline{T})\big) \cdot \mathbb{P}(T)
\end{aligned}$$

On peut ainsi isoler la probabilité à calculer.

$$\mathbb{P}(T) = \frac{\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(V|\overline{T})}{\mathbb{P}(V|T) - \mathbb{P}(V|\overline{T})}$$

Lorsque le nombre de personnes interrogées est très grand, la proportion des personnes qui ont dit «vrai», notée c, permet d'estimer[1] $\mathbb{P}(V)$. Cela permet d'estimer $\mathbb{P}(T)$ qui livre la proportion de personnes ayant triché lors d'une épreuve. Or, la manière dont le disque est construit nous dit que $\mathbb{P}(V|T) = p$ (car une personne qui a triché ne peut répondre vrai que si l'aiguille s'arrête dans la zone grise foncée de proportion p) et $\mathbb{P}(V|\overline{T}) = 1 - p$ (car une personne qui n'a pas triché ne peut répondre vrai que si l'aiguille s'arrête dans la zone grise claire de proportion $1-p$). On peut ainsi estimer la proportion cherchée.

$$\mathbb{P}(T) = \frac{\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(V|\overline{T})}{\mathbb{P}(V|T) - \mathbb{P}(V|\overline{T})} = \frac{\mathbb{P}(V) - (1-p)}{p - (1-p)} \overset{\mathrm{P}(V)\cong c}{\cong} \frac{c+p-1}{2p-1}$$

On remarque que $p = \frac{1}{2}$ ne convient pas. En effet cela reviendrait à scinder le disque en deux parties égales. On ne pourrait plus en déduire quoi que ce soit.

2. Application de la formule de Bayes.

   Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit p la probabilité que l'élève connaisse la réponse et donc $1-p$ celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité $\frac{1}{m}$ où m est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?

   Soient E et F respectivement les événements «il connaît vraiment la réponse» et «l'étudiant répond correctement à la question». Alors

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E})} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{m \cdot p}{1 + (m-1)p}$$

   En prenant par exemple $m = 5$ (cinq réponses possibles pour chaque question) et $p = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux de répondre juste), la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi $\frac{5}{6}$.

1. Il s'agit de la loi des grands nombres

20.3.3 Par arbre

Cette méthode est extrêmement pratique pour calculer les probabilités lorsque l'expérience consiste en des *épreuves successives*.

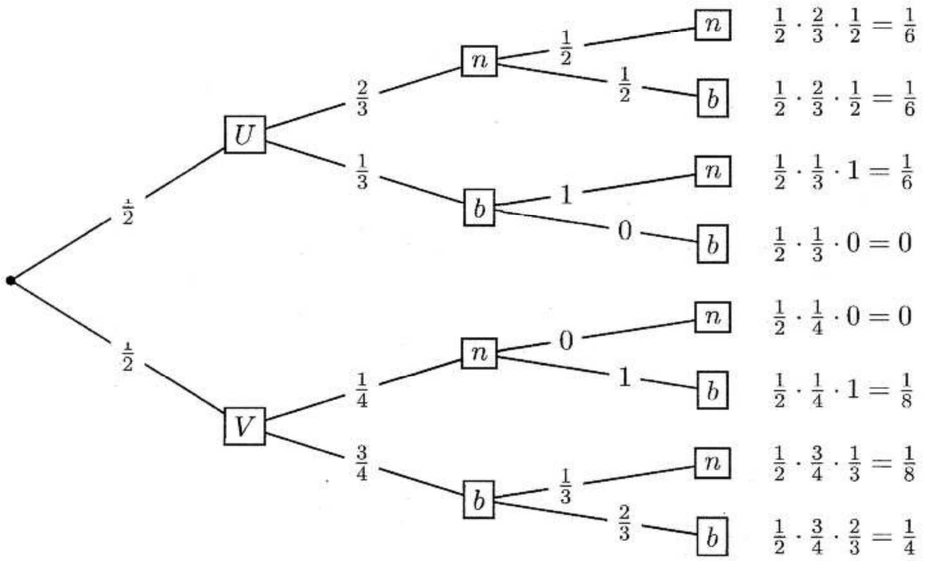
Dans de nombreux cas, une expérience E se décompose en n épreuves successives. Les issues élémentaires possibles sont alors des n-uplets $(E_1; E_2; \ldots; E_n)$.

Exemple

On considère deux urnes U et V extérieurement identiques. L'urne U contient 2 boules noires et 1 blanche et V contient 1 boule noire et 3 blanches.

On choisit d'abord au hasard une des deux urnes, puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

On représente chaque cas possible à l'aide de l'arbre suivant.



La probabilité d'une branche est égale au produit des probabilités de chaque épreuve de la branche. En effet, la formule de probabilité conditionnelle nous dit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$$

En appliquant cette formule n fois, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) \\ &= \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2|E_1) \cdot \mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \mathbb{P}(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \end{aligned}$$

Comme chaque bout de branche constitue une issue élémentaire, les probabilités données par les produits sont les probabilités élémentaires de l'épreuve. Ainsi pour calculer les probabilités associées à des événements plus complexes, on utilise la formule de la précédente méthode de calcul ($\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$).

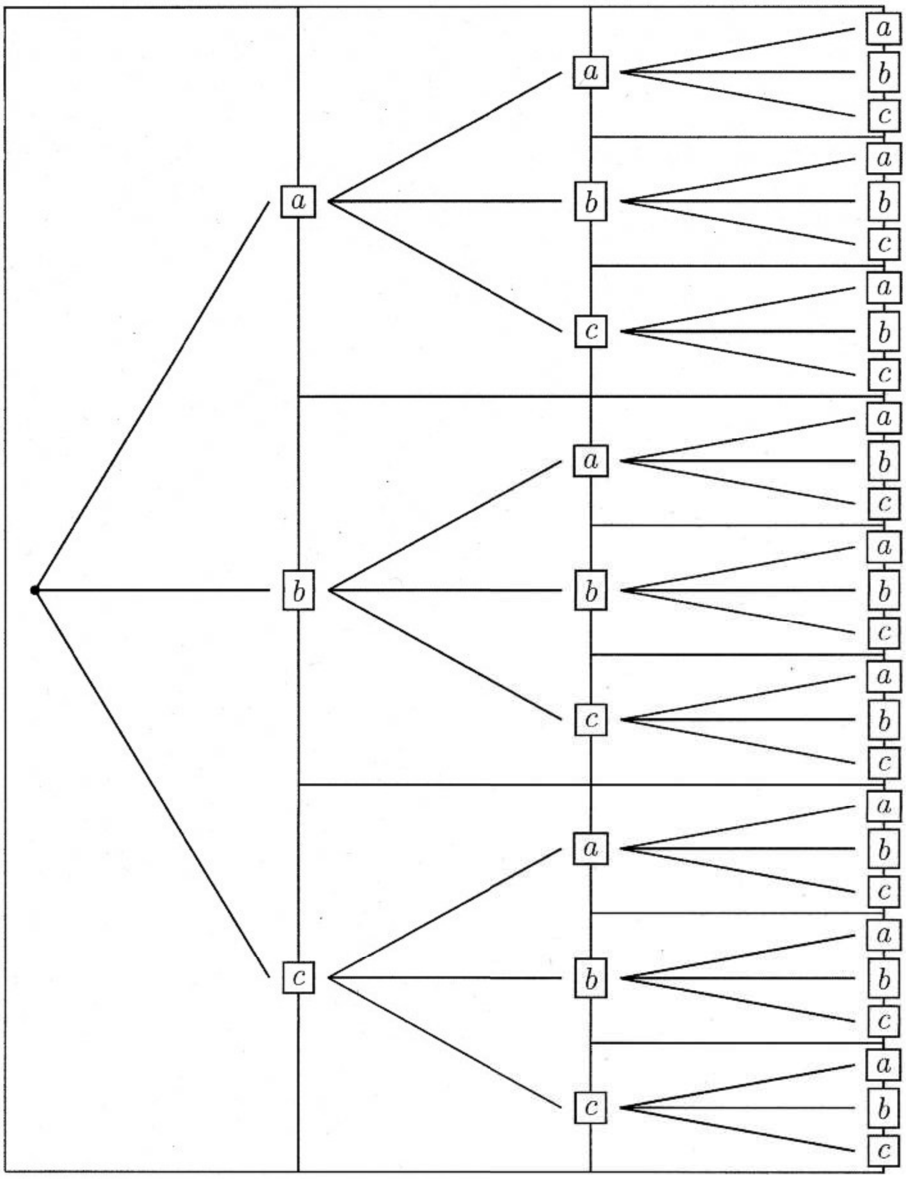
Remarque

Si les épreuves successives sont indépendantes, on a

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3) \cdots \mathbb{P}(E_n)$$

20.3.4 La technique des anagrammes

Imaginons une expérience avec trois issues possibles a, b et c de probabilité p_a, p_b et p_c. Imaginons encore que l'on répète cette expérience trois fois de manière indépendante.



La probabilité d'obtenir une fois a, une fois b et une fois c est donnée par :

$$p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{b} \mid \text{c}} = 3!p_ap_bp_c = 6p_ap_bp_c$$

La probabilité d'obtenir deux fois a et une fois c est donnée par :

$$p_a \cdot p_a \cdot p_c \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{c}} = \tfrac{3!}{2!}p_ap_ap_c = 3p_a^2p_c$$

La probabilité d'obtenir trois fois a est donnée par :

$$p_a \cdot p_a \cdot p_a \cdot \text{nombre d'anagrammes de } \boxed{\text{a} \mid \text{a} \mid \text{a}} = \tfrac{3!}{3!}p_ap_ap_a = p_a^3$$

En fait le nombre d'anagrammes correspond à chaque fois au nombre de chemins sur l'arbre correspondant au problème voulu. Cette technique est très efficace et se généralise aisément à de multiples cas d'épreuves successives. Elle permet aussi une rédaction plus condensée qu'un arbre puisqu'on n'écrit que les branches concernées.

20.4 La loi binomiale et la loi multinomiale

La loi binomiale

On considère une expérience composées de n épreuves successives. Supposons de plus que chaque épreuve admette 2 issues possibles (succès ou échec) et que les épreuves successives ainsi obtenues sont indépendantes. Notons p la probabilité d'un succès et q $(= 1 - p)$ la probabilité d'un échec lors d'une épreuve. On dit qu'une telle expérience suit une *loi binomiale.*

La probabilité d'avoir k succès (ou $n - k$ échecs par symétrie), notée $\mathbb{P}(n, k)$, parmi les n épreuves est donnée par la formule suivante.

$$\mathbb{P}(n,k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Preuve de la formule grâce à la technique des anagrammes

L'arbre correspondant à l'expérience possède 2^n branches. Pour calculer $\mathbb{P}(n, k)$, il suffit de compter les branches qui correspondent exactement à k succès. Ce nombre correspond au nombre d'anagrammes de

$$\underbrace{\boxed{s}\boxed{\cdots}\boxed{s}}_{k \text{ termes}}\underbrace{\boxed{e}\boxed{\cdots}\boxed{e}}_{n-k \text{ termes}}$$

Il y a donc $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ telles branches et chacune a une probalilité $p^k q^{n-k}$ de se réaliser. D'où la formule ci-dessus. □

La loi multinomiale

On considère une expérience composées de n épreuves successives. Supposons de plus que chaque épreuve admette m issues possibles, notées i_1, ..., i_m, et que les épreuves successives ainsi obtenues sont indépendantes. Notons $p_1, \ldots, p_m$ la probabilité de chaque issue lors d'une épreuve. On dit qu'une telle expérience suit une *loi multinomiale.*

La probabilité d'obtenir k_1 fois la première issue, k_2 fois la deuxième issues, ..., k_m fois la m-ième issue est donnée par la formule suivante.

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

Preuve de la formule grâce à la technique des anagrammes

L'arbre correspondant à l'expérience possède m^n branches. Pour calculer la probabilité cherchée, il suffit de compter les branches qui correspondent exactement à k succès. Ce nombre correspond au nombre d'anagrammes de

$$\underbrace{\boxed{i_1}\boxed{\cdots}\boxed{i_1}}_{k_1 \text{ termes}}\underbrace{\boxed{i_2}\boxed{\cdots}\boxed{i_2}}_{k_2 \text{ termes}}\cdots\underbrace{\boxed{i_m}\boxed{\cdots}\boxed{i_m}}_{k_m \text{ termes}}$$

Il y a donc $\dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$ telles branches et chacune a une probalilité $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ de se réaliser. D'où la formule ci-dessus. □

20.5 L'espérance de gain

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire et qu'on décide d'associer une somme d'argent à chaque issue élémentaire, on peut se demander quel est le gain moyen qu'on est en droit d'espérer à chaque partie. L'*espérance de gain* est la moyenne des gains pondérés par leur probabilité.

Premier exemple

Albert et Béatrice jouent à pile ou face. Si la pièce tombe sur pile, alors Albert donne 1 CHF à Béatrice ; si la pièce tombe sur face, alors Béatrice donne 2 CHF à Albert.

Les issues élémentaires sont : *pile* ou *face*. L'espérance de gain d'Albert est :

$$\text{espérance de gain} \;=\; \underbrace{-1}_{\substack{\text{Albert perd}\\ \text{1 CHF si la}\\ \text{pièce tombe}\\ \text{sur pile}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{que la pièce}\\ \text{tombe sur}\\ \text{pile}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{Albert gagne}\\ \text{2 CHF si la}\\ \text{pièce tombe}\\ \text{sur face}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{probabilité}\\ \text{que la pièce}\\ \text{tombe sur}\\ \text{face}}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, EN MOYENNE, Albert peut espérer gagner 0.50 CHF à chaque partie. C'est une espérance théorique, puisque cela n'arrivera jamais en une seule partie. Néanmoins, sur 1000 parties les gains qu'Albert peut espérer se montent à 500 CHF. Il faut considérer l'espérance comme une MOYENNE THÉORIQUE. Si Albert est malchanceux, son gain sera en-dessous de son espérance, s'il est chanceux, son gain sera en-dessus de son espérance. Néanmoins, plus le nombre de parties devient grand, plus son gain se rapprochera de son espérance (c'est un théorème mathématique que l'on appelle *loi des grands nombres*).

Deuxième exemple

À l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, on associe à chaque issue la somme d'argent correspondant à la somme des nombres montrés par ces deux dés.

Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF	Issue	CHF
⚀ ⚀	2	⚀ ⚁	3	⚀ ⚂	4	⚀ ⚃	5	⚀ ⚄	6	⚀ ⚅	7
⚁ ⚀	3	⚁ ⚁	4	⚁ ⚂	5	⚁ ⚃	6	⚁ ⚄	7	⚁ ⚅	8
⚂ ⚀	4	⚂ ⚁	5	⚂ ⚂	6	⚂ ⚃	7	⚂ ⚄	8	⚂ ⚅	9
⚃ ⚀	5	⚃ ⚁	6	⚃ ⚂	7	⚃ ⚃	8	⚃ ⚄	9	⚃ ⚅	10
⚄ ⚀	6	⚄ ⚁	7	⚄ ⚂	8	⚄ ⚃	9	⚄ ⚄	10	⚄ ⚅	11
⚅ ⚀	7	⚅ ⚁	8	⚅ ⚂	9	⚅ ⚃	10	⚅ ⚄	11	⚅ ⚅	12

Si on suppose que les dés sont bien équilibrés, alors chaque issue a autant de chances de se produire (c'est pour cela qu'on a tenu compte de l'ordre). On trouve ainsi le tableau des probabilités suivant :

gain (en CHF)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

L'espérance de gain, notée E, associée à cette expérience est donnée par :

$$E = 2\cdot\tfrac{1}{36}+3\cdot\tfrac{2}{36}+4\cdot\tfrac{3}{36}+5\cdot\tfrac{4}{36}+6\cdot\tfrac{5}{36}+7\cdot\tfrac{6}{36}+8\cdot\tfrac{5}{36}+9\cdot\tfrac{4}{36}+10\cdot\tfrac{3}{36}+11\cdot\tfrac{2}{36}+12\cdot\tfrac{1}{36} = 7 \text{ CHF}$$

Donc, en moyenne, le gain d'un tel jeu est de 7 CHF.