Chapitre 9
La programmation linéaire

Découvrons ce chapitre par un exemple

L'artisan chocolatier

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des œufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kg de cacao, 8 kg de noisette et 14 kg de lait. Le chocolatier a deux spécialités : l'œuf extra et l'œuf sublime. Un œuf extra nécessite 1 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 2 kg de lait. Un œuf sublime nécessite 3 kg de cacao, 1 kg de noisettes et 1 kg de lait. Il fera un profit de CHF 20 en vendant un œuf extra, et de CHF 30 en vendant un œuf sublime.

Combien d'œufs extras et sublimes doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible tout en ne dépassant pas ses réserves ?

Formulation mathématique du problème

Notons x le nombre d'œufs extras et y le nombre d'œufs sublimes à produire. Le chocolatier cherche à maximiser la fonction du bénéfice $B(x;y)$ appelée *fonction objectif*.

$$B(x;y) = 20x + 30y$$

Contraintes

Étant données les réserves de l'artisan, les *contraintes* suivantes devront être satisfaites :

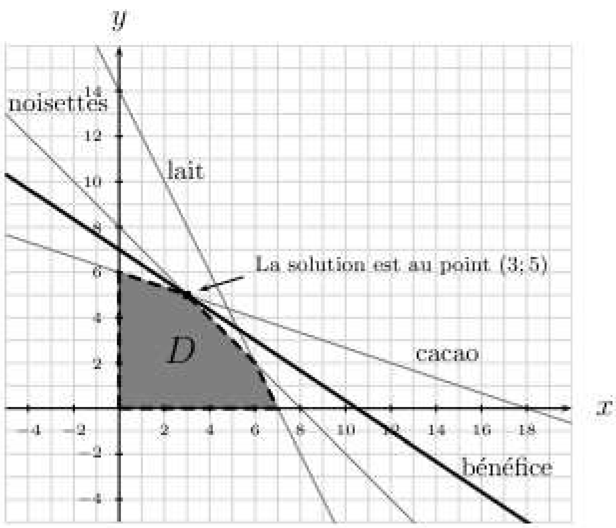
$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 3y & \leqslant & 18 & \text{cacao} \\ x & + & y & \leqslant & 8 & \text{noisettes} \\ 2x & + & y & \leqslant & 14 & \text{lait} \end{array}\right.$$

On a aussi les contraintes évidentes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ x & \in & \mathbb{N} \\ & & \\ y & \geqslant & 0 \\ x & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Représentation graphique du problème

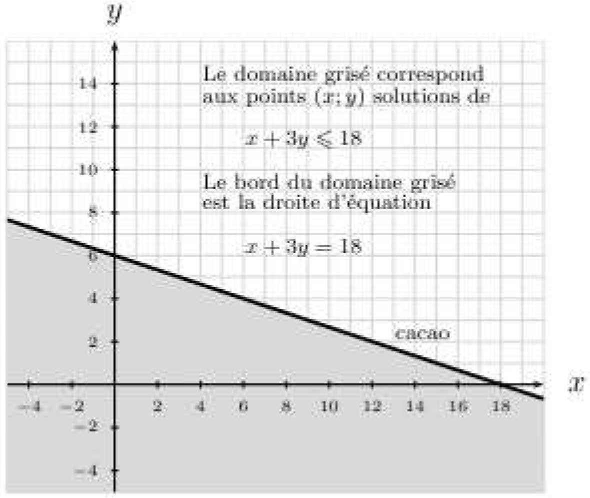
La solution de ce problème peut se visualiser graphiquement :

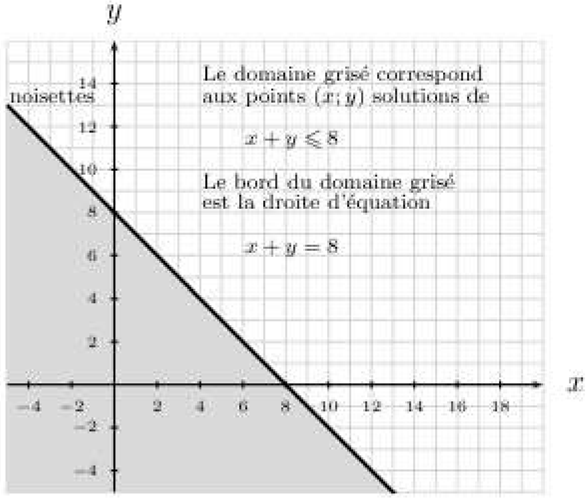


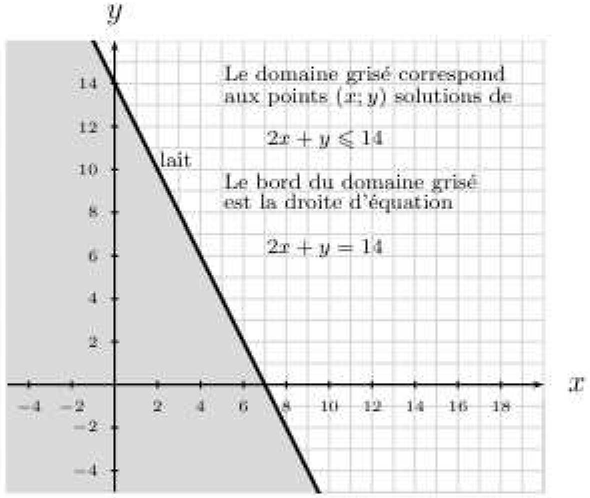
Pour bien comprendre le schéma ci-dessus, expliquons-le étape par étape.

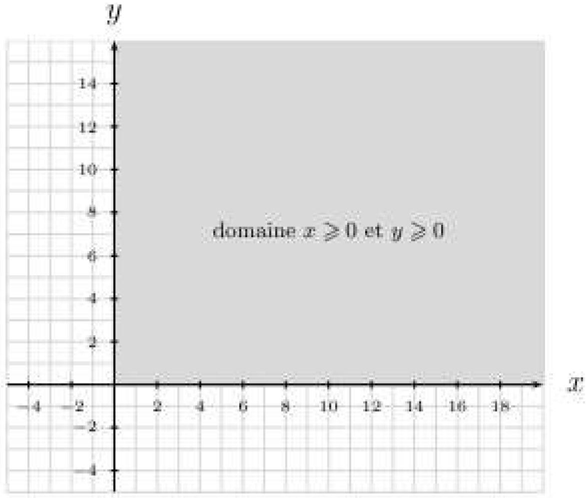
Chaque inéquation livre un demi-plan. Le polygone en gris de l'image précédente est l'intersection de tous les demi-plans livrés par les contraintes.

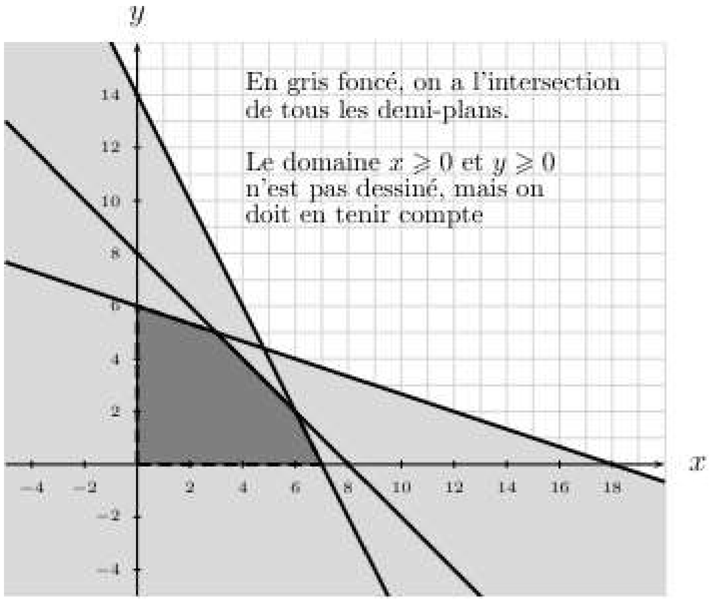
On n'oublie pas les deux contraintes évidentes $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.











La solution se trouve dans ce polygone gris foncé. Mais on n'a pas encore utilisé la connaissance de la fonction à optimiser : le bénéfice.

On doit maximiser le bénéfice $B(x;y)$ donné par

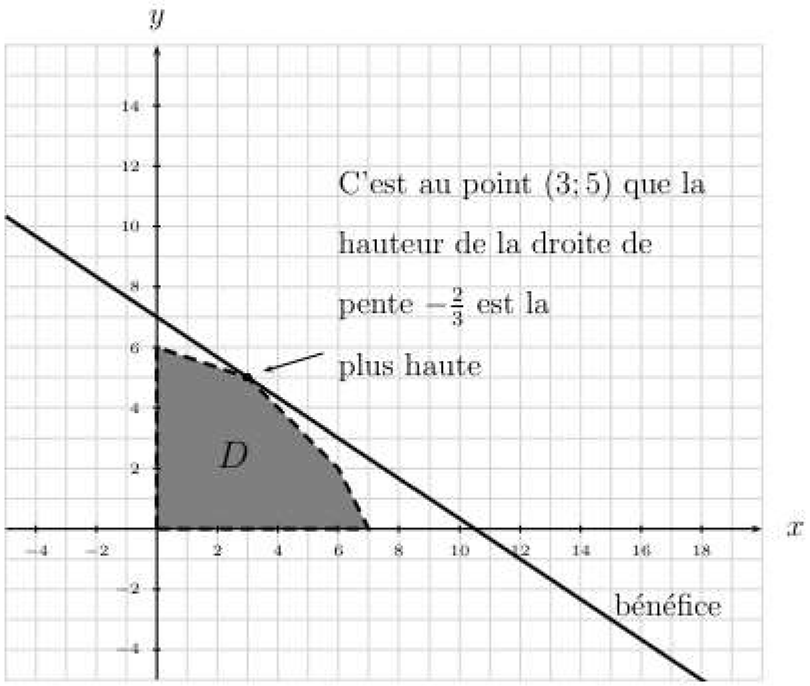
$$B(x;y) = 20x + 30y$$

En soustrayant $20x$ et en divisant par 30, on voit que cette équation est équivalente à

$$y = \frac{B(x;y) - 20x}{30} = -\frac{2}{3}x + \frac{B(x;y)}{30}$$

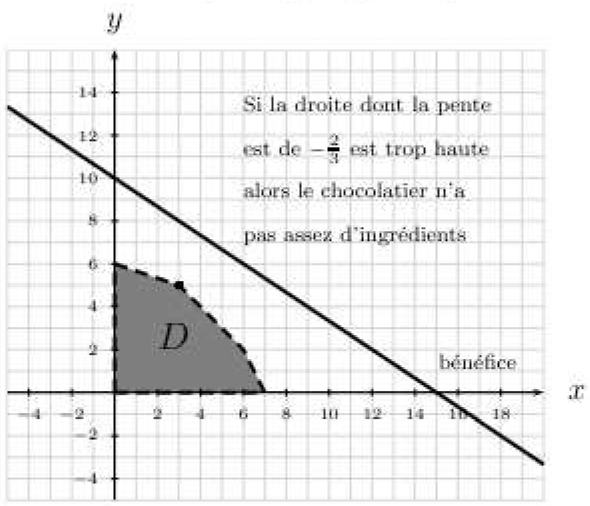
Cela permet de constater que le bénéfice dépend directement de la hauteur de la droite de pente $-\frac{2}{3}$ passant par le point $(x;y)$. Or, les contraintes forcent le point $(x;y)$ à être dans le polygone grisé. Il faut donc trouver la droite de pente $-\frac{2}{3}$ touchant le polygone grisé et ayant la plus grande hauteur possible.

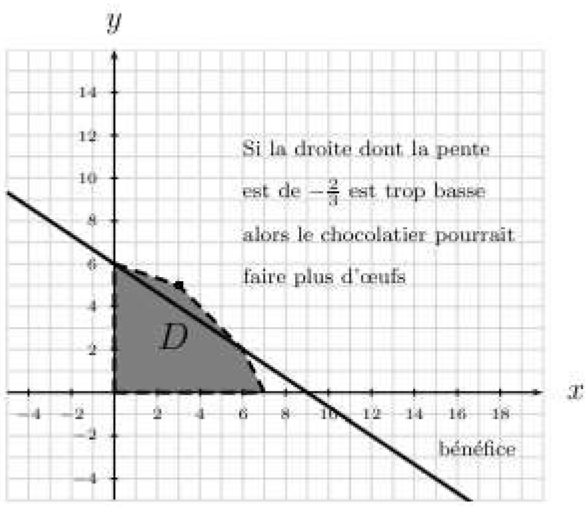
Graphiquement, on trouve le point $(x;y)$ pour lequel le bénéfice est le plus grand en effectuant une translation de la droite de pente $-\frac{2}{3}$.



Ainsi, s'il veut maximiser son bénéfice, le chocolatier doit donc confectionner 3 œufs extras et 5 œufs sublimes. Son bénéfice sera de $B(3;5) = 20 \cdot 3 + 30 \cdot 5 = 210$ CHF. Pour cela, il utilisera 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 11 kg de lait.

Sur le dessin ci-dessous à gauche, le bénéfice est irréalisable et sur celui de droite, le bénéfice n'est pas le plus grand possible.





Quelques remarques utiles

1. Pour savoir de quel côté de la droite se trouve le demi-plan associé à une contrainte, on peut regarder si le point $(0; 0)$ satisfait l'inéquation associée ou non.
2. Dans tout problème de programmation linéaire, la démarche est similaire. Il faut bien regarder les pentes et les hauteurs de la droite qui définit la fonction objectif, afin d'être certain que l'on cherche à résoudre le bon problème.
3. Seuls les points $(x; y)$ faisant partie du domaine grisé satisfont toutes les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera toujours sur le bord de ce domaine et le plus souvent sur l'un de ses sommets.
4. Dans l'exemple de l'artisan chocolatier, les réponses sont des nombres entiers. Mais ce n'est pas toujours le cas. Il faudra donc toujours chercher les coordonnées exactes du sommet que l'on trouve grâce au dessin en calculant l'intersection des deux droites voulues.
5. Lorsque la solution se trouve sur une droite issue d'une contrainte, l'ingrédient correspondant sera complètement utilisé. Dans l'exemple précédent, le point $(3; 5)$ se trouve sur les droites correspondantes au cacao et aux noisettes. Il ne va donc plus rester ni de cacao, ni de noisettes au chocolatier (par contre, il lui restera 3 kg de lait).