Sciences & techniques

Mathématiques, Physique & Chimie

Rapports, proportions et pourcentages

DES LIENS ENTRE LES GRANDEURS

L'homme est depuis toujours fasciné par les proportions. Que ce soit dans les domaines industriels ou artistiques, le respect des « justes » proportions semble être un souci majeur. Mais quelles notions mathématiques se cachent sous ce mot ?

Dans le langage courant, proportion désigne un « rapport de grandeur entre les parties d'une chose, entre les parties et le tout » (Littré) : proportion de la hauteur à la largeur d'une façade, proportion d'azote dans l'air, proportion d'eau dans le corps humain, etc. En mathématiques, la proportion désigne traditionnellement l'égalité de deux rapports.

DÉFINITIONS

- Étant donnés deux nombres m et n (avec n différent de 0), on appelle rapport le quotient de m divisé par n, c'est-à-dire la fraction m/n.
- Étant donnés a, b, c, d (b et d différents de 0), si on a l'égalité $a/b = c/d$, alors on obtient une proportion.

- a et c sont appelés antécédents ;
- b et d sont appelés conséquents ;
- a et d sont appelés extrêmes ;
- b et c sont appelés moyens.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens :

$ad = bc$

Ainsi : $a = bc/d$; $b = ad/c$; $c = ad/b$; $d = bc/a$.

Remarquons en passant qu'une proportion peut être un nombre irrationnel, témoin le nombre d'or $(\sqrt{5} - 1)/2$, proportion de la largeur à la longueur d'un certain rectangle, présumé le plus harmonieux.

RAPPORTS ET SYSTÈMES D'UNITÉ

La notion de proportion est à la base même de toute notion de mesure ou d'unité, car mesurer c'est comparer à une grandeur de référence, qui sert d'unité.

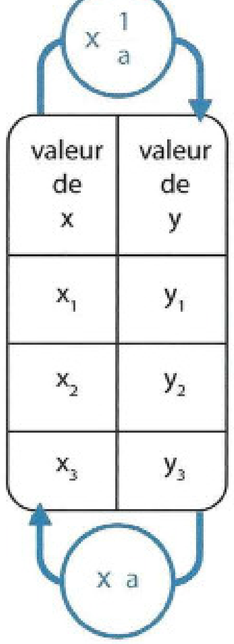
Pour éviter les disparités liée à des références subjectives, se répandit l'usage de l'étalon, dont la valeur était fixée par le gouvernement. Une unité de mesure est donc définie par un étalon. Celui-ci doit avoir les qualités suivantes :

- précision maximale (caractère déterminant car l'étalon peut donc changer si la technologie évolue et en trouve un plus précis) ;
- caractère naturel et invariant (dans le temps et l'espace) ;
- reproductibilité.

GRANDEURS PROPORTIONNELLES

Proportionnalité et fonction linéaire

On dit que deux grandeurs (le nombre de paquets de biscuits et le prix de l'un de ces paquets par exemple) sont proportionnelles si en multipliant une grandeur par un nombre, on multiplie la valeur correspondante de l'autre grandeur par le même nombre.



Il y a plusieurs manières de voir que la suite de nombre (x_1, x_2, x_3) est proportionnelle à la suite (y_1, y_2, y_3) :

- en utilisant des rapports : $y_1/x_1 = y_2/x_2 = y_3/x_3 = a$;
- en utilisant le coefficient de proportionnalité : $y_1 = a.x_1$; $y_2 = a.x_2$; $y_3 = a.x_3$.

Le coefficient de proportionnalité est donc un coefficient multiplicateur permettant de passer de la première à la deuxième ligne d'un tableau de proportionnalité.

Cette situation de proportionnalité peut également se traduire en terme de fonction linéaire.

La fonction qui, à tout nombre relatif x, associe le nombre relatif ax, s'appelle fonction linéaire de coefficient a. Elle se note $f : x \to ax$ ou $f(x) = ax$.

f(x) est l'image du nombre x par la fonction f.

La représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \to ax$ dans un repère orthogonal est une droite passant par l'origine.

Le coefficient a de la fonction linéaire $f : x \to ax$ caractérise l'orientation de la droite représentative par rapport au repère. a est le coefficient directeur de la droite d'équation $y = ax$.

Exemples d'application de la proportionnalité

- Calcul d'une quatrième proportionnelle :

a	b
c	d

Si ce tableau est un tableau de proportionnalité alors $a = (bc)/d$, $b = (ad)/c$, $c = (ad)/b$, $d = (bc)/a$.

En effet, le coefficient directeur de ce tableau est b/a ou d/c. Donc $b = a\,(c/d)$.

Par le théorème du produit en croix, on a toutes les relations recherchées.

- La notion de vitesse moyenne :

Si un mouvement est uniforme alors la distance parcourue d est proportionnelle à la durée t du trajet. Le coefficient de proportionnalité est la vitesse moyenne notée V : $d = V.t$ soit $V = d/t$.

Pourcentages

En statistique ou en mathématiques financières, on utilise souvent des proportions pour comparer des grandeurs. Les proportions peuvent être exprimées sous forme de pourcentages. Dans ce cas, on parle parfois de taux. Par exemple, un taux d'intérêt est la proportion exprimée en pourcentage de l'intérêt sur la somme de départ.

- Donner un pourcentage, c'est exprimer une quantité par rapport à 100.
- Appliquer x % à un nombre donné équivaut à multiplier ce nombre par x/100.
- Augmenter un nombre de x % revient à le multiplier par (1+x/100). Inversement, diminuer un nombre de x% revient à le multiplier par (1-x/100).
- (1+x/100) et (1-x/100) sont appelés des coefficients multiplicateurs.

Propriétés

- Multiplier une grandeur par un coefficient t revient à lui appliquer une variation en pourcentage de (t – 1).100.

Exemples :

- Multiplier une grandeur par 1,15 revient à lui appliquer une variation de (1,15 – 1).100 = 15 % . (cela correspond en fait à une hausse de 15 %)
- Multiplier une grandeur par 0,64 revient à lui appliquer une variation de (0,64 – 1).100 = –36 % (cela correspond en fait à une baisse de 36 %).

Application aux variations successives

Lors d'augmentations ou de diminutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient mais les pourcentages ne s'ajoutent pas.

Exemple : augmenter une grandeur de 30 %, puis de 40 % ne revient pas à l'augmenter globalement de 70 % ! En fait, on la multiplie par (1+30/100)= 1,3, puis par (1+40/100) = 1,4. Ce qui revient à la multiplier en tout par 1,3.1,4 = 1,82. Ce qui correspond à une hausse de (1,82 – 1).100 = 82 %.

Évolution d'une grandeur en pourcentage

L'évolution en pourcentage d'une grandeur est égale à : [(valeur finale – valeur initiale)/valeur initiale].100.

Pourcentage de pourcentage

Prendre x % de y % d'une grandeur revient à prendre directement (xy/100) % de cette grandeur.

MESURES ET RAPPORTS

L'utilité irrévocable des unités provient du monde scientifique, mais aussi économique et commercial qui nécessitent une référence simple et fixe pour leur bon fonctionnement.

Dans l'histoire, les unités se sont multipliées et les volontés d'universalité et de simplicité ont rarement eu une réalité puisque les divergences d'intérêt aidant, les mesures furent longtemps rapportées à une multitude d'étalons, différents selon le lieu, l'époque et la nature du produit. La référence ayant souvent une définition complexe, l'étalon était difficilement reproductible et donc les mesures peu précises, ce qui a hélas conduit à des incompréhensions et incohérences.

Dans l'Égypte ancienne, un charpentier ne pouvait égarer ses outils puisque son corps même faisait office de règle : les unités de mesure dont il se servait se trouvaient sur son bras. En effet, la coudée royale était la distance entre la pointe du coude et l'extrémité du médius. Le doigt représentait la largeur d'un travers de doigt. Ces unités étaient liées entre elles : quatre doigts valaient une palme et sept palmes, une coudée.

Dans certains pays anglo-saxons ou ayant subi une influence anglo-saxonne, on utilise encore de nos jours des unités de mesure ayant pour référence des parties du corps. C'est ainsi que le pied représente la longueur du pied d'un homme, le pouce la largeur d'un pouce, le yard la distance entre le nez et l'extrémité du bras tendu. En France, il existait avant la Révolution un système complexe et relativement peu pratique puisque les mesures variaient d'une région à une autre ce qui exigeait le recours à des calculs d'équivalence fastidieux. Ce genre de système de mesure ne pouvait perdurer compte tenu des disparités physiques entre les personnes !

Cependant, la détermination des étalons est difficile, et en particulier celle du mètre, qui est l'unité à la base des autres.

En 1791, la volonté d'universalité fait dire aux dirigeants qu'il ne faut rien d'arbitraire, ni de particulier à la situation d'un peuple sur le globe qui fasse déterminer l'étalon fondamental, c'est pourquoi, on décide qu'un mètre représentera la dix-millionième partie du méridien terrestre allant du pôle boréal à l'équateur.

En 1795, la mesure du quart du méridien terrestre a été effectuée et correspond à 5 130 740 toises, l'étalon est alors construit, il s'agit d'une règle de platine qui représente le mètre, c'est le seul étalon des poids et mesures nécessaire. Dès lors, toutes les transactions commerciales doivent être effectuées dans le système métrique, un exemplaire de la copie précise du mètre est envoyé par des commissaires dans chaque chef lieu. D'après le décret relatif aux poids et mesures datant du 18 germinal de l'an 3 (7 avril 1795), on appellera :

- mètre, la mesure de longueur égale à la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle boréal et l'équateur ;
- are, la mesure de superficie, pour les terrains, égale à un carré de dix mètres de côté ;
- stère la mesure destinée particulièrement aux bois de chauffage, et qui sera égale au mètre cube ;
- litre, la mesure de capacité, tant pour les liquides que pour les matières sèches, dont la contenance sera celle du cube de la dixième partie du mètre ;
- gramme, le poids absolu d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième partie du mètre, et à la température de la glace fondante.

Par la suite, la définition des unités et de leur « étalonnage » va évoluer, dans le cadre d'un système international.

Unités de mesure

Unités corporelles

Le pied représente la longueur du pied d'un homme, le pouce la largeur d'un pouce et le yard la distance entre le nez et l'extrémité du bras.

Le mètre

Mesure de longueur égale à la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre entre le pôle boréal et l'équateur.

Le litre

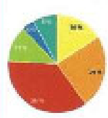
Mesure de capacité dont la contenance sera celle du cube de la dixième partie du mètre.

Le gramme

Poids absolu d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième partie du mètre, à la température de la glace fondante.

Une représentation usuelle

Diagramme circulaire



utilisé pour représenter des données statistiques notamment

Indices et pourcentage

• Définitions :

Soit une grandeur prenant les valeurs A_0, A_1, A_2... aux instants t0, t_1, t_2... survenant à intervalles réguliers. En prenant 100 pour base à la date t_0 :

- on appelle indice à l'instant t_1, le nombre noté $I_{1/0}$ défini par $I_{1/0}=(A_1/A_0).100$.
- on appelle indice à l'instant t_2, le nombre noté $I_2/0$ défini par $I_{2/0}=(A_2/A_0).100$.
- etc...

• Propriétés

- le pourcentage d'évolution de A_1 par rapport à A_0 est égal à $(I_{1/0}-100)$ %.
- Le pourcentage d'évolution de A_2 par rapport à A_0 est égal à $(I_{2/0}-100)$ %
- etc…

Pourcentage moyen, pourcentage global

Imaginons qu'une quantité x varie d'un certain pourcentage t_1 durant une année puis d'un certain pourcentage t_2 l'année suivante. Deux questions naturelles se posent. Quel est le pourcentage global t_g d'évolution sur les deux années ? Quel est le pourcentage moyen annuel tm d'évolution ?

Notons z la quantité après deux années, nous avons donc :

$z=[1+(t_1/100)][1+(t_2/100)]x$.

Posons $c_1=(t_1/100)$ et $c_2=(t_2/100)$.

Le coefficient multiplicateur global est :

$c_g=c_1.c_2$.

On en déduit le pourcentage global :

$t_g=100(c_g-1)=100(c_1c_2-1)=$
$100[(1+(t_1/100))(1+(t_2/100))-1]$
$t_g=100[((t_1+t_2)/100)+((t_1+t_2)/10000)$
$=t_1+t_2+[(t_1.t_2)/100]$

Si cm désigne le coefficient multiplicateur associé à tm, on a $c_{mg}=c_1c2$.

Il apparaît donc que cm est la moyenne géométrique de c_1 et c_2.

On a, en revenant aux pourcentages :

$t_m=100(c_m-1)=100[(\sqrt{(c_1c_2)})-1]$.

STATISTIQUES ET PROPORTIONS

Vocabulaire de la statistique

Exemple : pour faire le trajet entre leur domicile et leur collège

• 46 élèves utilisent un deux-roues,

• 284 élèves utilisent les transports en commun,

• 163 élèves se déplacent à pied,

• 92 élèves sont déposés par leurs parents.

• On appelle population statistique l'ensemble des individus sur lesquels porte l'étude statistique.

Dans cet exemple, la population statistique est l'ensemble de tous les élèves du collège.

• On appelle effectif total de la population statistique le nombre d'éléments de l'ensemble de cette population.

Dans cet exemple, l'effectif total est 46 + 284 + 163 +92 = 585

• On appelle variable statistique ou caractère, la chose que l'on étudie et qui est commune à tous les individus de la population de référence.

• L'ensemble des résultats s'appelle série statistique.

Dans cet exemple, la variable statistique étudiée est le mode de transport utilisé.

• On appelle effectif associé à une valeur de la variable, le nombre de fois où cette valeur apparaît.

Dans cet exemple, l'effectif des individus qui utilisent les transports en commun est 284.

• Une variable est dite quantitative si elle est représentée par un nombre.

Un âge, une distance, une durée, une note sont des variables quantitatives.

• Une variable qui n'est pas quantitative est qualitative.

Une couleur, un diplôme, un prénom sont des variables qualitatives.

• Une variable quantitative est dite discrète si elle ne prend que des valeurs isolées.

Un âge, une note arrondie au demi-point sont des variables discrètes.

• Une variable quantitative est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs comprises entre deux nombres.

La distance entre le domicile et le collège est une variable quantitative continue.

Représentation des données

Représentation en tableau

• Exemple 1 : une enquête réalisée dans un village porte sur le nombre d'enfants à charge par famille. Chaque famille interrogée a donc donné un chiffre correspondant au nombre d'enfants.

Les résultats sont donnés dans la liste ci- dessous :

(une case par résultat).

2 3 0 1 0 1 4 2 2 0 1 6 2 3 0 7
1 0 3 2 1 3 3 1 1 0 7 2 1 5 0 3
2 2 6 1 1 0 2 1 2 1 2 4 1 1

• Exemple 2 : voici les notes obtenues par des élèves lors d'un examen.

15 10,2 17,5 14,6 16,3 8,8 12 7,7 7 15,1
5,9 19,3 6,2 10,6 5
8,4 7,1 12 9,5 2,3 13 10,5 17,2 14,1 8 3,1
10,5 11,1 18,1 3,4
12 9,3 4,3 13,3 11,5 13,8 14,9 5,2 6,4
10,8 11 11,7 16,4 7,6 4

La présentation brute des résultats n'est guère exploitable, il est donc usuel de regrouper les résultats par valeurs identiques dans un tableau.

Pour l'exemple 1 :

nombre d'enfants	nombre de familles
0	8
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Pour l'exemple 2, il n'est pas pratique de prévoir une case par note ! Les variables continues sont donc « toujours » regroupées par classes d'amplitudes égales.

Si une distance d est comprise entre 2 km (valeur incluse) et 5 km (valeur exclue), on notera 2 ! d < 5 ou bien [2 ; 5[: on parle alors de la classe deux-cinq, l'amplitude de cette classe est 5−2 = 3.

Ici, on a choisi de regrouper les notes par classes d'amplitude 4.

notes obtenues	effectifs
[0 ; 4[	
[4 ; 8[	
[8 ; 12[	
[12 ; 16[	
[16 ; 20[	
Total	

Diagramme à secteurs ou circulaire

Pour représenter les différentes parties d'un tout, il est courant de représenter des pourcentages par les outils graphiques que sont les diagrammes.

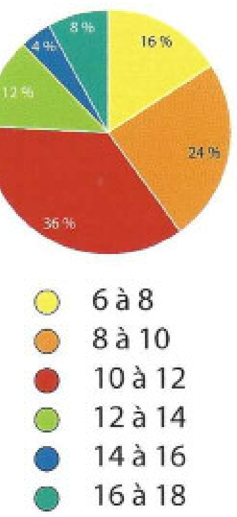
Le plus répandu est sans conteste le diagramme circulaire plus connu sous le nom de « camembert ».

Ce type de diagramme est surtout utilisé pour représenter des variables qualitatives, ou bien continues.

Exemple : dans une classe de 25 élèves, 4 élèves ont eu une moyenne comprise entre 6 et 8 ; 6 élèves ont une moyenne comprise entre 8 et 10 ; 9 élèves ont une moyenne comprise entre 10 et 12 ; 3 élèves ont une moyenne comprise entre 12 et 14 ; 1 élève a une moyenne comprise entre 14 et 16 ; 2 élèves ont une moyenne comprise entre 16 et 18.

En pourcentages : 25 élèves correspondent à 100 % , donc 1 élève correspond à 4 %.

Dans le diagramme, 25 élèves (100 %) correspondent à un angle de 360° ; 1 élève (4 %) correspond à : 360°/25 = 14,4°.



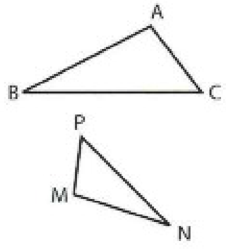
PROPORTION ET GÉOMÉTRIE

Triangles semblables

Définition

Dire que deux triangles sont semblables (ou de même forme) signifie que leurs angles sont deux à deux égaux (ou de même mesure). Remarque : deux triangles isométriques sont également semblables puisque leurs angles sont égaux deux à deux.

Néanmoins, la réciproque est fausse : des triangles semblables ne sont pas systématiquement isométriques.



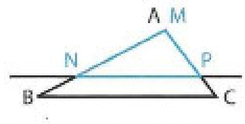
Sur cette exemple, les triangles ABC et MNP sont semblables.

En effet :

$$\begin{cases}\widehat{A}=\widehat{M}\\ \widehat{B}=\widehat{N}\\ \widehat{C}=\widehat{P}\end{cases}$$

Propriétés

Étant donné que la somme des angles d'un triangle est de 180°, deux paires d'angles égaux suffisent à faire de deux triangles des triangles semblables.



Si l'on superpose deux triangles semblables en faisant coïncider les sommets A et M, on aboutit alors à une situation de Thalès. Cela amène à une nouvelle caractérisation de la similitude.

Ce qui about t au théorème suivant : si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

Si on sait que ABC et MNP sont semblables avec les angles A = M, B = N et C = P, alors :

MN/AB = NP/BC = MP/AC = k.

On dit que les côtés de ABC sont proportionnels aux côtés de MNP.

Le rapport k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction. On parle aussi de rapport de similitude.

Pour les triangles isométriques, le coefficient de proportionnalité est égal à 1.

Cette configuration de Thalès a une autre conséquence. A partir d'une paire d'angles et deux paires côtés, il est possible sous certaines conditions de savoir si deux triangles sont de même forme.

D'où le théorème suivant :

Soit ABC et MNP deux triangles quelconques. Si les angles A et M sont égaux et si AB/MN = AC/MP, alors les triangles ABC et MNP sont semblables.

• Remarques :

- Si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction, qui transforme ABC en MNP, alors : aire(MNP) = k.aire(ABC).
- quelques triangles semblables particuliers : tous les triangles équilatéraux sont semblables ainsi que les triangles rectangles isocèles.
- on passe d'une paire de triangles semblables à une paire de triangles isométriques en agrandissant ou réduisant l'un des deux triangles…

Homothétie

Soit O un point et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que les **OM'** = k.**OM**.

Relation fondamentale

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k. Soit A et B deux points quelconques, A' = h(A) et B' = h(B), alors : **A'B'** = k.**AB**.

h est une bijection, sa bijection réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport 1/k.

Cas particuliers

Une homothétie de rapport k différent de 1 admet un seul point invariant : le centre O de l'homothétie.

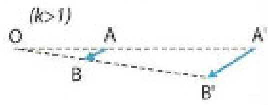
L'homothétie de rapport k = 1 est l'application identité : l'image de tout point M est le point lui-même.

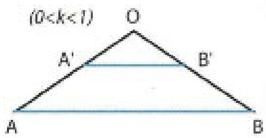
Si k = −1 alors h est une symétrie.

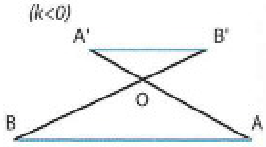
Configuration de Thalès

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k, A et B deux points du plan quelconques et A' = h(A), B' = h(B) leurs images respectives par h. Alors les points O, A, A', B et B' forment une configuration de Thalès.

Réciproquement, dans une configuration de Thalès, les deux triangles sont images l'un de l'autre par une homothétie dont le centre O est leur sommet commun.







On a OA'/OA = OB'/OB = OC'/OC = |k|

Action sur les figures usuelles

L'homothétie conserve les rapports de colinéarité, le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles ainsi que l'alignement.

Une homothétie de rapport k multiplie les distances par |k|, les aires par k^2 et les volumes par $|k^3|$.

Une homothétie h de rapport k transforme un cercle de centre Ω et de rayon R en un cercle de centre Ω' = h(O) et de rayon |k|R.