Chapitre 13

Résolution numérique d'équations

But

Utiliser des méthodes numériques (programmes informatiques) pour trouver les zéros d'une fonction f continue, c'est-à-dire les nombres x tels que $f(x) = 0$.

On va pour cela découvrir deux méthodes parmi de nombreuses méthodes existant sur le marché.

13.1 Méthode de la bissection

Cette méthode utilise le théorème de Bolzano.

Théorème de Bolzano

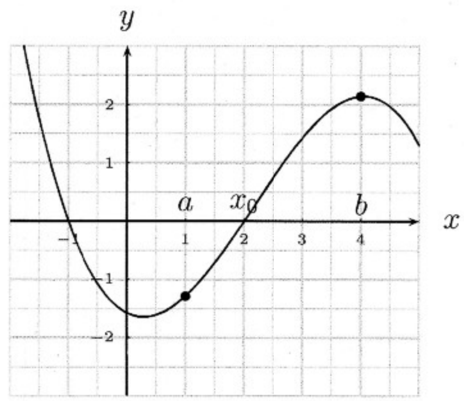
Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$ satisfaisant la condition suivante qui est équivalente à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Alors, il existe (au moins un) $x_0 \in \,]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Illustration

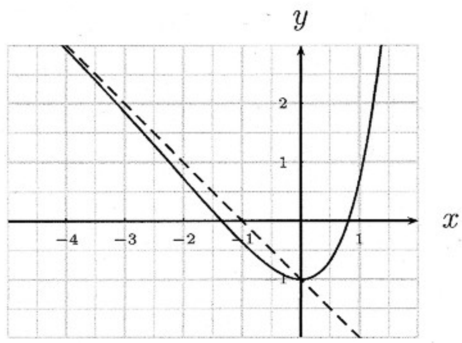
La fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$ et satisfait $f(1) \cdot f(4) < 0$. Elle admet bien un zéro dans l'intervalle $]1, 4[$.



La fin d'un rêve

Les mathématiciens ont toujours cherchés des formules explicites pour trouver les zéros des équations. Ils furent heureux d'en trouver pour résoudre les équations polynomiales de degré 1, 2 (Viète), 3 (Cardan) et 4 (Ferrari). Néanmoins, Galois a montré qu'il n'y avait aucune formule explicite permettant de résoudre celles de degré 5 ou plus.

Il existe aussi des fonctions dont les zéros ne peuvent pas être exprimé par une formule explicite. Par exemple, c'est le cas pour la fonction d'expression $f(x) = xe^x - (x+1)$ dont on voit le graphe ci-contre.



On a $f(-2) \cong 0.729329$, $f(0) = -1$. Donc, par le théorème de Bolzano, on a un zéro dans $]-2, 0[$. De même, comme $f(0) = -1$ et $f(1) \cong 0.718282$, il y a un zéro dans $]0, 1[$.

Approche méthodologique

Pour trouver les zéros d'une fonction, on va développer des méthodes itératives, c'est-à-dire construire des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ qui vont converger vers un zéro, noté x_0.
En d'autres termes :

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

13.1.1 La méthode de la bissection et son algorithme

Soit a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ qui change de signe entre a et b, c'est-à-dire qui satisfait :

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Le théorème de Bolzano nous permet d'affirmer que f admet un zéro entre a et b. Voici un algorithme permettant de construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers ce zéro.

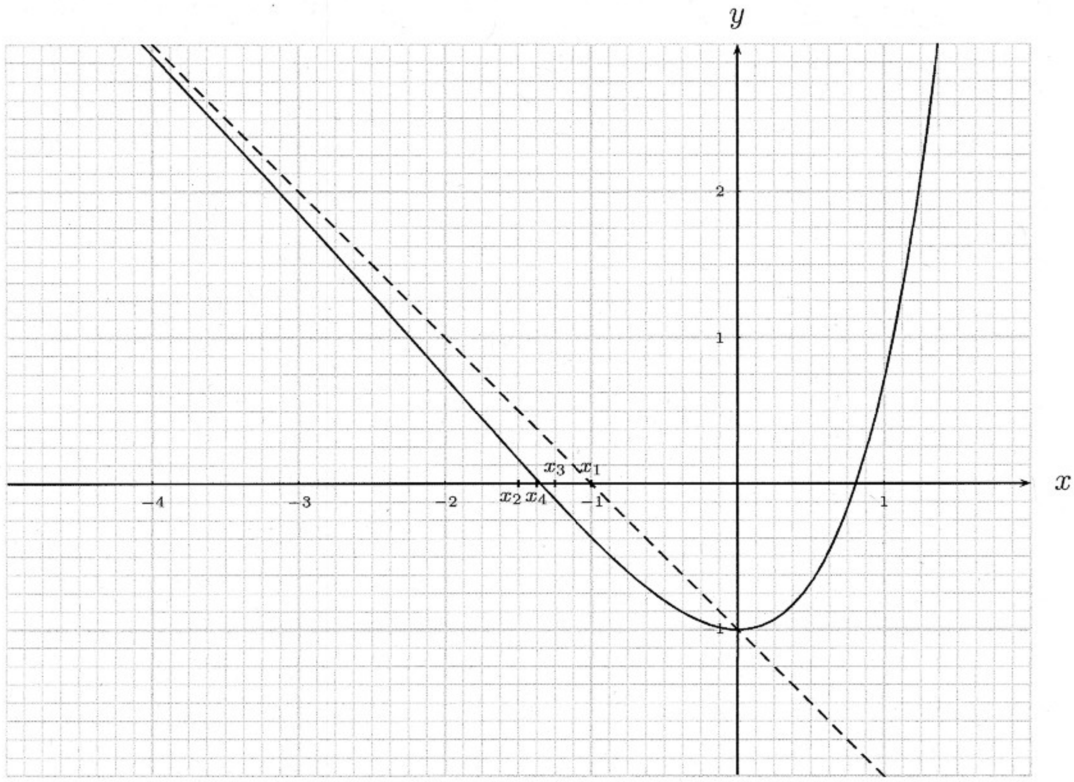
Principe A chaque itération, on coupe l'intervalle contenant un zéro en deux parties égales et on choisit celle où la fonction s'annule.

Algorithme On pose $\alpha_1 = a$, $\beta_1 = b$ et $x_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ (x_1 est le milieu de l'intervalle $[a, b] = [\alpha_1, \beta_1]$). Puis, on distingue les trois cas suivants :

1. $f(x_1) = 0$ (ou $f(\alpha_1)f(x_1) = 0$). Ainsi, x_1 est un zéro. On peut arrêter de chercher.
2. $f(\alpha_1)f(x_1) < 0$. Ainsi, par Bolzano, on sait qu'un zéro se trouve entre α_1 et x_1. On choisit la partie gauche de l'intervalle coupé en deux en x_1. Le nouvel intervalle est $[\alpha_2, \beta_2]$ où $\alpha_2 = \alpha_1$ et $\beta_2 = x_1$.
3. $f(\alpha_1)f(x_1) > 0$. Cela signifie que le signe de $f(\alpha_1)$ est le même que celui de $f(x_1)$. Par conséquent, il y a un changement de signe entre x_1 et β_1. Par Bolzano, un zéro se trouve donc dans la partie droite de l'intervalle coupé en deux en x_1. Le nouvel intervalle est $[\alpha_2, \beta_2]$ où $\alpha_2 = x_1$ et $\beta_2 = \beta_1$.

Puis, on recommence avec l'intervalle $[\alpha_2, \beta_2]$ que l'on coupe en deux en $x_2 = \frac{\alpha_2+\beta_2}{2}$.
Etc…

Interprétation graphique Appliquons cet algorithme à $f(x) = xe^x - (x+1)$ pour trouver quelques décimales du zéro se trouvant dans l'intervalle $[-2, 0]$. On prend $a = -2$ et $b = 0$. On a bien $f(a)f(b) < 0$.



On coupe l'intervalle $[\alpha_1, \beta_1] = [-2, 0]$ en $x_1 = -1$. On a $f(-2)f(-1) < 0$, on choisit donc la moitié de gauche qui est l'intervalle $[\alpha_2, \beta_2] = [-2, -1]$.

On coupe l'intervalle $[\alpha_2, \beta_2] = [-2, -1]$ en $x_2 = -1.5$. On a $f(-2)f(-1.5) > 0$, on choisit donc la moitié de droite qui est l'intervalle $[\alpha_3, \beta_3] = [-1.5, -1]$.

On coupe l'intervalle $[\alpha_3, \beta_3] = [-1.5, -1]$ en $x_3 = -1.25$. On a $f(-1.5)f(-1.25) < 0$, on choisit donc la moitié de gauche qui est l'intervalle $[\alpha_4, \beta_4] = [-1.5, -1.25]$.

On coupe $[\alpha_4, \beta_4] = [-1.5, -1.25]$ en $x_4 = -1.375$. On a $f(-1.5)f(-1.375) > 0$, on choisit donc la moitié de droite qui est l'intervalle $[\alpha_5, \beta_5] = [-1.375, -1.25]$.

On a ainsi $x_5 = -1.3125$.
En continuant, l'algorithme va choisir les moitiés de la manière suivante : gauche ; gauche ; droite ; droite ; gauche ; gauche ; droite ; droite ; gauche ; gauche ; droite ; droite ; droite ; droite ; droite ; droite ; droite ; gauche ; gauche ; gauche ; gauche ; droite ; droite ; droite ; gauche. Ce qui nous donnera $x_{30} = -1.34997649$.

Remarque

Cet algorithme ne permet de trouver qu'un zéro dans l'intervalle de départ $[a, b]$. Si on veut trouver un zéro précis, il faut s'arranger pour choisir a et b de telle manière que seul un zéro se trouve dans cet intervalle (ce que l'on peut facilement faire en regardant le graphe de la fonction).

13.1.2 Critère d'arrêt de l'algorithme

Puisqu'on calcule les éléments d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ un par un, il faut décider d'un critère d'arrêt qui respecte une précision désirée (à moins que, par un coup de chance extraordinaire, l'algorithme s'arrête car il existe i tel que $f(x_i) = 0$).

Définition

Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite qui converge vers x_0. L'*erreur (absolue) au pas n* est définie par :

$$e_n = |x_n - x_0|$$

Théorème

Si on effectue la méthode de la bissection sur une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ (où $f(a)f(b) < 0$). Alors :

$$e_n < \frac{b-a}{2^n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

Preuve

La longueur de l'intervalle de départ $[a, b]$ est égale à $b - a$. Donc l'erreur au pas 1 est forcément plus petite que la moitié de cet intervalle. Autrement dit :

$$e_1 < \frac{b-a}{2}$$

Comme, à chaque itération de l'algorithme, on divise la longueur de l'intervalle (dans lequel le zéro cherché se trouve) par 2, la formule du théorème devient évidente (il faudrait la démontrer par récurrence pour être pédant). Précisons tout de même que dans le cas où il existe i tel que $f(x_i) = 0$, alors l'erreur au pas i vaut zéro. Ce qui reste compatible avec la formule. $\square$

13.2 La méthode du point fixe

Définition

Soit $g : D \to A$ une fonction et $x_0 \in D$. On dit que x_0 est *un point fixe de* g si $g(x_0) = x_0$.

Autrement dit, les points fixes de g sont les solutions de l'équation $g(x) = x$.

Remarque fondamentale

Chercher un zéro x_0 d'une fonction f (c'est-à-dire résoudre l'équation $f(x) = 0$) revient à chercher un point fixe x_0 d'une fonction g bien choisie (c'est-à-dire résoudre l'équation $g(x) = x$). Pour que la fonction g soit bien choisie, il faut que :

$$f(x) = 0 \iff g(x) = x$$

La méthode du point fixe ne fonctionnera que si la fonction g est continue autour du point fixe cherché (qui est le zéro de f).

Exemples de fonction g bien choisie

Reprenons la fonction $f(x) = xe^x - (x+1)$. On a différents choix de fonctions g possible.

1. Premier choix possible : $g_1(x) = xe^x - 1$. En effet, on a :

$$f(x) = 0 \iff xe^x - (x+1) = 0 \iff \underbrace{xe^x - 1}_{g_1(x)} = x$$

2. Deuxième choix possible : $g_2(x) = (x+1)e^{-x}$. En effet, on a :

$$f(x) = 0 \iff xe^x - (x+1) = 0 \iff xe^x = x+1 \iff x = \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{g_2(x)}$$

13.2.1 La méthode du point fixe et son algorithme

On construit de manière itérative une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge vers un zéro x_0 de f.

1. On transforme l'équation l'équation $f(x) = 0$ en $g(x) = x$ avec g continue (au voisinage de x_0).

2. On choisit x_1 moralement proche de x_0.

3. On calcule successivement les éléments de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide de la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

La suite a donc l'allure suivante.

$$\left(\, x_1 \,,\ \underbrace{g(x_1)}_{x_2=g(x_1)} ,\ \underbrace{g(g(x_1))}_{x_3=g(x_2)} ,\ \underbrace{g(g(g(x_1)))}_{x_3=g(x_2)} ,\ \ldots \,\right)$$

Théorème de convergence

Si la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie précédemment converge, alors elle converge vers un point fixe x_0 de g qui sera un zéro de f (voir remarque fondamentale).

Démonstration

On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre appelé x_0. Il faut montrer que x_0 est un point fixe de la fonction g (qui est supposée continue au voisinage de x_0).

Or, dire que x_n tend vers x_0 lorsque n tend vers $+\infty$ est équivalent à dire que la distance entre x_0 et x_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En d'autres termes :

$$x_n \text{ converge vers } x_0 \iff |x_0 - x_n| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En utilisant l'inégalité triangulaire ($|x+y| \leqslant |x| + |y|$), on montre que :

$$\begin{aligned} |x_0 - g(x_0)| &= |x_0 - x_{n+1} + x_{n+1} - g(x_0)| \\ &\leqslant |x_0 - x_{n+1}| + |x_{n+1} - g(x_0)| \\ &= \underbrace{|x_0 - x_{n+1}|}_{\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \quad + \quad \underbrace{|g(x_n) - g(x_0)|}_{\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } g \text{ est continue}} \end{aligned}$$

Donc $|x_0 - g(x_0)| = 0$, c'est-à-dire que $x_0 - g(x_0) = 0$ ou encore que $g(x_0) = x_0$. □

Exemple

On reprend la fonction $f(x) = xe^x - (x+1)$ avec les deux choix de g précédemment vus.

1. Avec $g_1(x) = xe^x - 1$.

   Si on prend $x_1 = -5$, on a $x_2 = g_1(x_1) \cong -1.03369$, puis $x_3 = g_1(x_2) \cong -1.36768$, $x_4 \cong -1.34834$, $x_5 \cong -1.35012$, ..., $x_{10} \cong -1.34998$, ..., $x_{20} \cong -1.34998$.
   On trouve ainsi le zéro de gauche.

   Si on prend $x_1 = 0.8$, on a $x_2 = g_1(x_1) \cong 0.78043$, puis $x_3 = g_1(x_2) \cong 0.70323$, $x_4 \cong 0.42071$, $x_5 \cong -0.35924$, ..., $x_{10} \cong -1.34997$, ..., $x_{20} \cong -1.34998$.
   C'est de nouveau le zéro de gauche !

   Si on prend $x_1 = 0.85$, on a $x_2 = g_1(x_1) \cong 0.98870$, puis $x_3 = g_1(x_2) \cong 1.65737$, $x_4 \cong 7.69367$, $x_5 \cong 166882.1$, $x_6 > 10^{499}$.
   On voit que la suite diverge et on ne trouve pas le zéro de droite.

2. Avec $g_2(x) = (x+1)e^{-x}$.

   Si on prend $x_1 = 0.8$, on trouve $x_2 = g_2(x_1) \cong 0.80879$, puis $x_3 = g_2(x_2) \cong 0.80563$, $x_4 \cong 0.80677$, $x_5 \cong 0.80636$, ..., $x_{10} \cong 0.80647$, ..., $x_{20} \cong 0.80647$.
   C'est le zéro de droite.

   Si on prend $x_1 = -1.3$, on trouve $x_{20} \cong 0.80647$. C'est de nouveau le zéro de droite !

   Si on prend $x_1 = -1.4$, on trouve $x_6 < -10^{499}$. On voit que la suite diverge et on ne trouve pas le zéro de gauche.

Moralité la fonction g_1 permet de trouver le zéro de gauche, mais pas celui de droite, tandis que la fonction g_2 permet de trouver le zéro de droite, mais pas celui de gauche.

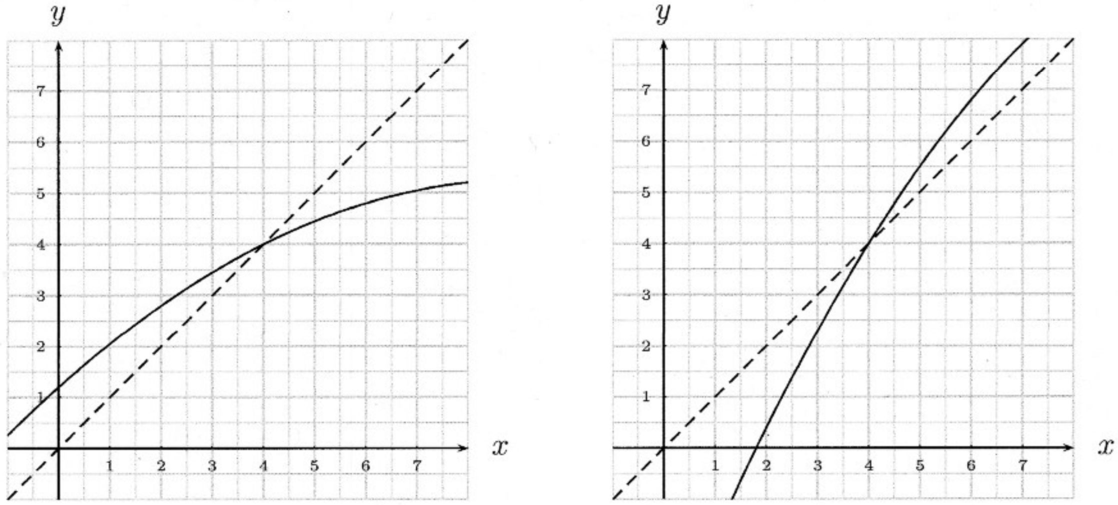
Théorème de sélection

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont la dérivée est continue. Supposons que g admet un point fixe x_0 qui satisfait $|g'(x_0)| < 1$.

Alors, si on choisit x_1 suffisamment proche de x_0, la suite des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers x_0.

Interprétation graphique

cas $g'(x_0) < 1$ cas $g'(x_0) > 1$



Moralité Le choix de la fonction g est très important !

Définition

Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. Une fonction $g : I \to I$ est dite *contractante* si pour tout x, y dans I, il existe un nombre $k \in [0, 1[$ (indépendant de x et de y) qui satisfait :

$$\underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\text{distance entre } g(x) \text{ et } g(y)} \quad \leqslant \quad k \underbrace{|x - y|}_{\text{distance entre } x \text{ et } y}$$

Moralement : Cela signifie que la fonction resserre tous les points de I.

Théorème du point fixe de Banach [1]

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $g : I \to I$ une fonction contractante. Alors g admet un unique point fixe dans l'intervalle I.

Remarque La démonstration fait appel aux suites de Cauchy.

1. Ce théorème se généralise aux espaces $\mathbb{R}^n$ et permet ainsi d'appliquer le même théorème à la construction des fractals par MCRM. Dans ce contexte, le théorème est rebaptisé : théorème de Banach-Hausdorff.

Proposition

Soit I un intervalle fermé et $g : I \to I$ une fonction contractante. Alors pour n'importe quel point $x_1 \in I$, la suite des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ converge (donc converge vers un point fixe de g (voir théorème de convergence)).

Preuve de la proposition

Par le théorème du point fixe de Banach, on sait que la fonction g admet un unique point fixe dans I, que l'on note x_0. Soit x_1 un point quelconque de l'intervalle I et montrons que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, converge vers ce point fixe x_0.

C'est le cas, car l'erreur[2] au pas n, donnée par $e_n = |x_n - x_0|$, diminue de la même façon à chaque itération de l'algorithme du point fixe. En effet :

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - x_0| = |g(x_n) - g(x_0)| \overset{g \text{ contractante}}{\leqslant} k|x_n - x_0| = k\, e_n$$

On a ainsi la relation $e_{n+1} \leqslant k^n e_1$ avec $k \in [0, 1[$ (le nombre k provient de la définition de fonction contractante).

Donc, lorsque $n \to +\infty$, on a $k^n \to 0$ (car $0 \leqslant k < 1$) et ainsi $e_{n+1} \to 0$. Comme l'erreur tend vers 0, la suite converge vers x_0. $\square$

Idée de preuve du théorème de sélection

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $g : I \to I$ une fonction dont la dérivée est continue et satisfait la condition $\bigstar$: $|g'(x)| \leqslant k < 1$ pour tout $x \in I$.

Alors, on peut montrer (grâce au théorème des accroissements finis) que g est contractante. Ainsi, grâce à la proposition précédente, la suite des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers un point fixe $x_0 \in I$.

Le lecteur attentif aura remarqué que dans le théorème de sélection, on ne parle ni d'un intervalle fermé noté I, ni de la condition $\bigstar$.

En effet, c'est pour s'assurer l'existence d'un tel intervalle fermé I que l'on se doit de choisir x_1 suffisamment proche de x_0 ($x_0 \in I$). De même, la condition $\bigstar$ est automatiquement satisfaite pour des x proches de x_0 si on a $|g'(x_0)| < 1$.

13.2.2 La méthode de Newton-Raphson

Il s'agit d'une des méthodes les plus utilisées pour trouver les zéros d'une fonction. La théorie de la méthode du point fixe est reprise telle quelle. L'astuce de Newton-Raphson est d'avoir réussi à trouver une fonction g qui fonctionne toujours !

On suppose que la fonction f dont on cherche les zéros satisfait les conditions : f'' est continue et le zéro cherché x_0 est simple (c'est-à-dire que $f'(x_0) \neq 0$). Remarquons, que dans la pratique, la méthode fonctionne même si le zéro cherché n'est pas simple. On a :

$$f(x) = 0 \iff x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

2. Il s'agit de la même définition que celle se trouvant dans la méthode de la bissection.

On prend donc $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. On a :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Comme $g'(x_0) = 0$ (car $f(x_0) = 0$), le théorème de sélection s'applique et ainsi pour x_1 suffisamment proche de x_0, la suite des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers x_0.

Interprétation graphique : la méthode de la sécante

L'idée de Newton et de Raphson est de construire une suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$, à partir d'un nombre x_1 moralement proche de x_0, de manière à ce que x_{i+1} soit le zéro de la tangente à la fonction f en x_i.

L'équation de la tangente en x_i est

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

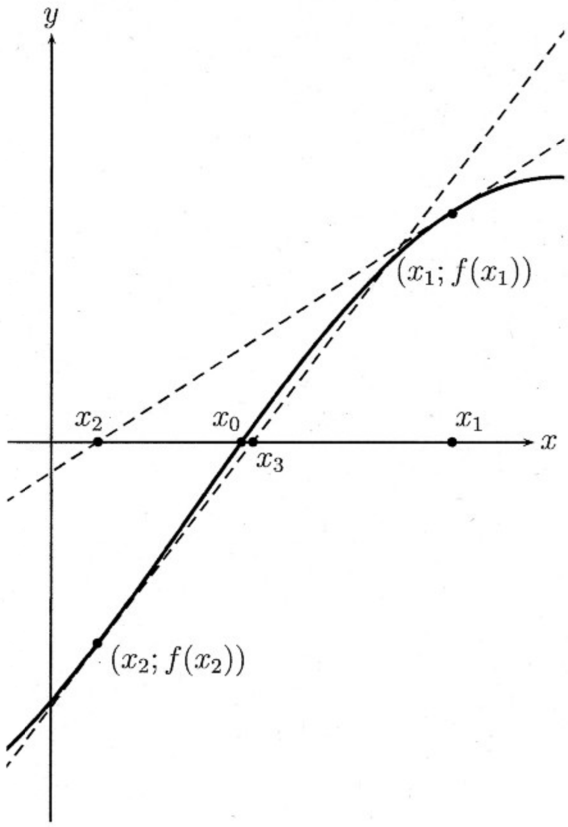
Si la pente de la tangente n'est pas nulle (c'est-à-dire si $f'(x_i) \neq 0$), on peut calculer son zéro x_{i+1}.

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\iff \quad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ainsi, on reconnaît un algorithme équivalent à la méthode du point fixe pour

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



13.2.3 Critère d'arrêt pour la méthode du point fixe

Lorsque la fonction g satisfait les hypothèses du théorème de sélection, on a vu (dans la preuve de la proposition) que l'erreur au pas n, donnée par $e_n = |x_n - x_0|$, diminue à chaque itération de l'algorithme du point fixe (ou de Newton-Raphson qui est un cas particulier de la méthode du point fixe). En effet, dans la preuve de cette proposition, on trouvait la ligne suivante :

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - x_0| \leqslant k|x_n - x_0| = k\, e_n \quad \text{avec} \quad k \in [0, 1[$$

Par conséquent, l'erreur entre deux termes successifs de la suite des approximations successives $x_{n+1} = g(x_n)$ devient de plus en plus petite. En effet, cette erreur s'exprime de la manière suivante grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_{n+1} - x_0 + x_0 - x_n| \leqslant |x_{n+1} - x_0| + |x_0 - x_n| \leqslant e_{n+1} + e_n \leqslant ke_n + e_n < 2e_n$$

Donc, comme $e_n \to 0$ de manière strictement décroissante, on a $|x_{n+1} - x_n| \to 0$ de manière strictement décroissante.

Par conséquent, on choisit le critère d'arrêt suivant pour l'algorithme. Dès que la différence entre deux éléments consécutifs de la suite des itérés est plus petite qu'une certaine tolérance (fixée à l'avance), on stoppe l'algorithme.