Chapitre 7

Résolution d'inéquations

Définition

Une *inéquation* est une équation où l'on a remplacé le symbole égal = par une des quatre inégalités suivantes : $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ ou $>$.

7.1. Résolution d'inéquations du premier degré

Les inéquations du premier degré sont de la forme : $ax + b \leqslant cx + d$
où $\leqslant$ pourrait aussi être une des trois autres inégalités ($\geqslant$, $<$ ou $>$).

Pour résoudre une telle inéquation, on écrit une succession d'inéquations équivalentes jusqu'à ce que x soit isolé.

Par exemple pour résoudre l'équation $2x+4 \leqslant 5x+6$, on peut procéder de deux manières :

1. On isole x du côté droit :

$$2x + 4 \leqslant 5x + 6 \overset{-6}{\iff} 2x - 2 \leqslant 5x \overset{-2x}{\iff} -2 \leqslant 3x \overset{:3}{\iff} -\frac{2}{3} \leqslant x$$

2. On isole x du côté gauche :

$$2x + 4 \leqslant 5x + 6 \overset{-4}{\iff} 2x \leqslant 5x + 2 \overset{-5x}{\iff} -3x \leqslant 2 \underset{\triangle}{\overset{:(-3)}{\iff}} x \geqslant -\frac{2}{3}$$

Dans les deux cas, on a trouvé que l'ensemble de solutions est $S = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right[$.

Néanmoins, on remarque un énorme danger :

> Multiplier ou diviser par un nombre négatif chaque membre d'une inéquation renverse l'inégalité !

7.2. Résolution d'inéquations : méthode générale

Multiplier par x les membres d'une inéquation ne donne pas une inéquation équivalente, comme le montre l'exemple suivant (même si on renverse l'inégalité) :

$$\frac{2x-1}{x} \geqslant 1 \overset{\cdot x}{\not\iff} 2x - 1 \geqslant x$$

En effet, l'inéquation de gauche admet $S =]-\infty, 0[\cup [1, \infty[$ comme ensemble de solutions et celle de droite admet $S = [1, \infty[$.

Ainsi, dans le cas général, le danger précédemment découvert devient plus effroyable :

> À moins de faire un raisonnement compliqué, on n'a plus aucun contrôle sur l'inégalité d'une inéquation lorsqu'on effectue une multiplication ou division par un terme qui dépend de l'inconnue x !

Il faut donc utiliser une méthode plus générale pour résoudre les inéquations :

on utilise les tableaux de signes !

De ce fait, pour résoudre une inéquation, on va chercher une inéquation équivalente de la forme :

$$f(x) > 0\,, \qquad f(x) \geqslant 0\,, \qquad f(x) < 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) \leqslant 0$$

Finalement, on trouve l'ensemble des solutions de l'inéquation en lisant le tableau de signes de la fonction f. Cet ensemble de solutions sera décrit grâce aux intervalles.

Exemple

Cherchons à résoudre l'inéquation $\qquad \dfrac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)}$

On commence par chercher une équation équivalente de la forme $f(x) \leqslant 0$:

$$\frac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} \leqslant \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \overset{\text{soustraction}}{\iff} \frac{2x^2(x+3)}{(x+1)^2} - \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{de fractions}}{\overset{\text{amplification}}{\iff}} \frac{2x^2(x+3)(x-2)}{(x+1)^2(x-2)} - \frac{x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{de fractions}}{\overset{\text{soustraction}}{\iff}} \frac{2x^2(x+3)(x-2) - x^3(x+3)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\underset{\text{par factorisation}}{\overset{\text{simplification}}{\iff}} \frac{x^2(x+3)\big(2(x-2)-x\big)}{(x+1)^2(x-2)} \leqslant 0 \iff \overbrace{\frac{x^2(x+3)(x-4)}{(x+1)^2(x-2)}}^{f(x)} \leqslant 0$$

Afin de déterminer les solutions de cette inéquation, on établit le tableau de signes de la fonction f (c'est pour cette raison qu'on a factorisé la fonction f). Rappelons que le tableau de signes de la fonction

$$f(x) \;=\; \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

a déjà été établi en page 3. Le voici :

x		-3		-1		0		2		4	
$f(x)$	$-$	0	$+$	↯	$+$	0	$+$	↯	$-$	0	$+$

On peut lire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur le tableau de signes. L'ensemble des solutions, plus facilement exprimé à l'aire des intervalles, est donc le suivant.

$$S = \,]-\infty, -3] \cup \{0\} \cup \,]2, 4]$$

Notation : l'ensemble $\{0\}$ est le même que celui décrit à l'aide de l'intervalle $[0, 0]$.