

La **cinématique** étudie les caractéristiques du mouvement sans en rechercher les causes.

## Cinématique à 1 dimension

On se repère ici par rapport à un point origine sur la droite du mouvement.

$$\text{Vitesse instantanée : } v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Accélération instantanée : } a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

## Le mouvement rectiligne uniformément accéléré

Comme le nom du mouvement l'indique, c'est un mouvement à une dimension dans lequel l'accélération est constante.

$$a = cst \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_0 = \text{vitesse à } t = 0 \quad x_0 = \text{position à } t = 0$$

Ex : Mouvement dans le champ gravifique terrestre si l'altitude ne varie pas trop.

## Vecteurs

Grandeur qui se caractérise par une direction, un sens et un module.

Les vecteurs peuvent être additionnés.

On peut les décomposer selon des axes définis par des vecteurs unités.

Nous utiliserons un système cartésien d'axes droits.

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad |\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1 \quad \hat{i} \perp \hat{j}, \hat{j} \perp \hat{k}, \hat{k} \perp \hat{i}$$

Egalité des vecteurs  $\iff$  égalité des composantes .

## Produit scalaire de 2 vecteurs

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad \theta \text{ est l'angle de } \vec{a} \text{ à } \vec{b}$$

En coordonnées cartésiennes :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

## Produit vectoriel de 2 vecteurs

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$  est perpendiculaire à  $\vec{a}$  et à  $\vec{b}$ ,

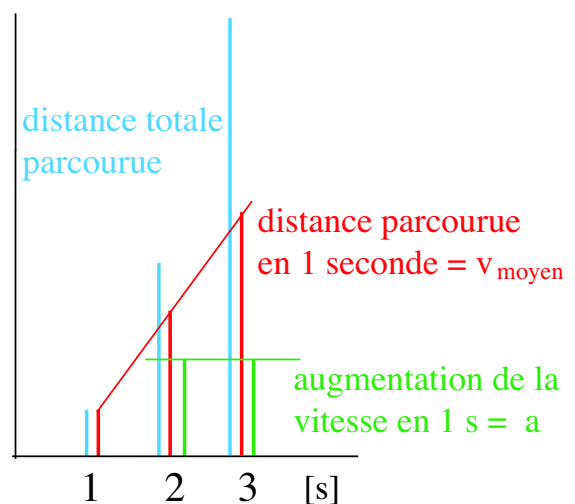
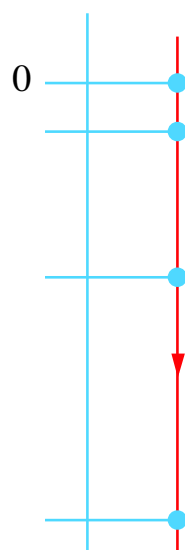
son sens est donné par la règle des 3 doigts de la main droite : le pouce selon le 1er vecteur, l'index selon le 2ème vecteur, le majeur donne le sens du vecteur résultat, son module est  $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ .

## Quelques formules supplémentaires pour le MRUA

Equation	Q <sup>té</sup> manquante		
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	(1)	équations
$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$v$	(2)	de base
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$	(3)	1 et 2 en éliminant $t$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$a$	(4)	1 et 2 en éliminant $a$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	$v_0$	(5)	1 et 4 en éliminant $v_0$

### Un exemple de MRUA

t [s]	y [m]
0	0
1	-4.9
2	-19.6
3	-44.1



## Mouvement à plus de 1 dimension

12 mars 2013

Après avoir choisi un référentiel d'où l'on observe la particule par le vecteur lieu

$\vec{r}$  :  $\vec{r} = x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ , on obtient

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{v} \text{ est tangent à la trajectoire}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{a} \text{ n'est pas tangent à la trajectoire}$$

## Balistique

Le mouvement de la particule selon  $Ox$  est indépendant de son mouvement selon  $Oy$ . L'accélération  $\vec{a}$  est constant et parallèle à l'un des axes : MRUA selon cet axe et MRU selon l'autre. Trajectoire : parabole

Par exemple :  $\vec{a} = a_y\hat{j}$  est constant et parallèle à  $Oy$  et  $a_x = 0$  :

$$(y - y_0) = (x - x_0) \cdot \frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{1}{2} a \left( \frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2$$

## Mouvement circulaire uniforme MCU

Trajectoire : cercle de rayon  $R$ . MCU : la vitesse est constante en module

L'accélération est centripète :

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{R} [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] = -\frac{v^2}{R} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{v^2}{R} \hat{u}_r$$

L'accélération radiale change la direction de la vitesse.

$$\text{Vitesse angulaire : } \omega = \frac{|\vec{v}|}{R} \quad \text{Période : } T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|}$$

## Mouvements relatifs

Le mouvement d'une particule  $P$  est observé depuis deux référentiels  $R$  et  $R'$ . Ces deux référentiels sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

$$\vec{v}(P) = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{s}}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R'} = \vec{v}(O')|_R + \vec{v}'(P)$$

Le temps est le même dans les deux référentiels !

Si  $\vec{v}(O')|_R = \vec{cst} = \vec{u}$ ,  $\vec{r}(P) = \vec{r}'(P) + \vec{u}t$ ,  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$  et

$$\vec{a}(P) = \vec{a}'(P) \quad \text{Galilée}$$

# Les trois lois de Newton (1687)

19 mars 2013

Introduction de deux notions supplémentaires : la **masse** et la **force**.

## 1ère loi (Loi d'Inertie)

Il existe un **référentiel d'inertie** par rapport auquel une particule isolée, c.à.d. soustraite à toute action extérieure (soumise à aucune force extérieure), est, soit **immobile**, soit **en mouvement rectiligne uniforme**. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie.

## 2ème loi (Concept de Force)

Dans un référentiel d'inertie, l'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui, le facteur de proportionnalité étant l'inverse de sa masse.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}^{ext} \quad \sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

( $\vec{p} = m\vec{v}$  : quantité de mouvement)

La loi de Newton à l'origine est  $\Delta\vec{p} = \vec{F} \Delta t$

## 3ème loi (Action et Réaction)

Quand deux corps A et B interagissent, la force que le corps A exerce sur B est égale et opposée à celle qu'exerce le corps B sur A.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

## Dans les référentiels non inertiels

26 mars 2013

La première loi de Newton définit les **référentiels d'inertie** comme ceux où, en l'absence de force, la particule est, soit immobile, soit en MRU ; autrement dit, avec la deuxième loi de Newton, dans les référentiels d'inertie, en l'absence de force, nous n'avons pas d'accélération.

Dans les **référentiels non inertiels**, c.à.d. en accélération, il apparaît des **forces fictives**, ou forces d'inertie, nécessaires pour concilier les observations effectuées dans ces référentiels et celles faites depuis des référentiels d'inertie.

## Les lois de Kepler (1609 et 1618)

**1ère loi** La trajectoire d'une planète est une **ellipse** dont l'Etoile occupe l'un des foyers.

**2ème loi** Le rayon-vecteur Etoile-planète balaie des **aires égales** pendant des **intervalles de temps égaux**.

(Cette loi est la conséquence de la conservation du moment cinétique).

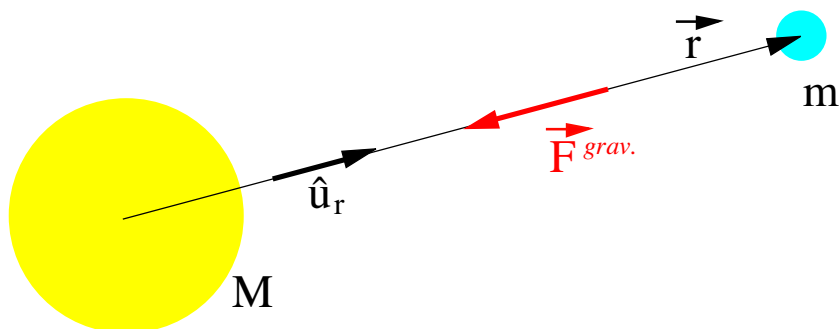
**3ème loi** Pour deux planètes différentes, le carré du rapport des périodes de révolution est égal au cube du rapport des grands axes de leurs orbites.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

**Loi universelle de la gravitation** La force d'attraction entre deux masses  $m$  et  $M$  distantes de  $|\vec{r}|$  est

$$\vec{F}^{grav.} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

$G$  : constante de gravitation universelle.



## Energie cinétique

## Travail d'une force

L'énergie cinétique d'une particule est l'énergie qu'elle possède en vertu de son mouvement

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Travail d'une force  $\vec{F}$  sur une particule entre deux points 1 et 2 :

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

**Th. de l'énergie cinétique** : Le travail de la force  $\vec{F}$  entre deux points 1 et 2 est égal à la variation de l'énergie cinétique entre 1 et 2 :

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Le travail  $W$  est l'énergie transférée d'un objet ou à un objet au moyen de forces agissant sur cet objet.

## Les forces conservatives

9 avril 2013

Lorsque, de 1 à 2, la force  $\vec{F}$  effectue un travail  $W_1$ , que de 2 à 1 elle effectue un travail  $W_2$  et que  $W_1 = -W_2$ , cette force est dite **conservative** et, sur l'un des parcours, aura **transféré** de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle  $U$  et, sur l'autre parcours, transféré de l'énergie potentielle  $U$  à l'énergie cinétique de la particule.

On a, par conséquent,  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  sur un parcours fermé si  $\vec{F}$  est conservative.

Par conséquent aussi, pour une force conservative,  $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ne dépend pas du chemin que l'on prend pour aller de 1 à 2, mais uniquement des points 1 et 2 : il existe donc, **associée aux points 1 et 2**, une énergie que l'on appelle **énergie potentielle**.

### Energie potentielle

$$\Delta U = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

L'énergie potentielle est l'énergie attribuable aux positions relatives de 2 (ou plus) objets en interaction.

**Energie mécanique** Si le système est isolé et qu'à l'intérieur de ce système nous n'ayons **que** des forces conservatives, **l'énergie mécanique**  $E_{méc.} = T + U$  est conservée.

### Travail sur un système de la part d'une force extérieure

Une **force extérieure** agissant sur un système n'en modifie que l'énergie mécanique si aucun frottement ou autre force dissipative n'est présent dans le système,

$$W = \Delta E_{méc.} = \Delta T + \Delta U$$

Si des forces non conservatives sont présentes, il existe une **dissipation d'énergie** qu'on peut assigner à une variation de l'énergie interne du système ; nous développerons cette notion plus tard.

$$W = \Delta E_{tot} = \Delta E_{méc.} + \Delta E_{int}$$

Pour un système isolé, on montre de manière empirique que l'énergie totale est conservée.

## Ensemble de particule

Le **centre de masse** d'un ensemble de  $N$  particules est le point dont le vecteur position est (définition)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Quantité de mouvement du CM : (en dérivant l'expression précédente)

$$\vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}_{tot}$$

**Loi de Newton pour le système** : (en dérivant l'expression précédente)

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = M \vec{a}_{CM}$$

Pour un **système isolé** :

$$\vec{F}^{ext} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{P}_{tot} = \vec{cst}$$

**conservation de la quantité de mouvement.**

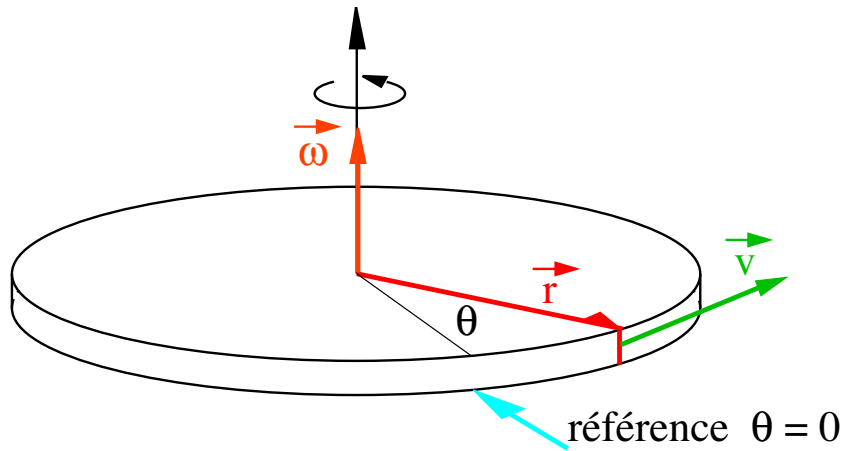
Application : **les chocs** ; la conservation de la quantité de mouvement donne un système d'équations sous-déterminé en général. La connaissance supplémentaire des conditions dans lesquelles le choc s'est produit est nécessaire pour résoudre le problème.

## Rotation d'un corps rigide autour d'un axe $\Delta$

Vitesse angulaire  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$       Accélération angulaire  $\gamma = \frac{d\omega}{dt}$

Relations avec la vitesse linéaire :  $v = \omega r$  ou  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$





Relations avec l'accélération tangentielle :  $a_t = \gamma r$  ou  $\vec{a}_t = \vec{\gamma} \wedge \vec{r}$

Energie cinétique de rotation :  $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$

$I_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$  est le **moment d'inertie du solide** et montre la répartition de la masse du corps solide autour de l'axe de rotation  $\Delta$ .

## Loi de Newton pour la rotation autour d'un axe

Pour une particule :  $\vec{M}_\Delta = \frac{d\vec{\ell}_\Delta}{dt}$  où

$$\vec{M}_\Delta = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p} .$$

Pour un ensemble de particules  $i$  : définissons :

$\vec{M}_\Delta = \sum_i \vec{M}_{\Delta,i} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i =$  somme des moments des forces extérieures s'exerçant sur le solide ou sur les particules et

$$\vec{L}_\Delta = \sum_i \vec{\ell}_i = I_\Delta \vec{\omega} = \text{moment cinétique du solide}$$

ou de l'ensemble des particules.

$I_\Delta$  est le moment d'inertie du solide ou de l'ensemble des particules par rapport à l'axe  $\Delta$ .  $I_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$  avec  $r_i =$  distance à l'axe.

Nous avons alors, pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  :

$$\boxed{\vec{M}_\Delta = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}}$$

## Parallèle entre la translation et la rotation autour d'un axe

Translation	Rotation
Masse $m$	Moment d'inertie $I_\Delta$
Vitesse $\vec{v}$	Vitesse angulaire $\vec{\omega}$
Quantité de mouvement $\vec{p}$	Moment cinétique $\vec{L}_\Delta = \vec{r} \wedge \vec{p}$
Force $\vec{F}$	Moment de force $\vec{M}_\Delta = \vec{r} \wedge \vec{F}$
Equation de Newton :	Equation de Newton pour la rotation :
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M}_\Delta = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt}$

## Application : le gyroscope

Hypothèse de travail : la vitesse de rotation du volant autour de son axe est bien supérieure à tout autre vitesse de rotation.

**Gyroscope équilibré** : l'axe de rotation du volant coïncidant avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , cet axe est fixe dans le référentiel d'inertie où nous appliquons la loi de Newton pour les rotations :

$$\vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}_\Delta}{dt} \Rightarrow \vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{constant}}$$

**Gyroscope déséquilibré** : sous l'hypothèse que  $\omega$  est très grand, le gyroscope **précesse** dans le sens donné par  $\vec{M}$  puisque

$$d\vec{L}_\Delta = \vec{M} dt$$

## Conservation du moment cinétique

Si la résultante du **moment des forces extérieures est nulle** ou si le **système est isolé** :  $\vec{L} = \overrightarrow{\text{const.}}$  ou  $\vec{L}_i = \vec{L}_f$ .

Application : le mouvement des planètes.

La force d'attraction du Soleil sur les planètes est dirigée de la planète vers le centre du Soleil (force "centrale"). Le moment de cette force par rapport au Soleil est nul ; la conséquence est que le moment cinétique de la Terre (comme celui des autres planètes) est une constante vectorielle.

- La trajectoire de la Terre est plane (l'ellipse est une figure plane) ; en effet, le plan de la trajectoire est défini par le rayon vecteur  $\vec{r}$  et la vitesse  $\vec{v}$  et est donc perpendiculaire au vecteur moment cinétique  $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$  ; comme  $\vec{\ell}$  est une constante vectorielle, le plan de la trajectoire ne varie pas.
- Le rayon vecteur Soleil-Terre balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux (loi des aires de Kepler).
- Le moment cinétique de rotation de la Terre sur son axe est aussi conservé. Comme cet axe est incliné par rapport au plan de l'écliptique, il y a des saisons sur Terre.

**Annnonce importante** : Du au manque de temps, le paragraphe sur l'Hydrostatique (Phys 105.pdf) ne sera pas traité et donc ne fera pas l'objet d'interrogation à l'examen.

Le 23 avril, nous aborderons l'hydrodynamique (Phys 129.pdf).

## Hydrodynamique : loi de Bernoulli

**Approche d'Euler** : le mouvement du fluide est donné par la connaissance de la vitesse de tous les éléments de fluide en tout instant  $t$ . Nous nous limitons aux écoulements **stationnaires**.

L'écoulement est **laminaire** : on peut définir des **lignes de courant**, lignes tangentes aux vecteurs vitesses et des **tubes de courant**, ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

**Equation de continuité** : elle exprime la conservation du fluide. Ici, nous choisissons un fluide incompressible.  $D_v = S v = cst$

**Théorème de Bernoulli** pour l'écoulement d'un fluide parfait.

Nous nous limitons ici à l'écoulement d'un **fluide parfait**, c.à.d. un fluide pour lequel la viscosité peut être négligée.

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y + P = \text{constant}$$

le long d'une ligne de courant.

Le Théorème de Bernoulli exprime la **conservation de l'énergie** : le fluide étant **sans frottement (parfait)**, le travail des forces extérieures (les forces de pression qui le poussent) fait varier son énergie mécanique (termes  $\rho g h$  et  $\frac{1}{2} \rho v^2$ ).

Applications :

- a) Formule de Torricelli,
- b) Tube de Venturi,
- c) Vaporisateur, trompe à eau, etc...

**Effet Magnus** avec la complicité de la viscosité du fluide (ici, l'air), nous pouvons imprimer un "effet" à une balle de tennis, à une balle de ping-pong ou à un ballon de football!

**Viscosité** : la viscosité dans un fluide est due au frottement d'une couche de fluide sur une autre, les couches rapides entraînant successivement les lentes.

Force de viscosité :  $F = \eta \frac{dv}{dy} S$

$\eta$  est le coefficient de viscosité. Unité de  $\eta$  : le poiseuille (Pl)

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

### Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

Distribution des vitesses  $v(r) = \left| \frac{\Delta P}{\Delta x} \right| \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2)$

Perte de charge  $D_V = \frac{\pi}{8\eta} \left| \frac{\Delta P}{\Delta x} \right| R^4$

**Écoulement laminaire** : on peut y définir des lignes et de tubes de courant.

**Écoulement turbulent** : on ne distingue plus les lignes et les tubes de courant.

Le **nombre de Reynolds  $Re$**  est sans dimension et permet de caractériser un écoulement comme laminaire ou turbulent :

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{p_C}{p_D}$$

nombre de Reynolds faible $Re \ll 1 \Leftrightarrow p_D \gg p_C$	nombre de Reynolds élevé $Re \gg 1 \Leftrightarrow p_D \ll p_C$
<p>prédominance des transferts de quantité de mouvement par <b>diffusion <math>p_D</math></b></p> <p>L'écoulement est plutôt laminaire On peut définir des veines de fluide La vitesse d'écoulement est faible Le fluide est plutôt <b>visqueux</b> Les dimensions sont faibles (de la conduite, du bassin... , p.ex.) Le fluide est "guidé" tant par la viscosité que par les dimensions de la conduite</p>	<p>prédominance des transferts de quantité de mouvement par <b>convection <math>p_C</math></b></p> <p>L'écoulement est plutôt turbulent On ne peut plus définir de veines de fluide L'écoulement est rapide Le fluide n'est pas très visqueux Les dimensions sont grandes (de la conduite, du bassin... , p.ex.) Le fluide n'est pas "guidé".</p>

## Le champ électrique

Il est défini à partir de la force agissant entre deux particules chargées (loi de Coulomb) :

$$\vec{F}_{\text{élect}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \hat{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \quad \vec{F} = q' \vec{E}$$

Il y a une **similitude formelle** entre l'expression de la force de Coulomb et la force de gravitation entre deux masses. La similitude s'arrête là !

Origine du champ électrique : [la charge électrique](#), toujours conservée.

[ Nous avons introduit le champ électrique pour ne pas avoir à faire avec des *actions à distance*. Un traitement correct aurait fait appel à la notion de “messenger” de l'interaction (ici, l'interaction électromagnétique) : ce “messenger” est une particule qu'on appelle *boson intermédiaire* et qui transmet l'information de l'existence de la particule 1 à la particule 2. Comme nous l'avons vu à la page 153, l'information du déplacement de la particule chargée 1 se transmet à la vitesse de la lumière à la particule chargée 2 par une onde électromagnétique, qui est un “[photon](#)”, particule de lumière et messagère de l'interaction entre les particules chargées.]

De l'additivité vectorielle des forces, on déduit que les champs  $\vec{E}$  s'additionnent vectoriellement aussi. On peut ainsi obtenir le champ résultant pour un système de plusieurs charges, p. ex. deux charges fixes égales et opposées (dipôle électrique), mais le calcul devient rapidement difficile si on a un grand nombre de charges.

[Mouvement dans un champ  \$\vec{E}\$  uniforme](#) : le mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme est identique à celui d'une masse dans un champ de pesanteur.

[Un dipôle](#) est formé par deux charges  $\pm q$  placées à une distance fixe  $d$  l'un de l'autre. Le champ d'un dipôle décroît en  $r^{-3}$  et, dans un champ électrique uniforme, le dipôle s'aligne selon les lignes de champ du champ  $\vec{E}$ .

## Calcul du champ électrique : la loi de Gauss

Cette loi nous permet de relier le flux du champ électrique à travers une

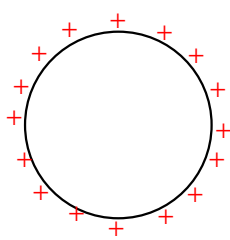
surface fermée à la charge que cette surface renferme.

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{renfermée}}}{\epsilon_0}$$

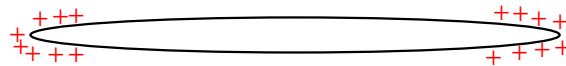
$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$  est le **flux** de  $\vec{E}$  au travers de la surface  $S$ . La loi de Gauss nous permet de calculer le champ  $\vec{E}$  à la surface  $S$  qui n'est pas une surface matérielle, mais celle où nous désirons calculer  $\vec{E}$ . Pour utiliser la loi de Gauss, il convient de tenir compte de la **symétrie du problème**.



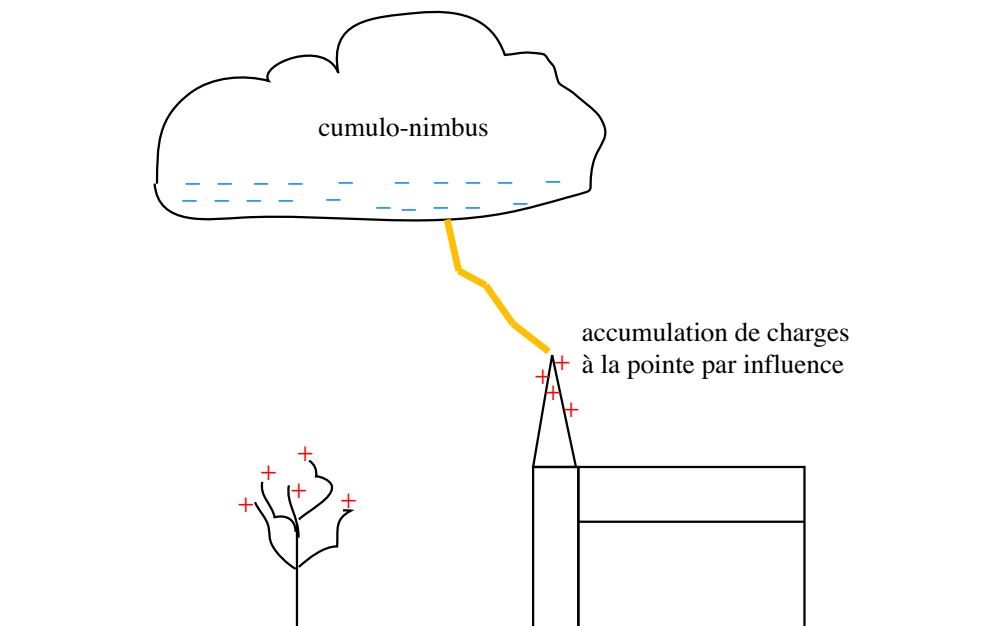
### Complément : l'effet de pointe



Les charges de même signe se repoussent !



Accumulation de charges aux extrémités pointues



# Electrostatique

14 mai 2013

## Le potentiel électrique

La force électrostatique est conservative (nous le déduisons du fait que l'expression de la force électrostatique est la même que celle de la force gravifique), nous pouvons définir une **énergie potentielle électrostatique** dont la différence entre deux points 1 et 2 par lesquels passe une particule de charge  $q'$  est :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W_{12} = - \int_1^2 \vec{F}_{\text{elect}} \cdot d\vec{r} = -q' \int_1^2 \vec{E}_{\text{elect}} \cdot d\vec{r}$$

Le potentiel est défini par :  $\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\Delta U}{q'}$   
On prend par convention le potentiel nul à l'infini.

## Magnétostatique Le champ magnétique

Il est défini à partir de la force agissant sur une particule chargée en mouvement :  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  Force de Lorentz

Il n'y a pas de charge magnétique, l'origine du champ  $\vec{B}$  est le mouvement des charges, c.à.d. un courant.

## Mouvement dans un champ magnétique

La force de Lorentz  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  étant toujours perpendiculaire à la vitesse, nous avons (Théorème de l'énergie cinétique) :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_L \cdot \vec{v} dt \underbrace{=}_0 \underbrace{=}_{Th. En. cin.} E^{cin}(2) - E^{cin}(1)$$

– le module de la vitesse est constante puisque

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 : \text{la force de Lorentz ne travaille pas.}$$

– la trajectoire est une hélice de révolution de rayon  $r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$

$v_{\perp}$  : composante de la vitesse perpendiculaire à la direction de  $\vec{B}$ .

Dans la direction de  $\vec{B}$  : MRU ;

dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$  : MCU .

– Applications : spectromètre de masse, cyclotron.

Dans ces deux applications, on associe un champ magnétique et un champ électrique, le champ  $\vec{B}$  pour imprimer une trajectoire circulaire à la particule et un champ  $\vec{E}$  pour l'accélérer.



## Force exercée sur un fil parcouru par un courant :

$$\vec{F}_L = i\vec{L} \wedge \vec{B} \quad \text{Force de Laplace}$$

Application : couple sur une spire de courant plongée dans un champ  $\vec{B}$  :

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{\mu} = iS\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  est le vecteur unité normal à la spire de courant et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon tournant dans le sens du courant.

## La loi d'Ampère

Nous avons vu qu'il était commode, pour calculer le champ  $\vec{E}$ , de passer par le Théorème de Gauss. En magnétisme, le calcul du champ  $\vec{B}$  est grandement facilité par l'utilisation de la loi d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{ent.}$$

Comme pour la loi de Gauss, on s'aidera de la **symétrie** du problème.

## Comment utiliser la loi d'Ampère ?

- a) Choisir une courbe fermée  $C$  en s'aidant de la symétrie du problème.
- b) Choisir un sens de circulation, en général ce sens est dicté par le sens du courant enlacé (règle du tire-bouchon, de la vis droite, etc...).
- c) Effectuer l'intégration et vérifier votre résultat quant au sens de  $\vec{B}$  par rapport à celui du courant.

Applications : Calcul du champ  $\vec{B}$  créé par un fil parcouru par un courant (il y a dans ce cas une symétrie axiale), par un solénoïde, par une spire de courant.

## Action d'un fil parcouru par un courant sur un autre fil

Le premier fil crée à l'endroit du second un champ magnétique dont l'effet, par la loi de Laplace, est d'attirer le second fil si les deux courants sont parallèles ou de le repousser si les courants sont anti-parallèles.

## Comparaisons entre électrostatique et magnétostatique :

L'origine du champ  $\vec{E}$  est la charge électrique. L'origine du champ  $\vec{B}$  est le courant (mouvement de charges) : il n'existe pas de monopôle magnétique, par conséquent, le flux de  $\vec{B}$  au travers d'une surface fermée est nulle.

La loi de Gauss permet de calculer  $\vec{E}$  connaissant les charges, alors que la loi d'Ampère permet de calculer  $\vec{B}$  connaissant les courants.

## De la Mécanique à la Thermodynamique

### En passant d'un objet à un ensemble de particules :

Rappel : Pour un objet assimilable à une particule, nous avons :

$$W = \Delta E_{tot} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{pot}^{ext} + \Delta E_{int} \quad (\text{pour 1 objet})$$

$W$  étant le travail extérieur apporté ou retiré à la particule, ce travail peut être mécanique, thermique ou sous forme de rayonnement.

Pour un ensemble de  $N$  particules, nous redéfinissons l'énergie interne :

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} M \Delta v_G^2}_{\Delta E. cin. CM} + \underbrace{\Delta \sum_i E'_{cin}(i)}_{\Delta E. cin. p.r. CM} + \Delta \sum_i E_{pot}^{ext}(i) + \underbrace{\Delta \sum_i E_{pot}^{int}(i)}_{\Delta E. pot. int. part.}$$

$$E_{interne} = \sum_i E'_{cin}(i) + \sum_i E_{pot}^{int}(i)$$

$\sum_i E'_{cin}(i)$  : somme de l'énergie cinétique de chaque particule vue depuis leur Centre de masse

$\sum_i E_{pot}^{int}(i)$  : somme des **énergies potentielles internes** de chaque particule.

**L'énergie potentielle interne** rend compte des interactions entre les particules.

**La Thermodynamique** étudie les échanges d'énergies des systèmes et comment l'énergie passe d'une forme à une autre. Un autre domaine de la Thermodynamique étudie aussi les **équilibres**.

Devant le grand nombre de particules en jeu, nous adopterons tout d'abord une approche macroscopique basée sur quelques postulats tirés d'observations expérimentales ; nous tenterons aussi une approche microscopique et essayerons d'effectuer le passage du microscopique à l'état d'équilibre macroscopique.

## Equation d'état

A l'équilibre, l'état d'un gaz peut être décrit par deux des trois variables  $P$ ,  $V$ ,  $T$  : il existe donc une relation entre ces 3 variables qu'on appelle équation d'état.

**Gaz parfait** : gaz dilué : les particules n'ont donc pas d'interaction

$$P \cdot V = N_{mole} R T = N k T \quad \text{éq. des gaz parfaits}$$

$$E_{interne} = \sum_i E'_{cin}(i) \quad \text{seulement (voir plus haut)!}$$

## Equation de v. d. Waals :

$$\left( P + a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right) \cdot (V - N b) = N k T \quad \text{éq. de van der Waals}$$

Le terme  $- N b$  corrige le volume géométrique du volume "interdit" autour d'une particule où les autres particules ne peuvent pas pénétrer.

Le terme  $a \left( \frac{N}{V} \right)^2$  corrige la pression mesurée de l'extérieur de l'attraction des molécules entre elles et permet d'obtenir la "pression réelle" au sein du gaz.

Attention aux parties non physiques de l'équation de van der Waals!

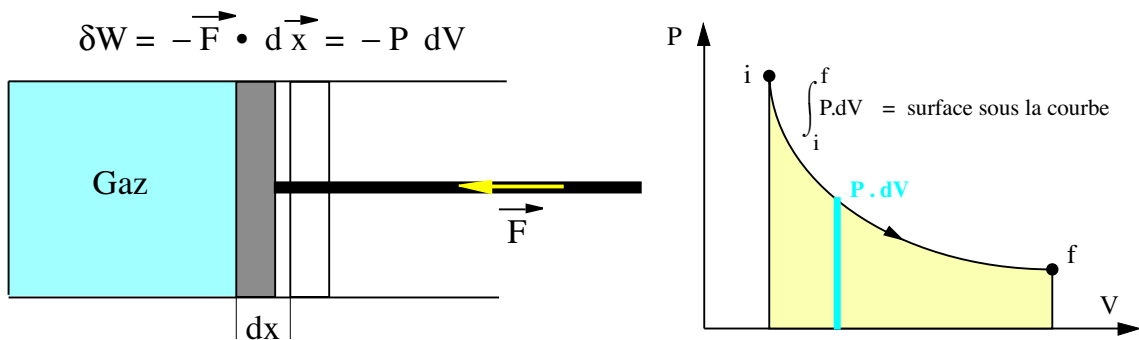
## Le travail

Nous considérons tout d'abord un système constitué d'un gaz pur qui, dans les transformations, demeure dans la phase gazeuse.

Notre système peut **échanger de l'énergie** avec l'extérieur en échangeant soit du **travail mécanique**, soit de la **chaleur**. Nous considérerons comme positif tout échange qui apporte de l'énergie au système et négatif, tout échange dans lequel le système cède de l'énergie, d'où la convention ci-après pour le signe du travail

mécanique échangé :

Echange de travail  $W = \int_1^2 \delta W = \underbrace{-}_{\text{convention}} \int_1^2 P \cdot dV$



# Le 1<sup>er</sup> principe de la Thermodynamique 3/10/2013

## Travail et chaleur

Nous considérons toujours un système constitué d'un gaz pur qui, dans les transformations, demeure dans la phase gazeuse.

Notre système peut **échanger de l'énergie** avec l'extérieur en échangeant soit du **travail**, soit de la **chaleur**. Notre convention est de considérer comme positif tout échange qui apporte de l'énergie au système et négatif, tout échange dans lequel le système cède de l'énergie.

$$W = \int_1^2 \delta W = \underbrace{-}_{\text{convention}} \int_1^2 P \cdot dV$$

L'énergie interne est une **fonction d'état**

$$\Delta U \underbrace{=}_{\text{bilan}} W + Q \quad \text{ne dépend que des états initial et final}$$

alors que les échanges de travail et de chaleur dépendent des processus choisis pour aller de l'état initial à l'état final.

Applications : Processus cyclique ( $\Delta U = 0$ ),  
processus adiabatique ( $Q = 0$ ), processus à volume constant ( $W = 0$ ), détente de Joule ( $W = Q = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$ )

Travail dans la détente isotherme d'un gaz parfait :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} dV = NkT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

On doit ici fournir de la chaleur au gaz durant la détente pour le maintenir à température constante!

## Absorption de la chaleur

Sans changement de phase :  $Q = M c \Delta T$

Avec un changement de phase :  $Q = L M$        $L$  : chaleur latente

## Théorie cinétique des gaz :

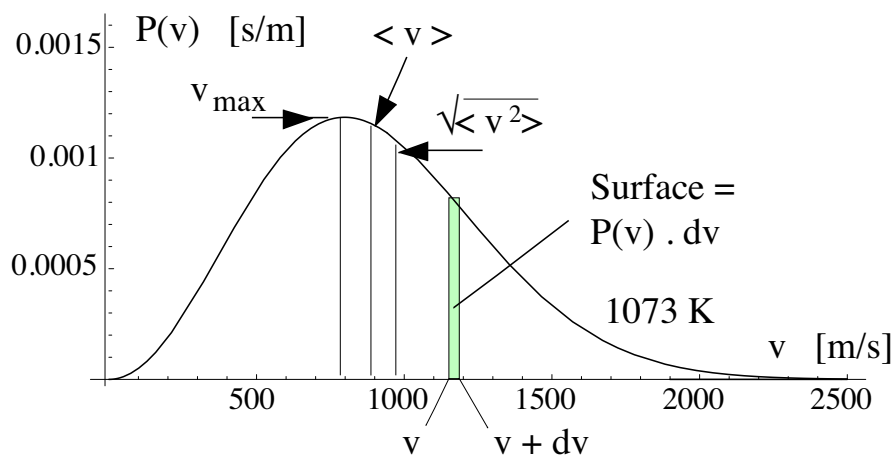
En. cinétique de translation d'un gaz parfait  $\langle E_{cin} \rangle = \frac{3}{2} k T$

Démarche : nous avons calculé le transfert de quantité de mouvement des molécules sur les parois pour calculer la pression et avons trouvé

$$P = \frac{Nm}{3V} \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

En faisant l'hypothèse que la moyenne temporelle de  $v^2$  est égale à la moyenne sur les molécules, on obtient  $\langle E_{cin} \rangle = \frac{3}{2} k T$

Les vitesses des molécules sont distribuées selon la loi de Maxwell.



# Théorie cinétique des gaz

10 octobre 2013

## Equipartition de l'énergie

On associe, à chaque molécule, une énergie cinétique de  $\frac{1}{2} k T$  pour chaque degré de liberté. Le nombre de degrés de liberté  $f$  est le nombre de coordonnées nécessaires pour localiser tous les atomes dans une molécule.

**Gaz parfait**  $\equiv$  gaz dans lequel les molécules n'ont que leur  $E_{cin}$ . Donc

$$U = U(T) \quad \text{pour un gaz parfait}$$

Toute variation  $\Delta U$  de l'énergie interne d'un gaz parfait est due uniquement à une variation de sa température, quelque soit le processus qui a conduit à cette variation de température.

## Chaleurs spécifiques molaires des gaz parfaits

Chaleur spécifique molaire à **volume constant** :

$$\Delta U = N_{mole} C'_V \Delta T \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{gaz parfaits}} \quad C'_V = \frac{1}{2} f R$$

et à **pression constante** :  $C'_P = C'_V + R$

En effet, puisque  $Q = N_{mole} C'_{V \text{ ou } P} \Delta T$  et que  $Q = \Delta U - W$ , que pour une même élévation de température  $\Delta T$ , nous avons la même variation d'énergie interne  $\Delta U$  (le gaz est "parfait"), et que, dans le cas de la transformation à pression constante, nous devons tenir compte de l'échange de travail mécanique qu'implique la transformation à  $P = cst$ , la chaleur spécifique  $C'_P$  est supérieure à  $C'_V$ .

## Détente adiabatique d'un gaz parfait

Pas d'échange de chaleur dans une transformation adiabatique. Dans une telle transformation, le gaz suit la loi

$$P V^\gamma = \text{constant} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C'_P}{C'_V}$$



Le **libre parcours moyen** = distance moyenne entre deux collisions.  
Hypothèse :  $n$  particules p.u. volume et sphères dures de diamètre  $d$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n d^2}$$

Les trois phénomènes de transport étudiés, la viscosité, la conductibilité thermique et la diffusion, résultent du mouvement des particules :

- Pour la **viscosité**, le passage des molécules d'une couche de fluide lente à une couche de fluide rapide, entraînant ainsi une variation de quantité de mouvement, donc une force, la force de viscosité ; le transport ici est celui de la **quantité de mouvement**.

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m \langle v \rangle}{\pi d^2} \quad \text{coefficient de viscosité}$$

$\eta$  ne dépend pas du nombre de particules p.u. volume.

Hypothèses et étapes de la démonstration.

1. les particules sont des sphères dures, leurs vitesses sont bien supérieures à la vitesse d'écoulement du fluide,
  2. on considère deux nappes de fluide distantes d'un (1) libre parcours moyen et on calcule la quantité de mouvement transférée lors du passage d'une particule d'une nappe à l'autre,
  3. connaissant le nombre de particules atteignant une surface unité par unité de temps, on peut calculer le transfert de quantité de mouvement par unités de temps et de surface entre les 2 nappes ; en égalisant ce résultat à l'expression de la force de viscosité (loi de Newton), on obtient le résultat précédent.
- Pour la **conductibilité thermique**, le passage des molécules d'une couche de fluide chaude à une couche froide entraîne un **transport d'énergie cinétique**,  $\kappa = \frac{1}{2} n m c_V \lambda \langle v \rangle$ .
  - Pour **la diffusion**, ce sont les chocs des molécules qui entraînent les particules de la région où ces particules sont les plus nombreuses vers celle où elle est moins nombreuse : c'est donc un **transport de particules**,  $D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$ .

## La détente de Joule et la définition de l'entropie

- Nous sommes partis de la **détente de Joule** et nous sommes intéressés au nombre d'états détaillés donnant la répartition des particules dans les compartiments 0 ou 1. Nous avons compté ce nombre et nous sommes dit que ce qui nous intéressait, c'était l'état réduit  $(N_0, N)$  donnant le nombre  $N_0$  de particules dans le compartiment 0 sur le nombre total  $N$  de particules; à chaque état réduit, nous avons  $W_{N_0}^N$  états détaillés.  $W_{N_0}^N$  est le nombre de combinaisons de  $N$  objets  $N_0$  à  $N_0$ .
- Macroscopiquement, nous ne pouvons distinguer que les états réduits. Si **les états détaillés sont équi-probables**, la probabilité qu'un état réduit se réalise est proportionnelle au nombre d'états détaillés que cet état réduit représente.
- On observe que l'état d'équilibre naturel est celui où les particules se répartissent pour moitié dans chacun des compartiment. Et on vérifie que l'état  $(N/2, N)$  est bien celui qui a le plus d'états détaillés : c'est aussi celui pour lequel  $W_{N_0}^N$  est maximum.
- Nous aimerions associer une grandeur thermodynamique à  $W_{N_0}^N$  :
  1. Cette grandeur doit être extensive.
  2. Elle doit tenir compte du fait que l'état d'équilibre correspond au maximum de  $W_{N_0}^N$ .
  3. Elle doit aussi tenir compte du fait que le nombre de particules est immense ( $\simeq 10^{23}$ ).

$$S = k \ln W_{N_0}^N \quad (\text{Boltzmann})$$

**Le logarithme de  $W_{N_0}^N$  donne bien une grandeur extensive.**

On le vérifie bien avec le nombre d'états détaillés pour un système à  $N_1, N_2$  puis  $N = N_1 + N_2$  particules. En effet, puisque  $W_{N_0}^N$  est proportionnel à la **probabilité** de l'état réduit et que les probabilités se multiplient, on obtient bien une grandeur extensive en prenant le logarithme de  $W_{N_0}^N$ .

## Evolution de l'Entropie

27 octobre 2013

Un système isolé tend naturellement vers son état d'équilibre caractérisé par le maximum d'états microscopiques

$$dS \geq 0$$

## Le deuxième principe de la Thermodynamique

Pour un système et son environnement, considérés comme un système fermé, pour une transformation donnée

$$\Delta S_{total} \geq 0$$

l'égalité caractérisant une transformation réversible et l'inégalité caractérisant une transformation irréversible.

Pour une transformation réversible :  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  (Th. de Clausius).

## Machines thermiques

Ces machines **échantent de la chaleur** avec 2 (ou plus) sources de chaleur et **produisent du travail** mécanique via un **agent thermique**.

**Machine de Carnot** : Le gaz suit ici 2 transformations isothermes et 2 transformations adiabatiques.

$$\text{Rendement "machine"} : \eta = \frac{-W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Dans notre développement : la *source chaude* est à la température  $T_1$  et la *source froide* à la température  $T_2$   $T_2 < T_1$  . Le rendement de la machine de Carnot est le rendement maximum que l'on puisse atteindre avec une machine thermique fonctionnant entre deux sources de chaleur.

Remarque : il s'agit ici de **machines thermiques**, c.à.d. de machines qui échantent de l'énergie sous forme de chaleur et fournissent un travail. Par le 2<sup>ème</sup> principe sous la forme donnée par Thomson, il n'est pas possible d'avoir une telle machine si nous n'avons qu'une seule source de chaleur.

## Les autres fonctions d'état

Nous avons construit des fonctions d'état qui contiennent **la même information** que l'énergie interne, fonction d'état dont nous étions partis, via des **transformations de Legendre**.

Le but de cette construction est d'avoir des fonctions d'état dont les **variables naturelles** permettent des raisonnements plus directs dans les **applications** que nous voulons traiter. Ces applications sont, par exemple, les réactions chimiques, les changements de phases, etc...

Fonction d'état	Symbole Variables naturelles	Différentielle totale
Energie interne	$U = U(V, S)$	$dU = -P dV + T dS$
Enthalpie	$H = U + PV = H(P, S)$	$dH = V dP + T dS$
Energie libre	$F = U - TS = F(V, T)$	$dF = -P dV - S dT$
Enthalpie libre ou énergie de Gibbs	$G = H - TS = G(P, T)$	$dG = V dP - S dT$

Pour un système fermé, à l'équilibre :

l'entropie est maximale

les fonction d'état  $U$ ,  $H$ ,  $F$  et  $G$  sont minimales.

## Le potentiel chimique

Pour ces nouvelles applications (réactions chimiques, changements de phases, etc...), le nombre de particules n'est plus constant : le système est ouvert ! Pour un **système ouvert**, la variation du nombre de molécules  $i$  d'un type donné et dans une phase donnée entraîne une variation des fonctions d'état  $U$ ,  $H$ ,  $F$  et  $G$  de  $\mu_i dN_i$ .  $\mu_i$  est le **potentiel chimique**.

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T, P, N_j}$$

*Le potentiel chimique  $\mu_i$  est le taux de variation de l'énergie de Gibbs quand le nombre de particules  $i$  change, la température, la pression et le nombre des autres particules  $j \neq i$  demeurant constants.*

## Équilibre entre phases

### Egalité des variables intensives

A l'équilibre entre deux phases  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons l'égalité des variables intensives

$$T^\alpha = T^\beta \quad P^\alpha = P^\beta \quad \mu^\alpha = \mu^\beta$$

### Règle des phases

Le *nombre de degrés de liberté  $f$* , c.à.d. le nombre de variables intensives indépendantes nécessaires à la description d'un système à  $c$  composantes et  $p$  phases est :

$$f = c - p + 2$$

Pour 1 seule composante, nous pouvons représenter l'état du système dans un diagramme à 2 dimensions, en général, un diagramme P-T.

Une coexistence de phase est représentée par une courbe dans ce diagramme; sur cette *courbe de coexistence de phase*, nous avons l'égalité des potentiels chimiques des deux phases.

## Equilibre entre phases pour une seule composante

Pour 1 seule composante, nous pouvons représenter l'état du système dans un diagramme à 2 dimensions, en général, un diagramme P-T.

Une coexistence de deux phases est représentée par une courbe dans ce diagramme; sur cette [courbe de coexistence de phases](#), nous avons l'égalité des potentiels chimiques des deux phases.

Conséquence :

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{L_{mole}}{T \cdot \Delta V_{mole}}$$

Relation de Clausius Clapeyron

## La pression osmotique

Dans un mélange, il y a une augmentation de l'entropie (le désordre y est plus important) et le potentiel chimique des composantes du mélange varie :  $\mu_{i,M} = kT \ln x_i$ ,  $x_i$  étant la fraction molaire de  $i$  dans le mélange.

Ainsi, dans une solution, le potentiel chimique du solvant diminue.

De part et d'autre d'une membrane semi-perméable au solvant seul, les potentiels chimiques du solvant doivent s'égaliser, à l'équilibre. La baisse du potentiel chimique du solvant due au mélange **est compensée** par l'augmentation de ce potentiel chimique créée par l'apparition de la pression osmotique.

$$P_{osm} = \frac{kT x N_{solvant}}{V}$$

## Les ondes Qu'est ce qu'une onde ?

C'est une **perturbation qui se propage**. Elle transporte de l'énergie mais pas de matière (nous ne traitons pas ici des "ondes de matière"); les ondes mécaniques ont besoin d'un support matériel pour se propager, les ondes électromagnétiques, non.

**Les ondes transversales** : ce sont les ondes pour lesquelles la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Exemples : les oscillations d'une corde tendue, les oscillations des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'un champ électromagnétique.

**Les ondes longitudinales** : la perturbation est dans la direction de propagation de l'onde. C'est le cas des ondes acoustiques.

La fonction décrivant une onde doit tenir compte du fait que le phénomène physique lié à l'onde dépend de la position  $x$  et du temps  $t$ .

Par exemple, pour une onde harmonique (sinusoïdale) :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi).$$

La **période  $T$**  ( $= 2\pi / \omega$ ) est l'intervalle de temps nécessaire pour que l'onde reprenne le même état. La **longueur d'onde  $\lambda$**  ( $= 2\pi / k$ ) est la distance parallèle au déplacement de l'onde pour laquelle cette dernière reprend sa forme.

### Vitesse d'une onde

Dans l'équation de l'onde  $y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$ , le signe  $-$  correspond à une onde progressive (qui se déplace vers les  $x$  positifs) et le signe  $+$  à une onde rétrograde se déplaçant vers les  $x$  négatifs.

La **vitesse de l'onde** est de  $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$ .

### Vitesse d'une onde sur une corde

On utilise la loi de Newton sur une petite portion de la corde tendue à la tension  $\tau$  et de masse linéaire  $\mu$  et on trouve

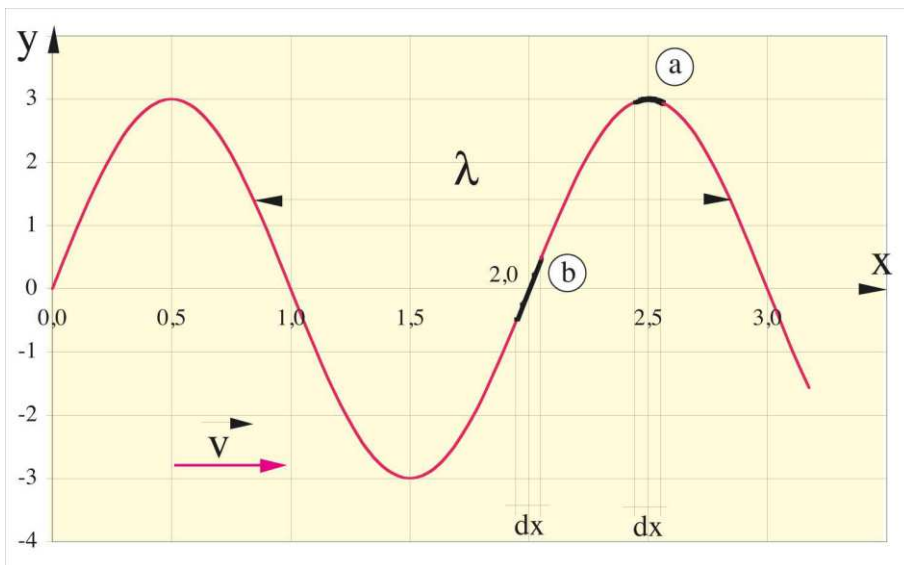
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

## Equation d'onde

L'équation d'onde est l'équation à laquelle doit satisfaire toute onde  $y(x, t)$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \text{ est la vitesse de l'onde}$$

## Energie transportée par une onde sur une corde



Un élément de corde de masse  $dm$  oscille transversalement si une onde sinusoïdale est envoyée sur la corde : une énergie cinétique due à sa vitesse transverse  $\vec{u}$  peut lui être associée. Cette énergie cinétique est nulle pour des éléments de corde au maximum du déplacement (point a)  $y = y_m$  et maximale quand la vitesse de l'élément est maximale, c.à.d. aux positions où le déplacement est nul (point b)  $y = 0$ .

Il existe aussi une énergie potentielle élastique, comme pour un ressort ; quand l'élément de corde n'est ni tendu ni comprimé cette énergie potentielle est nulle (position où le déplacement est maximal, point a)), quand il est tendu, l'énergie potentielle est maximale (positions où le déplacement est nul, point b)).



## Addition des ondes

21 novembre 2013

**Principe de superposition** : l'onde résultante est la somme algébrique des ondes initiales. Pour deux ondes de mêmes amplitude, fréquence et nombre d'onde, l'une des ondes étant en retard sur l'autre de  $\varphi$  :

$$y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = [2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi] \sin(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

Dans la **représentation de Fresnel**, on représente une onde sinusoïdale par un **vecteur** de **module**  $y_m$  tournant à la **vitesse angulaire**  $\omega$ . La superposition des ondes de même fréquence et de même longueur d'onde se ramène alors à l'addition des vecteurs correspondant aux différentes ondes initiales. Nous pouvons utiliser la **représentation de Fresnel** pour additionner des ondes d'amplitudes différentes, la seule condition est qu'elles aient la **même pulsation  $\omega$  et même vitesse**.

## Ondes stationnaires

Production des ondes stationnaires. La superposition d'une onde sinusoïdale progressive et d'une onde sinusoïdale rétrograde de même amplitude produit une **onde stationnaire**. Pour une corde fixée à ses extrémités, cette onde stationnaire s'écrit :

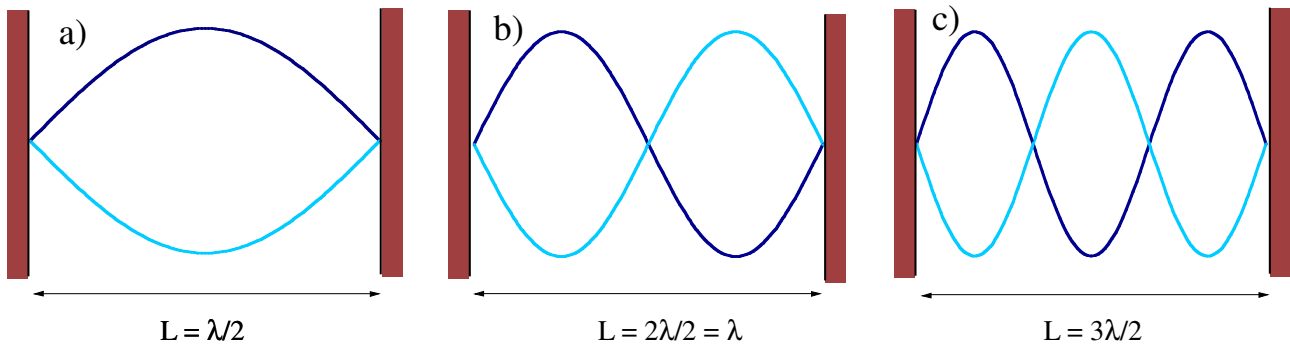
$$y(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Les ondes stationnaires sont caractérisées par des points fixes sans vibration aucune, les noeuds, et d'autres où l'amplitude de vibration est maximale, les ventres. La fréquence de l'onde stationnaire est la même que celle des deux ondes initiales.

Résonance. L'établissement des ondes stationnaires résulte de la superposition de deux ondes identiques, l'une progressive, l'autre rétrograde. L'onde rétrograde peut provenir de la réflexion de l'onde à l'extrémité du support de la propagation de l'onde. Ce phénomène de résonance limite

les fréquences permises pour les ondes initiales.

$$f = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



Le dessin représente l'**enveloppe** des positions d'une corde pincée aux deux extrémités et siège d'ondes stationnaires.

## Je parle dans une atmosphère d'Hélium :

La vitesse du son dans l'He est différente (elle est plus élevée) de celle dans l'air ; comme les dimensions de ma gorge n'ont pas changé, les fréquences sélectionnées changent et vous m'entendez différemment.

## Les ondes acoustiques

Les ondes acoustiques sont longitudinales et ont besoin d'un support pour leur propagation. Une onde acoustique cause un déplacement  $s$  d'un élément du milieu et une variation de la pression  $\Delta P$ . La vitesse de l'onde acoustique est

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$$

Comme pour la vitesse d'une onde sur une corde tendue, la vitesse de l'onde acoustique dépend d'une grandeur "inertielle" (ici la masse spécifique  $\rho$ ) et d'une grandeur qui décrit l'élasticité du milieu (ici le coefficient de compressibilité  $\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)$ ).

# Les ondes acoustiques

28 novembre 2013

## Onde de déplacement, onde de pression.

L'onde acoustique se compose d'une onde de déplacement des points du milieu dans lequel il se propage **et** d'une onde de pression des couches de la matière du milieu. Ces deux ondes sont toutes les deux longitudinales, de même fréquence mais **déphasées de  $\pi/2$** .

**Perception des ondes sonores .** La gamme des **amplitudes** des vibrations et des surpressions est vaste et couvre **6 ordres de grandeur**. La gamme des **intensités** (l'intensité sonore est proportionnelle au carré de l'amplitude maximale des déplacements ou de la surpression) est ainsi encore plus vaste : **12 ordres de grandeur** ! On remarque que sensation liée à la perception sonore croît moins rapidement que l'intensité (stimulus). **Fechner et Weber** ont ainsi relié la sensation de la perception à l'intensité sonore par

$$N = (10 \text{ db}) \log_{10} \frac{I}{I_{seuil}}$$

$I_{seuil}$  est l'intensité au seuil de perception  $I_{seuil} = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

**Les instruments de musique.** Les instruments de musique utilisent tous le fait qu'ils produisent des **ondes stationnaires** qui sélectionnent des fréquences particulières de vibration. Si  $L$  est la longueur de l'instrument :

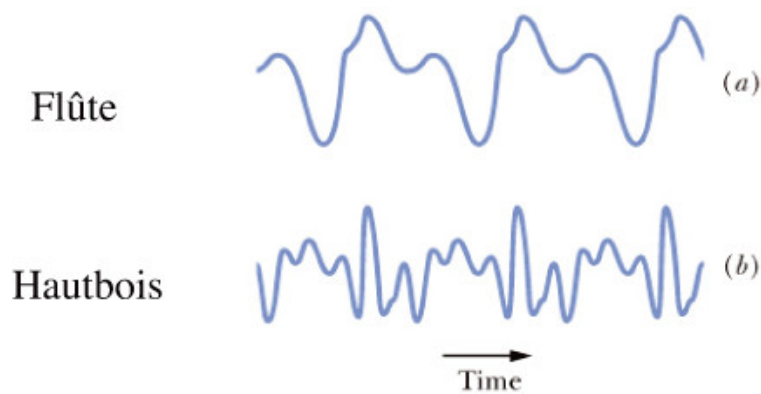
a) instrument à vent ouvert aux 2 extrémités :  $L = m \frac{\lambda}{2}$

b) instrument à vent ouvert à 1 extrémité :  $L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$

c) instruments à corde fixée aux 2 extrémités :  $L = m \frac{\lambda}{2}$

**Caractéristique d'un son.** Un son est une onde périodique, un son pur, une onde sinusoïdale. Les caractéristiques du son sont :

- sa **hauteur** : c'est la fréquence de l'harmonique fondamentale,
- sa **force** : c'est l'intensité du son,
- son **timbre** : c'est la distribution des amplitudes des harmoniques.



Ondes produites par une flûte et un hautbois jouant la même note. On remarque que la période de la “fondamentale” est bien la même pour les deux instruments, mais que les formes des deux ondes sont très différentes, conduisant à des “timbres” différents.

**Décomposition en série de Fourier.** On montre en Mathématiques qu’une fonction périodique  $f(t)$  peut être décomposée en une série de sinus et de cosinus : c’est la décomposition en série de Fourier.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

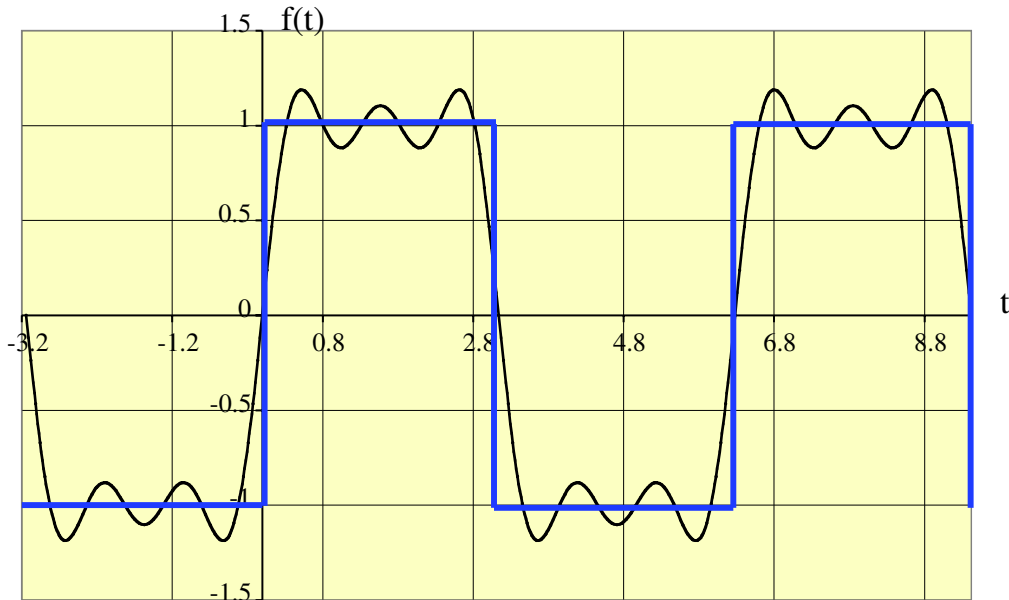
Pour l’onde sonore comme pour la décomposition de Fourier, le premier terme  $a_1$  ou  $b_1$ , a la période de l’onde sonore ou de la fonction périodique, les fréquences des harmoniques sont des multiples entiers de la fréquence du premier terme (fondamental).

On constate que la distribution des amplitudes  $a_n$  et  $b_n$  des termes de la décomposition en série de Fourier **décroissent rapidement**.

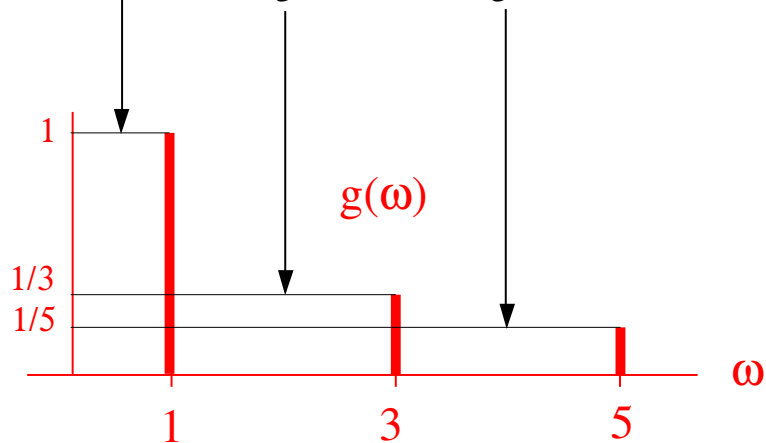
Pour les ondes sonores, **l’importance relative des amplitudes** des harmoniques donne le **timbre** de l’instrument. Des sons de même hauteur (fréquence fondamentale) peuvent donner des sensations différentes en raison du timbre et de son évolution au cours du temps.

**Battements.** L’addition de deux ondes de fréquences proches donne une onde dont la fréquence est la moyenne des deux fréquences et dont l’amplitude est modulée : l’intensité est ainsi modulée à une fréquence égale à la différence des 2 fréquences initiales.  $f_{\text{battements}} = |f_1 - f_2|$

## Décomposition en série de Fourier d'une fonction "créneaux"



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right]$$



**Effet Doppler.** Si  $v$  est la vitesse du son dans le milieu,  $v_S$  celle de la source et  $v_D$  la vitesse du détecteur, la fréquence perçue est liée aux mouvements de la source et du détecteur :  $f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_S}$   
 au numérateur : signe + si le détecteur s'approche de la source, - s'il s'en éloigne,  
 au dénominateur : signe - si la source s'approche du détecteur, + si elle s'en éloigne.

## Les composantes du champ électromagnétique.

- a) Le **champ électromagnétique** est composé d'un champ  $\vec{E}$  et d'un champ  $\vec{B}$  constamment orthogonaux et en phase, variant selon  $x$  et selon  $t$ .
- b) Par les équations de Maxwell, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  se créent mutuellement et continuellement par induction ; si  $\vec{E} = E_m \cdot \sin(kx - \omega t) \hat{j}$ , alors  $\vec{B} = B_m \cdot \sin(kx - \omega t) \hat{k}$ , la direction de propagation étant donné par  $\hat{i}$  : **l'onde électromagnétique est une onde transversale**. L'onde électromagnétique n'a pas besoin de support matériel pour se propager. Dans le vide, le champ  $\vec{E}$  du champ électromagnétique satisfait à l'équation d'onde  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ . Une équation similaire peut être obtenue pour le champ magnétique. La vitesse de l'onde électromagnétique, dans le vide, est donc  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ .
- c) L'intensité de l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude maximale du champ électrique.

**L'optique ondulatoire.** Pour comprendre les **phénomènes d'interférence**, nous devons aller au delà de l'optique géométrique (celle qui nous a permis de comprendre les lentilles, de construire des instruments d'optique...).

## Le principe de Huygens.

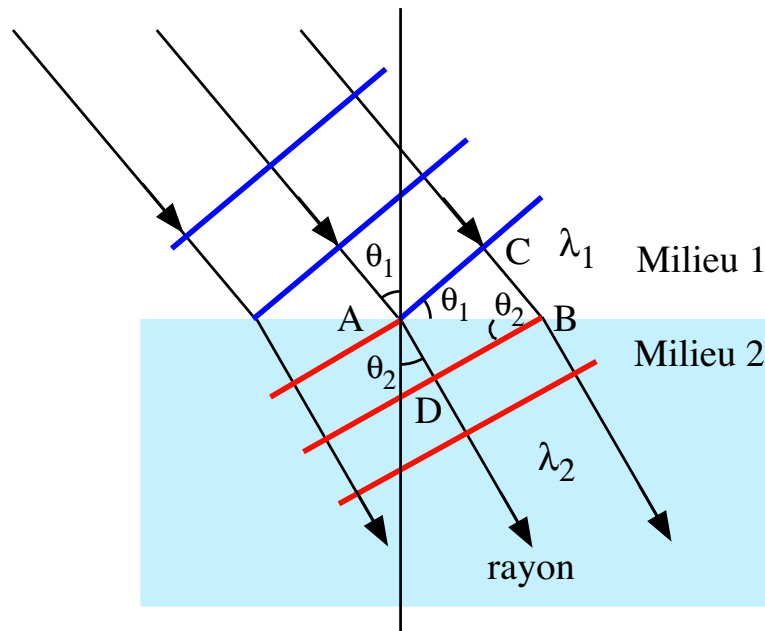
Ce principe est basé sur une construction géométrique qui nous permet de prédire la position future d'un **front d'onde** connaissant sa position présente (un front d'onde est l'ensemble des points qui sont à un même état vibratoire en un instant donné).

*Tout point d'un front d'onde peut être considéré comme la source d'ondelettes se propageant vers l'avant à la même vitesse que l'onde ; le nouveau front d'onde est l'enveloppe de ces ondelettes.*

## Application du principe de Huygens.

### La réfraction.

Voici tout d'abord la loi de la réfraction étudiée en Optique Géométrique :



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad n = \frac{c}{v}$$

$\theta_1$  : angle d'incidence,  $\theta_2$  : angle de réfraction

Nous retrouvons la loi de la réfraction en considérant les positions des fronts d'onde dans deux milieux où la vitesse de propagation de la lumière n'est pas la même.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad n = \frac{c}{v} \quad (\text{Descartes} - \text{Snell})$$

$\theta_i$  = angle par rapport à la normale à l'interface des milieux 1 et 2.

La longueur d'onde d'une onde lumineuse dépend du milieu que l'onde traverse :  $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ .

## Les ondes électromagnétiques

6 décembre 2013

**Les interférences.** C'est la [superposition de 2 ondes cohérentes](#)\*. Nous l'avons étudié dans le cas de la lumière issue de deux [fentes minces](#). Pour un point sur l'écran, repéré par l'angle  $\theta$ , la lumière issue de l'une des fentes est en retard par rapport à celle de l'autre de  $\Delta r = d \sin \theta$ ,  $d$  étant la distance entre les fentes, d'où une différence de phase de  $\varphi = 2\pi \cdot \Delta r / \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière. Si  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique de la lumière issue de l'une des 2 fentes, l'intensité sur l'écran est de :

$$I = 4 E_0^2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

Autrement dit : si la différence de phases  $\varphi$  est de 0 ou d'un multiple entier de  $2\pi$ , ce qui revient à dire que si la différence de parcours  $\Delta r$  est 0 ou un multiple entier de longueurs d'ondes, nous aurons une interférence constructive et un maximum d'intensité.

Les minima d'intensité correspondent à des déphasages multiples impaires de  $\pi$  :  $\varphi = (2m + 1)\pi$   $m = 0, 1, \dots$

\* **Cohérence.** On dit que deux ondes sont cohérentes si leur différence de phase est toujours la même, quelque soit le temps.

## La diffraction.

Pour la diffraction de la lumière au travers d'une fente de largeur  $a$ ,

1. nous avons décomposé la fente en  $N$  parties et utilisé le [Principe de Huygens](#).
2. L'intensité résultante sur l'écran est obtenue en sommant vectoriellement, [par une construction de Fresnel](#), les contributions des diverses ondelettes issues des  $N$  parties de la fente et en tenant compte des déphasages entre 2 ondelettes successives.



Pour un point sur l'écran, repéré par l'angle  $\theta$  à partir de l'axe, l'intensité s'écrit :

$$I_{\theta} = I_{max} \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad \text{avec} \quad 2\alpha = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) a \sin \theta$$

Le premier minimum est à :  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ .

### **La diffraction par une ouverture circulaire. Le critère de Rayleigh.**

Pour une ouverture circulaire de diamètre  $d$ , le premier minimum se trouve à  $\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}$ . Le facteur 1,22 résulte d'une intégration sur la surface de l'ouverture.

Les instruments d'optique ayant toujours une certaine ouverture, pour distinguer 2 points proches, nous devons avoir

$$\theta \geq \theta_R \approx 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{Critère de Rayleigh}).$$

### **Les ailes du Morpho**

La belle couleur bleue turquoise irisée des ailes du Morpho est due à une interférence constructive de la lumière ayant subi une réflexion sur deux "plateaux" consécutifs. L'épaisseur des plateaux et leur séparation font que seules les longueurs d'ondes correspondantes au bleu turquoise ( $\approx 448$  nm) peuvent donner cette interférence constructive, les autres longueurs d'onde du spectre visible n'ont pas d'interférence constructive et sont fortement supprimées.