Chapitre 11

Séries arithmétiques et géométriques

11.1. Séries arithmétiques

Une histoire sur Gauss (célèbre mathématicien allemand)

On raconte que lorsque Gauss était élève, un de ses professeurs de mathématiques lui a infligé comme punition le calcul de la somme $1+2+3+4+5+\cdots+1000$. Gauss à trouvé la réponse en quelques minutes grâce à l'astuce décrite ci-dessous.

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 998 & + & 999 & + & 1000 \\ + & S & = & 1000 & + & 999 & + & 998 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S & = & 1001 & + & 1001 & + & 1001 & + & \cdots & + & 1001 & + & 1001 & + & 1001 \end{array}$$

Puisque le terme 1001 apparaît 1000 fois dans la somme $2S$, on obtient :

$$2S = 1000 \cdot 1001 \iff S = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500'500$$

Définition

Une *série arithmétique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\overset{+r}{\frown}}{+} a_2 \overset{\overset{+r}{\frown}}{+} a_3 \overset{\overset{+r}{\frown}}{+} \cdots \overset{\overset{+r}{\frown}}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$.

Exemples

a) $1 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 2 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 3 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 4 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 5 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 6 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 7 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 8 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 9 \overset{\overset{+1}{\frown}}{+} 10$

b) $1 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 3 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 5 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 7 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 9 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 11 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 13 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 15 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 17 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 19$

c) $2 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 4 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 6 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 8 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 10 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 12 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 14 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 16 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 18 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 20 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 22 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 24 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 26 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 28 \overset{\overset{+2}{\frown}}{+} 30$

d) $120 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 115 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 110 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 105 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 100 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 95 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 90 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 85 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 80 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 75 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 70 \overset{\overset{-5}{\frown}}{+} 65$

Théorème

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ est une série arithmétique de raison r. Alors, on a :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Autrement dit, la valeur de la série est égale au nombre de termes de la somme multiplié par la moyenne du premier terme et du dernier terme.

Preuve

On note $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. On peut utiliser l'astuce inventée par Gauss dont on a parlé au début de cette section. Cette astuce consiste à écrire la somme S une fois normalement et une fois inversée, puis à examiner la somme verticale (voir tableau ci-dessous) :

$$\begin{array}{rrcccccccccccc}
 & S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n \\
+ & S & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
 & 2S & = & a_1 + a_n & + & a_2 + a_{n-1} & + & a_3 + a_{n-2} & + & \cdots & + & a_{n-1} + a_2 & + & a_n + a_1
\end{array}$$

Or, comme S est une série arithmétique, on trouve grâce à la propriété $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$ que :

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$$

> En effet, comme $a_2 = a_1 + r$ et que $a_{n-1} = a_n - r$ (car $a_n = a_{n-1} + r$), on a bien :
>
> $$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$$
>
> De même, puisque $a_3 = a_2 + r$ et que $a_{n-2} = a_{n-1} - r$ (car $a_{n-1} = a_{n-2} + r$), on a aussi :
>
> $$a_3 + a_{n-2} = a_2 + r + a_{n-1} - r = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$
>
> et ainsi de suite...

Donc :

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ fois}} = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Ainsi :

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$\square$

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \frac{1 + 10}{2} = 55$

b) $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \frac{1 + 19}{2} = 100$

c) $\underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30}_{15 \text{ termes}} = 15 \cdot \frac{2 + 30}{2} = 240$

d) $\underbrace{120 + 115 + 110 + 105 + 100 + 95 + 90 + 85 + 80 + 75 + 70 + 65}_{12 \text{ termes}} = 12 \cdot \frac{120 + 65}{2} = 1'110$

11.2. Séries géométriques

Les rentes

Un généreux donateur a décidé de verser 100 CHF sur votre compte en banque tous les premiers janvier de 2001 à 2050. En supposant que le taux d'intérêts de 1% est constant jusqu'en 2050 et que personne n'a retiré d'argent sur ce compte, on peut déterminer le capital en date du premier janvier 2050 en capitalisant chacun des versements (à l'aide de la formule de capitalisation des intérêts composés $C_n = C_0(1+i)^n$).

$$\begin{aligned} C_{2050} &= \underbrace{\underbrace{100}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2050}} + \underbrace{100(1.01)}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2049}} + \underbrace{100(1.01)^2}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2048}} + \underbrace{100(1.01)^3}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2047}} + \cdots + \underbrace{100(1.01)^{48}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2002}} + \underbrace{100(1.01)^{49}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2001}}}_{\text{50 termes (1 par an)}} \\ &= 100\underbrace{\left(1 + 1.01 + 1.01^2 + 1.01^3 + \cdots + 1.01^{48} + 1.01^{49}\right)}_{\text{série géométrique}} \end{aligned}$$

Même si la réponse peut être calculée à la main (en additionnant les 50 termes, on trouve $C_{2050} \cong 6446.30$ CHF (arrondi à 5 centimes près)), il serait bien d'avoir une formule permettant de calculer cette série géométrique sans devoir additionner ces 50 termes.

Définition

Une *série géométrique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k \cdot r}$.

Quitte à effectuer une mise en évidence de a_1 comme dans l'exemple ci-dessus, on peut toujours écrire :

$$a_1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} a_n = a_1 \cdot \left(1 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^2 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^3 \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^{n-2} \overset{\overset{\cdot r}{\curvearrowright}}{+} r^{n-1}\right)$$

Exemples

a) $1 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 2 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 16 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 32 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 64 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 128 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 256 \overset{\overset{\cdot 2}{\curvearrowright}}{+} 512$

b) $1 \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{2} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{4} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{8} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{16} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{32} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{64} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{128} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{256} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{512} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{1024} \overset{\overset{\cdot \frac{1}{2}}{\curvearrowright}}{+} \frac{1}{2048}$

c) $1 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^2 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^3 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^4 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^5 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^6 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^7 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^8 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^9 \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^{10} \overset{\overset{\cdot 1.1}{\curvearrowright}}{+} 1.1^{11}$

d) $12 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 36 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 108 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 324 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 972 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 2916 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 8748 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 26244 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 78732 \overset{\overset{\cdot 3}{\curvearrowright}}{+} 236196$

Théorème

La formule permettant de calculer une série géométrique de raison r et dont le premier terme vaut 1 est :

$$\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad \left(= \frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

Remarquons que n est le nombre de termes de cette série.

Preuve

On a en distribuant :

$$\begin{aligned}
&\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}\right)\left(r - 1\right) \\
&= \quad\quad\; r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\
&\quad -1 - r - r^2 - r^3 - r^4 - \cdots - r^{n-1} \\
&= r^n - 1
\end{aligned}$$

On a ainsi montré que :

$$\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}\right)\left(r - 1\right) = r^n - 1$$

Par conséquent en divisant de chaque côté par $(r-1)$ on obtient la formule énoncée dans le théorème. $\square$

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512}_{\text{10 termes}} = \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$

b) $\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048}}_{\text{12 termes}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$= \dfrac{4095}{2048} = 1.9995$

c) $\underbrace{1 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3 + 1.1^4 + 1.1^5 + 1.1^6 + 1.1^7 + 1.1^8 + 1.1^9 + 1.1^{10} + 1.1^{11}}_{\text{12 termes}}$

$= \dfrac{1.1^{12} - 1}{1.1 - 1} \cong 21.3843$

d) $\underbrace{12 + 36 + 108 + 324 + 972 + 2916 + 8748 + 26244 + 78732 + 236196}_{\text{10 termes}}$

$= 12 \cdot \left(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 + 19683\right) = 12 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1}$

$= 354'288$