Chapitre 12

Séries et développements de Taylor

12.1 Les séries arithmétiques et géométriques

Il s'agit d'un résumé

12.1.1 Le symbole somme

Le symbole $\sum$ permet de condenser l'écriture de grandes sommes.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

12.1.2 Séries arithmétiques

Définition

Une *série arithmétique* est une somme finie de termes $a_1 \overset{+r}{\frown}{+} a_2 \overset{+r}{\frown}{+} a_3 \overset{+r}{\frown}{+} \cdots \overset{+r}{\frown}{+} a_n$ pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 0$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$.

Théorème

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ est une série arithmétique de raison r. Alors, on a :

$$a_1 \overset{+r}{\frown}{+} a_2 \overset{+r}{\frown}{+} a_3 \overset{+r}{\frown}{+} \cdots \overset{+r}{\frown}{+} a_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \Big(a_1 + r\,k\Big) = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

12.1.3 Séries géométriques

Définition

Une *série géométrique* est une somme finie de termes $a_1 \overset{\cdot r}{\frown}{+} a_2 \overset{\cdot r}{\frown}{+} a_3 \overset{\cdot r}{\frown}{+} \cdots \overset{\cdot r}{\frown}{+} a_n$ pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 1$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k \cdot r}$.

Théorème

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ est une série géométrique de raison r. Alors, on a :

$$a_1 \overset{\cdot r}{\frown}{+} a_2 \overset{\cdot r}{\frown}{+} \cdots \overset{\cdot r}{\frown}{+} a_n = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \Big(a_1 \cdot r^k\Big) = a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k = a_1\,\frac{1 - r^n}{1 - r}}$$

12.2 Une propriété fondamentale des nombres réels

Soit $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ une suite[1] de nombres réels. S'il existe un rang $K \geqslant k_0$ tel que

1. $(a_k)_{k\geqslant K}$ est *monotone croissante* ($a_{k+1} \geqslant a_k$ pour tout $k \geqslant K$) ;
2. $(a_k)_{k\geqslant K}$ est *majorée* (il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $a_k \leqslant M$ pour tout $k \geqslant K$).

Alors, la suite $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ (il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$).

12.3 Séries infinies et critères de convergence

12.3.1 Séries infinies

Soit $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ une suite de nombres réels. On définit une série infinie comme étant la limite de ses *sommes partielles* (si cette limite existe). On dit que a_k est le *terme général de cette série.*

$$\underbrace{\sum_{k\geqslant k_0} a_k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k}_{\text{ce sont deux façons de noter la même somme}} \overset{\text{définition}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=k_0}^{n} a_k}_{\text{somme partielle}}$$

12.3.2 La série géométrique infinie et sa convergence

Soit $z \in \mathbb{C}$ ($z = 1$ compris). La série géométrique infinie de raison z est

$$\sum_{k\geqslant 0} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Théorème

1. Si $|z| < 1$, alors la série converge dans $\mathbb{C}$ et vaut $\boxed{\sum\limits_{k\geqslant 0} z^k = \dfrac{1}{1-z}}$.
2. Si $|z| \geqslant 1$, alors la série ne converge pas dans $\mathbb{C}$.

Preuve

1. Si $|z| \geqslant 1$, on a $\lim_{k\to+\infty} z^k \neq 0$ et par la contraposée du théorème fondamental de la page suivante, la série ne converge pas (dans $\mathbb{C}$).
2. Si $|z| < 1$, les sommes partielles sont des séries géométriques finies

$$\sum_{k\geqslant 0} z^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \overset{\substack{\text{série}\\\text{géométrique}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n = 0$, on a $\sum\limits_{k\geqslant 0} z^k = \dfrac{1}{1-z}$. □

Un cas particulier

Voici une série géométrique infine (cas $z = \frac{1}{2}$).

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

1. Dans ce chapitre, toutes les suites sont indicées par un sous-ensemble des nombres naturels ($k_0 \in \mathbb{N}$).

12.3.3 La série harmonique

Voici une série infinie qui diverge. C'est la *série harmonique*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty}$$

En effet, supposons par l'absurde que la série harmonique converge vers un nombre $s \in \mathbb{R}$. Notons s_n la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers s, tout comme la sous-suite $(s_{2n})_{n\geqslant 1}$. Autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = s$$

Considérons la suite $(s_{2n} - s_n)_{n\geqslant 1}$. Par les propriétés des limites, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} s_n = s - s = 0 \ (\bigstar)$$

Mais on a, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fractions}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Or si k est un nombre tel que $k \leqslant 2n$, alors $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$, donc

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

On vient de voir que chaque terme de la suite $(s_{2n} - s_n)_{n\geqslant 1}$ est plus grand ou égal à $\frac{1}{2}$. Cette suite ne peut donc pas converger vers 0, ce qui contredit $(\bigstar)$. $\square$

12.3.4 Théorème fondamental sur les convergences de séries

Soit $\sum_{k\geqslant k_0} a_k$ une série avec $a_k \in \mathbb{C}$. Si cette série converge dans $\mathbb{C}$, alors son terme général tend vers zéro. Autrement dit

$$\sum_{k\geqslant k_0} a_k = s \implies \lim_{k\to+\infty} a_k = 0$$

Preuve

Notons s_n la somme partielle $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$. Par les propriétés des limites, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(s_n - s_{n-1}\right) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

$\square$

La réciproque du théorème fondamental est fausse

En effet, la série harmonique fournit un contre-exemple.

12.3.5 Critère de comparaison

Soit $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ et $(b_k)_{k\geqslant k_0}$ deux suites de nombres réels tels que, à partir d'un rang $K \geqslant k_0$, on a $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ pour chaque $k \geqslant K$, alors :

1. Si $\sum\limits_{k\geqslant k_0} b_k$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{k\geqslant k_0} a_k$ converge dans $\mathbb{R}$.
2. Si $\sum\limits_{k\geqslant k_0} a_k$ diverge, alors $\sum\limits_{k\geqslant k_0} b_k$ diverge.

Preuve

1. Puisque $\sum\limits_{k\geqslant k_0} b_k$ converge, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{k\geqslant K} b_k = t$.
   Notons s_n la somme partielle $\sum\limits_{k=K}^{n} a_k$ et t_n la somme partielle $\sum\limits_{k=K}^{n} b_k$.
   Comme $a_k \geqslant 0$ et $b_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant K$, il est évident que les suites des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant K}$ et $(t_n)_{n\geqslant K}$ sont monotones croissantes.

   Comme pour tout $k \geqslant K$ on a $a_k \leqslant b_k$, on sait que $s_n \leqslant t_n \leqslant t$ pour tout $n \geqslant K$ (car $(t_n)_{n\geqslant K}$ est monotone croissante).

   Ainsi, $(s_n)_{n\geqslant K}$ est une suite monotone croissante majorée. Par la propriété fondamentale des nombres réels vue en page 102, on conclut que la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant K}$ est convergente et qu'ainsi $\sum\limits_{k\geqslant k_0} a_k$ converge.
2. Il s'agit de la contraposée du point 1. □

Application du critère de comparaison

On va comparer la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ à la série convergente suivante.

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = 1$$

On démontre la convergence de cette dernière série grâce à une somme télescopique.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) = 1$$

De plus, on a, pour $k \geqslant 4$

$$\boxed{0 \leqslant \frac{1}{k^2} < \frac{2}{(k+1)(k+2)}} \bigstar$$

En effet, on a

$$f(k) = \frac{2}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{k^2} = \frac{2k^2 - (k+1)(k+2)}{k^2(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 - 3k - 2}{k^2(k+1)(k+2)}$$

Le seul zéro positif est $k = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \cong 3.56$, ainsi, après $k = 4$, la fonction ne changera plus de signes. Comme $f(4) > 0$, on a bien $f(k) > 0$ pour $k \geqslant 4$.

Grâce au critère de comparaison, $\bigstar$ montre que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge puisque $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$ converge (sa limite est 1).

Remarque. Ce n'est pas facile, mais on peut montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

12.3.6 Critère de la racine (ou de Cauchy)

On considère la série infinie $\sum\limits_{k \geqslant k_0} a_k$ avec $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant k_0$.

$$\text{Si } \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = c \text{ (si cette limite existe) et } \begin{cases} c < 1, \text{ alors la série converge dans } \mathbb{R} \\ c = 1, \text{ alors il y a doute} \\ c > 1, \text{ alors la série diverge} \end{cases}$$

Preuve

On suppose que la limite existe et vaut c. On distingue trois cas :

1. $c < 1$.

   Soit $r \in]c, 1[$. Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = c < 1$, à partir d'un certain rang $K \geqslant k_0$, on a

   $$\sqrt[k]{a_k} \leqslant r < 1 \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant K$$

   De plus, comme $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant k_0$, on sait que $c \geqslant 0$. Donc $r \in [0, 1[$.

   Ainsi, on a

   $$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant K} a_k &= a_K + a_{K+1} + a_{K+2} + a_{K+3} + \cdots \\ &= \left(\sqrt[K]{a_K}\right)^K + \left(\sqrt[K+1]{a_{K+1}}\right)^{K+1} + \left(\sqrt[K+2]{a_{K+2}}\right)^{K+2} + \left(\sqrt[K+3]{a_{K+3}}\right)^{K+3} + \cdots \\ &\leqslant r^K + r^{K+1} + r^{K+2} + r^{K+3} + \cdots \\ &= r^K \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) \overset{r \in [0,1[}{=} r^K \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{r^K}{1-r} \end{aligned}$$

   On a ainsi montré que la suite des sommes partielles est majorée.

   $$\sum_{k=k_0}^{n} a_k \overset{a_k \geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{K-1} a_k + \sum_{k=K}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=k_0}^{K-1} a_k + \frac{r^K}{1-r}$$

   Donc $\sum_{k \geqslant k_0} a_k$ converge, puisque la suite des sommes partielles est monotone croissante ($a_k \geqslant 0$) et majorée.

2. $c > 1$.

   Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = c > 1$, à partir d'un certain rang $K \geqslant k_0$, on a

   $$\sqrt[k]{a_k} > 1 \iff a_k > 1^k = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant K$$

   Ainsi le terme général ne tend pas vers 0. Donc, par la contraposée du théorème fondamental sur les convergences de séries, la série ne converge pas (dans $\mathbb{C}$).

3. $c = 1$.

   La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ ne converge pas et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, pourtant pour ces deux séries, on a $c = 1$. En effet, pour $m = 1$ et $m = 2$, on a

$$c = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^m}} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{e^{\ln\left(\frac{1}{k^m}\right)}} = \lim_{k \to +\infty} e^{-\frac{m \ln(k)}{k}} = e^{-\lim \frac{m \ln(k)}{k}} \overset{\text{Hosp.}}{=} e^{-\lim \frac{m}{k}} = e^0$$

$\square$

12.3.7 Critère du quotient (ou d'Alembert)

On considère la série infinie $\sum\limits_{k \geqslant K_0} a_k$ avec $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant k_0$.

$$\text{Si} \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = c \text{ (si cette limite existe) et } \begin{cases} c < 1, \text{ alors la série converge dans } \mathbb{R} \\ c = 1, \text{ alors il y a doute} \\ c > 1, \text{ alors la série diverge} \end{cases}$$

Preuve

On suppose que la limite existe et vaut c. On distingue trois cas :

1. $c < 1$.

   Soit $r \in]c, 1[$. Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = c < 1$, à partir d'un certain rang $K \geqslant k_0$, on a

   $$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant r < 1 \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant K$$

   De plus, comme $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant k_0$, on sait que $c \geqslant 0$. Donc $r \in [0, 1[$.

   Ainsi, avec un peu d'astuce, on a

   $$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant K} a_k &= a_K + a_{K+1} + a_{K+2} + a_{K+3} + \cdots \\ &= a_K \cdot \left(1 + \frac{a_{K+1}}{a_K} + \frac{a_{K+2}}{a_{K+1}} \cdot \frac{a_{K+1}}{a_K} + \frac{a_{K+3}}{a_{K+2}} \cdot \frac{a_{K+2}}{a_{K+1}} \cdot \frac{a_{K+1}}{a_K} + \cdots \right) \\ &\leqslant a_K \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) \overset{r \in [0,1[}{=} a_K \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{a_K}{1-r} \end{aligned}$$

   On a ainsi montré que la suite des sommes partielles est majorée.

   $$\sum_{k=k_0}^{n} a_k \overset{a_k \geqslant 0}{\leqslant} \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{K-1} a_k + \sum_{k=K}^{+\infty} a_k \leqslant \sum_{k=k_0}^{K-1} a_k + \frac{a_K}{1-r}$$

   Donc $\sum_{k \geqslant k_0} a_k$ converge, puisque la suite des sommes partielles est monotone croissante ($a_k \geqslant 0$) et majorée.

2. $c > 1$.

   Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = c > 1$, à partir d'un certain rang $K \geqslant k_0$, on a

   $$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \iff a_{k+1} > a_k \qquad \text{pour tout} \qquad k \geqslant K$$

   Ainsi, la série finissant par être monotone croissante, son terme général ne tend pas vers 0. Donc, par la contraposée du théorème fondamental sur les convergences de séries, la série ne converge pas (dans $\mathbb{C}$).

3. $c = 1$.

   La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ ne converge pas et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, pourtant pour ces deux séries, on a $c = 1$. En effet, pour $m = 1$ et $m = 2$, on a

   $$c = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^m}}{\frac{1}{k^m}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^m}{(k+1)^m} = 1$$

$\square$

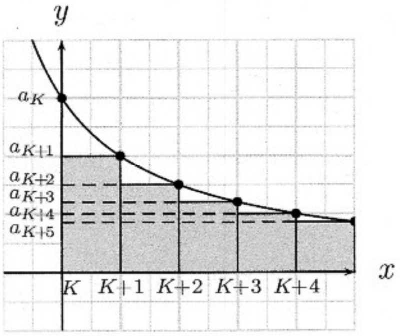
12.3.8 Critère de l'intégrale

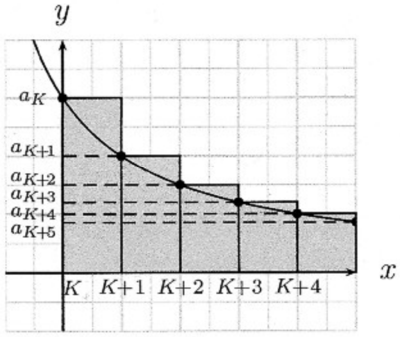
On considère la série infinie $\sum_{k\geqslant k_0} a_k$ où $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite décroissante avec $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant k_0$. Supposons qu'il existe un rang $K \geqslant k_0$ et une fonction décroissante définie sur $[K, +\infty[$ telle que $f(k) = a_k$ (pour $k \geqslant K$). Alors

1. si l'intégrale converge dans $\mathbb{R}$, alors la série converge dans $\mathbb{R}$, et réciproquement ;
2. si la série diverge, alors l'intégrale diverge, et réciproquement.

Preuve du critère de l'intégrale

Les hypothèses nous placent dans une situation graphique semblable aux dessins suivants.





On en déduit les chaînes d'inégalités suivantes pour tout $n \geqslant K+1$ ($n = K+5$ sur les schémas).

$$0 \leqslant \sum_{k=K+1}^{n} a_k \leqslant \int_K^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=K}^{n-1} a_k$$

Donc, comme la suite $\left(\int_K^n f(x)\,dx\right)_{n\geqslant K+1}$ et la suite des sommes partielles sont monotones croissantes, on a les majorations suivantes.

$$\int_K^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=K}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=K+1}^{n} a_k \leqslant \int_K^{+\infty} f(x)\,dx$$

Par conséquent, on peut démontrer les points 1 et 2.

1. si la série est convergente, la suite $\left(\int_K^n f(x)\,dx\right)$ est monotone croissante et majorée, donc converge ! Pour la réciproque, si l'intégrale est convergente, la suite $\left(\sum_{k=k_0}^{n} a_k\right)$ est monotone croissante et majorée, donc converge.
2. Ce sont les contraposées des deux propositions du point précédent. Elles sont donc aussi vraies. $\square$

Application du critère de l'intégrale

On peut très facilement retrouver les résultats démontrés aux pages 103 et 104 grâce à ce critère. Les fonctions utilisées ci-dessous satisfont bien les hypothèses du critère.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge} \implies \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} \text{ diverge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge dans } \mathbb{R} \implies \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \text{ converge dans } \mathbb{R}$$

12.3.9 Convergence des séries alternées

Définition

Une série est dite *alternée* si elle peut s'écrire de la manière suivante.

$$\sum_{k\geqslant k_0}(-1)^k a_k \quad \text{avec} \quad a_k \geqslant 0$$

Théorème des séries alternées

Une série alternée est convergente dans $\mathbb{R}$ si, pour tout $k \geqslant k_0$, on a

$$\underbrace{a_{k+1} \leqslant a_k}_{\text{la suite } a_k \text{ est monotone décroissante}} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\lim_{k\to+\infty} a_k = 0}_{\text{le terme général de la série tend vers } 0}$$

Preuve

On considère la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant k_0}$ où $s_n = \sum_{k=k_0}^{n}(-1)^k a_k$. On considère encore les sous-suites de sommes partielles $(c_n)_{n\geqslant k_0}$ et $(d_n)_{n\geqslant k_0}$ définies par

$$c_n = s_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad d_n = s_{2n}$$

Ces suites satisfont les propriétés suivantes.

1. (c_n) est monotone croissante. En effet, on a

$$(c_n) \text{ est monotone croissante} \iff c_{n+1} \geqslant c_n \iff s_{2n+3} \geqslant s_{2n+1}$$

$$\iff \sum_{k=k_0}^{2n+3}(-1)^k a_k \geqslant \sum_{k=k_0}^{2n+1}(-1)^k a_k \iff \sum_{k=k_0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=k_0}^{2n+1}(-1)^k a_k \geqslant 0$$

$$\iff \sum_{k=2n+2}^{2n+3}(-1)^k a_k \geqslant 0 \iff a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0 \iff a_{2n+2} \geqslant a_{2n+3}$$

$$\iff (a_n) \text{ est monotone décroissante}$$

2. (d_n) est monotone décroissante. En effet, on a

$$(d_n) \text{ est monotone décroissante} \iff d_{n+1} \leqslant d_n \iff s_{2n+2} \leqslant s_{2n}$$

$$\iff \sum_{k=k_0}^{2n+2}(-1)^k a_k \leqslant \sum_{k=k_0}^{2n}(-1)^k a_k \iff \sum_{k=k_0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=k_0}^{2n}(-1)^k a_k \leqslant 0$$

$$\iff \sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k a_k \leqslant 0 \iff -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leqslant 0 \iff a_{2n+2} \leqslant a_{2n+1}$$

$$\iff (a_n) \text{ est monotone décroissante}$$

3. $(d_n - c_n)$ converge vers 0. En effet, on a

$$d_n - c_n = \sum_{k=k_0}^{2n}(-1)^k a_k - \sum_{k=k_0}^{2n+1}(-1)^k a_k = -(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On peut affirmer (en exercice) que les suites (c_n) et (d_n) convergent vers la même valeur $l \in \mathbb{R}$ et que $c_n \leqslant l \leqslant d_n$ pour tout $n \geqslant k_0$. Ainsi la suite des sommes partielles converge aussi vers cette valeur l. □

Bonus de la preuve. La limite l satisfait $s_{2n+1} \leqslant l \leqslant s_{2n}$ pour tout $n \geqslant k_0$.

La réciproque du théorème des séries alternées est fausse

Si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série alternée diverge (c'est la contraposée du théorème fondamental sur les convergences de séries). Cependant, voici deux exemples de séries alternées où la condition de décroissance n'est pas respectée : la première série est convergente dans $\mathbb{R}$; la deuxième ne l'est pas.

Exemple 1

On considère la série alternée

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k \qquad \text{où} \qquad a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Autrement dit, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k = \frac{2}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{1}{6^2} + - \cdots$$

Soit $k \geqslant 4$, k pair, alors on a $a_k < a_{k+1}$. En effet

$$\frac{1}{k^2} < \frac{2}{(k+1)^2} \overset{k>0}{\iff} (k+1)^2 < 2k^2 \iff k^2 - 2k - 1 > 0 \overset{k>0}{\iff} k > 1 + \sqrt{2} \cong 2.41$$

Donc la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ n'est pas monotone décroissante. Pourtant, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k = \underbrace{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + - \cdots}_{\text{convergente par le théorème des séries alternées}} + \overbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots}^{\text{série croissante et majorée par } \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\text{, donc convergente}}$$

Donc cette série alternée converge [2].

Exemple 2

On considère la série alternée

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k \qquad \text{où} \qquad a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Autrement dit, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k = \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$$

Soit $k \geqslant 2$, k pair, alors on a $a_k < a_{k+1}$. En effet

$$\frac{1}{k} < \frac{2}{k+1} \overset{k>0}{\iff} k+1 < 2k \iff k > 1$$

Donc la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ n'est pas monotone décroissante. Pourtant, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}a_k = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots}_{\geqslant 0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \geqslant \overbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots}^{\text{diverge par le critère de l'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{1}{2x+1}dx = +\infty}$$

Donc cette série alternée diverge [2].

2. Il faudrait montrer cela formellement avec les suites partielles afin d'être certain d'éviter la subtilité vue en page 443

12.3.10 Le théorème de la convergence absolue

Définition

Soit une série infinie $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ avec $a_k \in \mathbb{C}$.

On dit que cette série *converge absolument* si $\sum_{k\geqslant 0} |a_k|$ converge dans $\mathbb{R}$.

Théorème des séries absolument convergentes

Si une série converge absolument, alors elle converge dans $\mathbb{C}$.

Autrement dit

$$\sum_{k\geqslant 0} |a_k| \text{ converge dans } \mathbb{R} \implies \sum_{k\geqslant 0} a_k \text{ converge dans } \mathbb{C}$$

Preuve (dans le cas où $a_k \in \mathbb{R}$)

On crée les suites $(a_k^+)_{k\geqslant 0}$ et $(a_k^-)_{k\geqslant 0}$ en posant [3]

$$a_k^+ = \max(a_k, 0) \qquad \text{et } a_k^- = \max(-a_k, 0)$$

Ainsi,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{si } a_k \text{ est positif, on a} & a_k^+ = a_k & \text{et } a_k^- = 0 \\ \text{si } a_k \text{ est négatif, on a} & a_k^+ = 0 & \text{et } a_k^- = -a_k \\ \text{si } a_k = 0\text{, on a} & a_k^+ = 0 & \text{et } a_k^- = 0 \end{array}\right. \implies \text{Dans tous les cas, on a } a_k = a_k^+ - a_k^-$$

Il est donc évident que

$$0 \leqslant a_k^+ \leqslant |a_k| \qquad \text{et } 0 \leqslant a_k^- \leqslant |a_k|$$

Puisque la série converge absolument ($\sum_{k\geqslant 0} |a_k|$ converge), le critère de comparaison affirme que les séries $\sum_{k\geqslant 0} a_n^+$ et $\sum_{k\geqslant 0} a_n^-$ sont convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ est convergente. En effet

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k = \sum_{k\geqslant 0} \left(a_k^+ - a_k^-\right) = \sum_{k\geqslant 0} a_k^+ \; - \; \sum_{k\geqslant 0} a_k^-$$

□

La réciproque du théorème des séries absolument convergentes est fausse

En effet, la série harmonique alternée

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$$

est une série convergente (grâce au théorème des séries alternées), mais qui n'est pas absolument convergente, car la série harmonique

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

est une série divergente.

3. Cette manière de faire ne fonctionne pas dans $\mathbb{C}$.

12.4 Séries entières et rayon de convergence

Définition

Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres (qui pourraient être complexes). On considère une variable x (qui peut aussi s'écrire z si on travaille dans les nombres complexes).

La série $S(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ est appelée *série entière* et les coefficients a_k sont appelés *coefficients de la série.*

Conséquences du critère du quotient

En étudiant la convergence absolue de la série entière $S(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$, c'est-à-dire la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_k| \cdot |x|^k$, à l'aide du critère du quotient, on obtient

$$c = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}| \cdot |x|^{k+1}}{|a_k| \cdot |x|^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot |x|$$

Posons $R = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$. On distingue trois cas.

1. $c < 1 \iff |x| < R$.
   La série $S(x)$ converge absolument, donc converge.
2. $c = 1 \iff |x| = R$.
   Il y a doute : il faut étudier la convergence de $S(x)$ pour chaque x tel que $|x| = R$.
3. $c > 1 \iff |x| > R$.
   La série $S(x)$ ne converge pas absolument ; mais a priori elle pourrait converger.

Théorème (sans preuve)

Si $c > 1$, c'est-à-dire si $|x| > R$, alors la série $S(x)$ diverge !

Définition

R est appelé *rayon de convergence de la série entière.* Il est possible que $R = +\infty$.

Exemple

On considère la série entière réelle $S(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} kx^k$.

1. Recherche du rayon de convergence.
   On étudie la convergence absolue de la série grâce au critère du quotient. Après un petit calcul, on trouve que le rayon de convergence est $R = 1$.
2. Étude de la convergence de la série pour $|x| = R$.
   (a) Pour $x = 1$, la série $S(1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots$ diverge évidemment.
   (b) Pour $x = -1$, la série $S(-1) = \underbrace{(-1)+2}_{=1} + \underbrace{(-3)+4}_{=1} + \underbrace{(-5)+6}_{=1} + \cdots$ diverge.

En conclusion, cette série converge absolument lorsque $x \in \,]-1, 1[$ et ne converge pas lorsque $x \notin \,]-1, 1[$.

12.5 Développements de Taylor

12.5.1 Rappel : la tangente à une courbe en un point

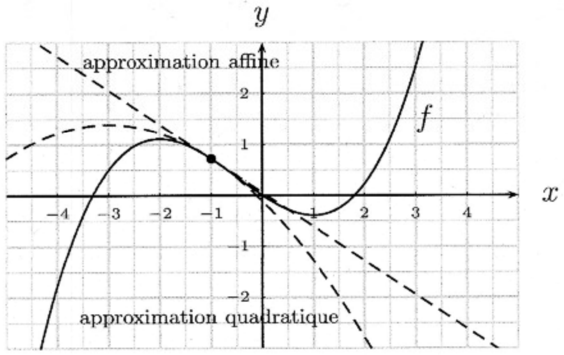
Si $f : D \to A$ est une fonction réelle dérivable, alors on sait que l'équation de la tangente à f en un point $x_0 \in D$ est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On peut donc approximer la fonction f autour de x_0 par la fonction affine

$$d(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette fonction satisfait les propriétés $d(x_0) = f(x_0)$ et $d'(x_0) = f'(x_0)$.



Si on cherche une approximation par une fonction quadratique $p(x)$, on va vouloir que cette fonction satisfasse :

$$p(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad p'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{et} \quad p''(x_0) = f''(x_0)$$

Une telle fonction existe et vaut

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

12.5.2 Théorème de Taylor

Théorème de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on peut dériver $n + 1$ fois et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $n + 1$ sont continues. Soit x et $x_0 \in [a, b]$. Alors il existe ξ entre x et x_0 tel que

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{approximation de } f \text{ par un polynôme de degré } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{Reste de Lagrange}}}$$

Il s'agit du *développement limité de Taylor d'ordre n en x_0 de la fonction f*. Lorsque $x_0 = 0$, on parle de *développement limité de MacLaurin d'ordre n de f*.

Si on note $p_n(x)$ le polynôme de degré n ci-dessus et qu'on déplie la somme, on a :

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ce polynôme satisfait les propriétés suivantes.

$$p_n(x_0) = f(x_0)\ ,\ \ p_n'(x_0) = f'(x_0)\ ,\ \ldots\ ,\ p_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)\ ,\ \ldots\ ,\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Preuve

Idée : on fixe $x \in [a,b]$ et on considère la fonction en une nouvelle variable y suivante.

$$\tilde{p}_x(y) = f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f''(y)}{2}(x-y)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

Puis, on considère la fonction φ en y suivante.

$$\varphi(y) = f(x) - \tilde{p}_x(y)$$

Avec cette façon de noter, $\tilde{p}_x(x_0)$ est l'approximation de f par un polynôme de degré n et on trouve une formule équivalente à la formule de l'encadré du théorème de Taylor.

$$f(x) = \tilde{p}_x(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \iff f(x) - \tilde{p}_x(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Ainsi, il faut montrer qu'il existe ξ entre x et x_0 tel que $\varphi(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.
La fonction φ satisfait :

$$i) \quad \varphi'(y) = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \qquad ii) \quad \varphi(x) = 0$$

En effet $i)$ s'obtient en dérivant directement par rapport à y (somme télescopique) et $ii)$ s'obtient grâce au fait que $\tilde{p}_x(x) = f(x)$.

Le terme ξ apparaît grâce au théorème de Rolle. Pour pouvoir appliquer le théorème de Rolle, il faut trouver une fonction continue F qui s'annule en x_0 et en x. Rolle nous permettra ainsi d'affirmer qu'il existe ξ entre x et x_0 tel que $F'(\xi) = 0$. L'astuce finale consiste à bien choisir F ! Voici cette fonction :

$$F(y) = \varphi(y)(x-x_0)^{n+1} - \varphi(x_0)(x-y)^{n+1} = \begin{vmatrix} \varphi(y) & (x-y)^{n+1} \\ \varphi(x_0) & (x-x_0)^{n+1} \end{vmatrix}$$

On a $F(x) = \varphi(x)(x-x_0)^{n+1} \overset{ii)}{=} 0$ et évidemment $F(x_0) = 0$. Donc, par Rolle, il existe ξ entre x et x_0 tel que $F'(\xi) = 0$. Or, la dérivée de F par rapport à y est :

$$\begin{aligned} F'(y) &= \varphi'(y)(x-x_0)^{n+1} - \varphi(x_0)(n+1)(x-y)^n(-1) \\ &\overset{i)}{=} -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n(x-x_0)^{n+1} + \varphi(x_0)(n+1)(x-y)^n \end{aligned}$$

Donc

$$0 = F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1} + \varphi(x_0)(n+1)(x-\xi)^n$$

En simplifiant par $(x-\xi)^n$, on obtient ce qu'on voulait

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1} + \varphi(x_0)(n+1) &\iff (n+1)\varphi(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^{n+1} \\ &\iff \varphi(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Conséquence

Le reste de Lagrange permet d'estimer l'erreur commise par l'estimation à l'aide du développement limité. En effet, on a

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{\xi \text{ entre } x_0 \text{ et } x} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Définition

Si lorsque $n \to +\infty$, le développement limité de Taylor d'ordre n en x_0 de la fonction f s'approche de f (il faut pour cela que le reste de Lagrange tende vers 0 et que la série converge), on a

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

C'est *la série de Taylor de* f. Lorsque $x_0 = 0$, c'est *la série de MacLaurin de* f.

12.5.3 Les séries de MacLaurin des fonctions exp, cos et sin

1. Pour $f(x) = e^x$, le reste de Lagrange tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De plus, la série de MacLaurin suivante est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ (même $x \in \mathbb{C}$).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \iff e^x = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$$

   Comme $f(1) = e$, on a une nouvelle formule pour calculer le nombre e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots \iff e = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

   Cette formule est bien plus efficace que $e = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

2. Pour $f(x) = \cos(x)$, le reste de Lagrange tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De plus, la série de MacLaurin suivante est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ (même $x \in \mathbb{C}$).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + - \cdots \iff \cos(x) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

3. Pour $f(x) = \sin(x)$, le reste de Lagrange tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De plus, la série de MacLaurin suivante est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ (même $x \in \mathbb{C}$).

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + - \cdots \iff \sin(x) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On peut ainsi montrer que

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}}$$

En effet, on a

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{10}}{10!} - i\frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

En posant $x = \pi$, on obtient une des plus extraordinaires relations des mathématiques.

$$\boxed{\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}} \quad \text{car} \quad e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

12.5.4 Une autre façon d'exprimer le reste de Lagrange

Si f est continue sur $[a, b]$ et si ses $(n+1)$ dérivées successives sont continues, alors

$$f(x) - p_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Cette formule se démontre facilement par récurrence : pour $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental du calcul intégral ; pour le pas de récurrence, on écrit l'intégrale ci-dessus de deux manière : la première à l'aide de l'hypothèse de récurrence ; la deuxième en intégrant par parties.

12.5.5 La série de MacLaurin de $\ln(x+1)$

Pour la fonction $f(x) = \ln(x+1)$, la série de MacLaurin est la suivante.

$$\ln(x+1) = S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots = \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Étudions la convergence de cette série entière.

1. Recherche du rayon de convergence : on étudie la convergence absolue de la série grâce au critère du quotient (ou d'Alembert).

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \frac{|x|^4}{4} + \frac{|x|^5}{5} + \frac{|x|^6}{6} + \frac{|x|^7}{7} + \frac{|x|^8}{8} + \cdots$$

   On calcule la valeur du nombre c utilisé dans le critère du quotient

$$c = \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{|x|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x|^k}{k}} = \lim_{k \to +\infty} |x| \frac{k}{k+1} = |x|$$

   Donc, par le critère du quotient, si $|x| < 1$, la série converge absolument et si $|x| > 1$, la série ne converge pas absolument. Ainsi, le rayon de convergence est $R = 1$.

2. Étude de la convergence de la série pour $|x| = R = 1$.

   (a) Pour $x = -1$, on a

$$S(-1) = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

   Donc $-S(-1)$ est la série harmonique, donc diverge.

   (b) Pour $x = 1$, la série est la série harmonique alternée, donc converge par le théorème des séries alternées.

En conclusion, cette série ne converge que pour $x \in \,]-1, 1]$ (elle ne converge absolument que pour $x \in \,]-1, 1[$).

On peut facilement montrer que si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, alors le reste de Lagrange tend vers 0. C'est bien moins facile pour $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$.

12.5.6 Une dernière subtilité

On a donc trouvé la valeur de la série harmonique alternée.

$$\ln(2) = \ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

Regardons ce qu'il se passe si on change l'ordre dans lequel on additionne les termes de cette série.

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=\frac{1}{14}} - \frac{1}{16} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{18}}_{=\frac{1}{18}} - \frac{1}{20} + \cdots \\
=\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} + \cdots \\
=\ & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots\right) \\
=\ & \tfrac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

Ainsi, si on change l'ordre dans lequel l'addition est effectuée, alors on change la valeur de la série.

C'est pour cette raison qu'il ne faut jamais oublier qu'une série est une limite de sommes partielles. Le changement d'ordre ci-dessus change complètement les sommes partielles et la série n'a donc rien à voir avec la série de départ !