



Similitude et déplacement

TRANSFORMATIONS CONSERVATRICES



En mathématiques, la similitude et le déplacement sont tous les deux des transformations. Le terme « déplacement » est très proche de la notion de mouvement : c'est une transformation du plan qui change un point M en son image, notée M' , sous certaines conditions. La similitude quant à elle est une transformation du plan où l'image ressemble à la figure d'origine appelée antécédent.

SIMILITUDE

DÉFINITION

Une similitude est une application qui conserve les rapports de distance. Si les points A, B, C et D ont pour images A', B', C' et D' par une similitude, avec $C=D$, alors on a l'égalité : $AB/CD = A'B'/C'D'$.

Une similitude plane est une similitude dont les images et les antécédents sont dans le plan (deux dimensions). On dit qu'une figure et son image par une similitude sont semblables. Deux triangles sont donc qualifiés de triangles semblables lorsque l'un est l'image de l'autre par une similitude.

PROPRIÉTÉS

On définit le rapport k de la similitude s comme étant le facteur strictement positif de multiplication de longueur entre l'objet et son image. Si A et B ont pour images respectives A' et B' , alors : $A'B' = kAB$

On dit que $s \times k$ multiplie les distances par k . Une similitude est une transformation bijective, c'est-à-dire que pour toute image M' par une similitude, il existe un unique antécédent M .

La transformation réciproque s^{-1} (telle que $s \circ s^{-1} = s^{-1} \circ s$ soit une identité) d'une similitude s de rapport k est une similitude de rapport $1/k$.

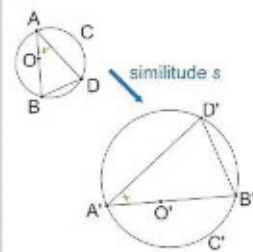
La composée de deux similitudes est une similitude.

Le rapport K de la composée de deux similitudes s de rapport k et s' de rapport k' est le produit des rapports des deux similitudes : $K = kk'$.

Une similitude conserve les angles géométriques (non orientés), les barycentres et les figures.

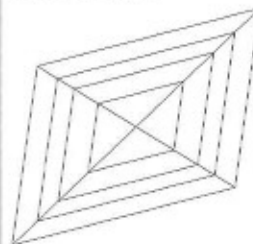
Par exemple, ici :

- le barycentre O de $(A,1), (B,1)$ et $(D,1)$ a pour image O' le barycentre de $(A',1), (B',1)$ et $(D',1)$ où A', B' et D' sont les images respectives de A, B et D par la similitude.
- les angles géométriques \hat{A} et \hat{A}' sont égaux
- le cercle (C) a pour image un cercle (C')



L'application identité est une similitude. Une similitude plane qui admet trois points fixes non alignés est l'identité du plan, c'est-à-dire que tout point est son image par cette similitude. Une similitude plane qui admet deux points fixes distincts A et B est soit l'identité du plan, soit la symétrie axiale d'axe (AB) . Deux triangles sont semblables lorsque leurs trois angles sont respectivement égaux deux à deux. Si deux triangles ont deux angles respectivement égaux alors, ils sont semblables.

Si deux triangles ont un angle égal respectivement et deux côtés respectivement proportionnels, alors ces deux triangles sont semblables. Si dans un triangle rectangle, on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entre eux. La notion de similitude s'élargit à d'autres figures que le triangle, même si c'est l'exemple le plus simple et le plus souvent utilisé et étudié. Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes qui ont les mêmes diagonales sont semblables au parallélogramme entier et semblables entre eux.

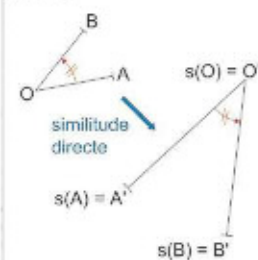


Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables. Si deux segments sont proportionnels, les images de ces deux segments par une similitude sont deux segments qui sont, entre eux, proportionnels. Ils conservent,

de plus, le même coefficient de proportionnalité. On peut distinguer plusieurs formes de similitudes. En effet, parmi les similitudes particulières on peut citer les translations, les symétries... On les classe en deux grandes familles : les similitudes directes et les similitudes indirectes.

SIMILITUDES DIRECTES

Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.



angle $(AOB) = \text{angle}(A'O'B')$

Écriture complexe

Soit M un point d'affixe z et s une similitude. Le point $M' = s(M)$ d'affixe z' est tel que $z' = az + b$ où a et b sont des complexes, a non nul. On dit alors que $|a|$ est le rapport de la similitude et $\arg(a)$ l'angle de la similitude. L'angle de la similitude s , $\arg(a) = (\angle AB, \angle s(A)s(B))$ ne dépend pas des points distincts A et B . Une similitude directe qui n'est pas une translation, admet un unique point fixe. On dit que c'est le centre de la similitude.

Propriétés

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude directe s tel que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Cas particuliers

- Lorsque $a = 1$, la similitude est une translation.
- Lorsque $a = -1$, la similitude est une symétrie centrale de centre d'affixe $z = b/2$. Une telle similitude est aussi une rotation de centre d'affixe $z = b/2$ et d'angle π , ou encore une homothétie de centre d'affixe $z = b/2$ et de rapport d'homothétie $k = -1$. Si une transformation conserve tous les angles orientés, alors c'est une similitude directe. On pourra dire que deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants. C'est-à-dire que l'un est l'image de l'autre par une similitude directe. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe. Pour a non nul, l'application $z \rightarrow az + b$ (qui à $M(z)$ associe

$M'(az+b)$) définit une similitude directe. L'angle Δ de la composée de deux similitudes directes est égal à la somme des angles des deux similitudes.

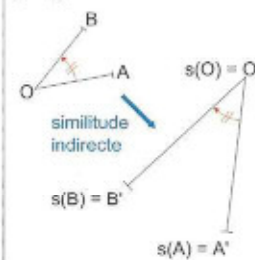
$S = s \circ s'$ où $\Delta = \text{angle de } S$
 $\delta = \text{angle de } s$
 $\delta' = \text{angle de } s'$
 alors $\Delta = \delta + \delta'$

Soit O le centre d'une similitude directe s . Soient M et N deux points quelconques du plan et M' et N' leurs images par s . Les triangles OMM' et ONN' sont directement semblables.

Considérant deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une unique similitude directe par laquelle les points M et N ont pour images respectives les points M' et N' .

SIMILITUDE INDIRECTE

Une similitude indirecte est une similitude qui inverse les angles orientés. Cela signifie que l'image d'un angle O par une similitude indirecte est son angle opposé $O' = -O$.



angle $(AOB) = -\text{angle}(A'O'B')$

Écriture complexe

Soit M un point d'affixe z et s une similitude. Le point $M' = s(M)$ d'affixe z' est tel que $z' = az + b$ où a et b sont des complexes, avec a non nul.

Propriétés

- Une transformation qui inverse tous les angles orientés est une similitude indirecte. On pourra dire que deux triangles semblables sont inversement semblables si les angles correspondants sont opposés. C'est-à-dire que l'un est l'image de l'autre par une similitude indirecte. Pour a non nul, l'application $z \rightarrow -z' az + b$ (qui à $M(z)$ associe $M'(z' = az + b)$) définit une similitude indirecte. Une similitude indirecte peut :
 - n'avoir aucun point fixe. À ce moment-là, c'est une symétrie glissée ;
 - avoir un unique point fixe. Elle est alors la composée d'une symétrie (axiale ou glissée) et d'une homothétie de rapport différent de 1 ;
 - avoir au moins deux points fixes.

C'est alors une symétrie axiale. Considérant deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une seule similitude indirecte par laquelle les points M et N ont pour images respectives les points M' et N' .

ISOMÉTRIE : UNE SIMILITUDE PARTICULIÈRE

Il existe un cas particulier de similitude qu'il peut être intéressant d'étudier : l'isométrie. Ce terme provient du grec *iso* égal et *metron* mesure.

Une isométrie est une application du plan ou de l'espace qui conserve les distances. C'est-à-dire que si les points A et B ont pour images A' et B' par une isométrie, alors on a l'égalité : $AB = A'B'$.

Une figure et son image par une isométrie sont dites isométriques. On dit que deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

PROPRIÉTÉS

Une isométrie est une similitude particulière de rapport $k = 1$. Une isométrie est donc également bijective. La réciproque d'une isométrie est une isométrie. Si une figure est invariante par une isométrie, cela signifie que l'image de cette figure par cette isométrie est elle-même. Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement égaux, alors ces deux triangles sont isométriques. Si deux triangles ont un angle égal, compris entre deux côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques.

Si deux triangles ont respectivement un côté égal et deux angles égaux, alors ces deux triangles sont isométriques. Si une isométrie admet exactement un point fixe A , alors elle est une rotation de centre A .

Le composé de deux isométries est une isométrie. Si deux isométries coïncident en trois points non alignés, alors elles sont égales.

CONSERVATIONS

Nous l'avons vu, l'isométrie conserve les distances mais elle conserve également :

- les angles géométriques (non orientés),
- le parallélisme : les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles,
- l'orthogonalité : les images de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires,
- les milieux : par l'isométrie f , le milieu I du segment $[AB]$ a pour

Histoire de similitudes

600 av. J.-C.



Premiers travaux sur la géométrie avec Thalès.

1891

Fedérov, mathématicien russe, montre qu'il n'existe que 17 types de pavage du plan.

5

Nombre d'isométries du plan : la rotation, la translation, l'identité du plan, la symétrie axiale et la symétrie glissée.

2

Nombre de grandes familles de similitude : directe et indirecte.

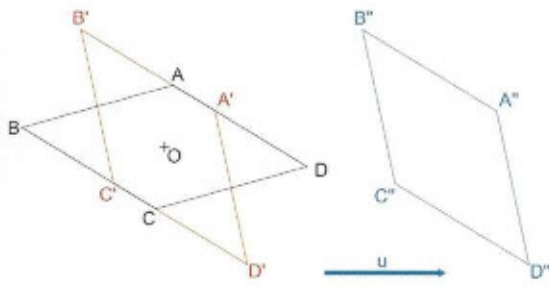
1

Rapport d'une similitude quand elle correspond à un déplacement.

La symétrie axiale



Exemples d'isométries



- $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$: rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ (45°)
- $A'B'C'D' \rightarrow A''B''C''D''$: translation T de vecteur u
- $ABCD \rightarrow A''B''C''D''$: composée de R et de T (et inversement)

image le milieu I' du segment $[A'B']$, image de $[AB]$ par f ,

- les aires,
- les barycentres.

Toute similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de même rapport.

Réciproquement, la composée d'une isométrie et d'une homothétie est une similitude. La transformation vectorielle associée à une isométrie f , appelée isométrie vectorielle, conserve le produit scalaire. C'est-à-dire que :

$$\overline{f(u)f(v)} = \overline{uv}$$

Parmi les isométries, on distingue deux cas : les déplacements et les antidéplacements. En effet, toute isométrie est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

DÉPLACEMENT ET ANTIDÉPLACEMENT

DÉFINITION

Un déplacement est une isométrie qui conserve les orientations. Cela signifie donc qu'il conserve les distances et les angles orientés. Un déplacement est une similitude directe de rapport de similitude $k = 1$.

Un antidéplacement est une isométrie qui ne conserve pas les orientations. Cela signifie donc qu'il conserve les distances mais inverse les angles orientés. Un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport de similitude $k = 1$.

PROPRIÉTÉS

Les déplacements et les antidéplacements possèdent toutes les propriétés des similitudes directes et indirectes respectivement et des isométries.

Compositions

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

De même, la composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

Réciproque

- Les déplacements et les antidéplacements sont bijectifs.
- La réciproque d'un déplacement est

un déplacement.

- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

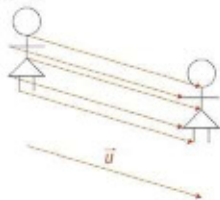
Description

Les déplacements sont le résultat d'un glissement du plan sur lui-même. Les seuls déplacements du plan sont la translation, la rotation, l'identité du plan.

Les antidéplacements sont le résultat d'un glissement du plan composé avec un retournement du plan sur lui-même. Ce sont donc les symétries axiales et les symétries glissées.

TRANSLATION

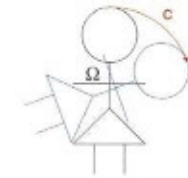
Une translation de vecteur u est la transformation géométrique qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point M' tel qu'on ait l'égalité vectorielle $\overline{MM'} = u$.



ROTATION

Soit R un point du plan et α un angle orienté. La rotation de centre R et d'angle α est la transformation géométrique qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que :

- $M' = M$ si $M = R$,
- $RM = RM'$ et $(RM, RM') = \alpha$ sinon (c'est-à-dire si $M \neq R$).



IDENTITÉ DU PLAN

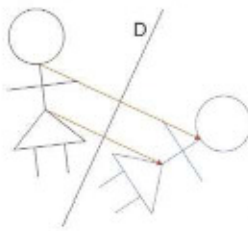
L'identité est une transformation géométrique qui transforme un point M en lui-même. L'image de la figure est elle-même. C'est une translation de vecteur nul, une rotation d'angle nul...

SYMÉTRIE AXIALE

Soit D une droite du plan. La symétrie axiale d'axe D est la transformation géométrique du plan, par laquelle tout point M a pour image

le point M' tel que :

- D est la médiatrice du segment $[MM']$, si M n'appartient pas à D ,
- $M' = M$, si M appartient à D .



SYMÉTRIE GLISSÉE

Soit D une droite du plan et u un vecteur directeur de D . On appelle symétrie glissée d'axe D et de direction u , la transformation qui est la composée de la symétrie axiale d'axe D et de la translation de vecteur u . L'image d'un point M est donc obtenu en effectuant d'abord la symétrie orthogonale d'axe D puis la translation de vecteur u (ou vice-versa).

LA TROISIÈME DIMENSION

ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Les isométries dans l'espace sont les suivantes :

Déplacements

- Translation
- Rotations
- Vissages

Antidéplacements

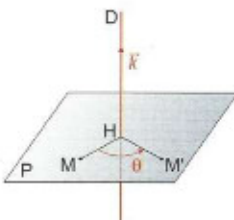
- Réflexions
- Réflexions tournées
- Réflexions glissées

En ce qui concerne les translations, les rotations et les réflexions (dans le plan les réflexions sont les symétries axiales), le principe est le même que dans le plan. La translation est définie par un vecteur de l'espace qui possède donc trois composantes.

La rotation, quant à elle, ne possède plus un centre mais un axe de rotation. Elle est définie comme suit :

Soit D une droite, k un vecteur de norme 1 de D et θ un nombre. La rotation d'axe D orienté par k et d'angle θ , notée $r(D, \theta)$, est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' qui est :

- situé dans le plan P orthogonal à D passant par M ,
- image de M dans P par la rotation plane $r(H, \theta)$, où H est le point où D coupe P et P suit l'orientation de D .



La réflexion de l'espace est une symétrie orthogonale par rapport à un plan de l'espace. On ne fait plus de symétrie par rapport à un axe mais par rapport à un plan.

Le vissage, ou encore déplacement hélicoïdal, est le produit $r(D, \theta) \circ t_u$ d'une rotation et d'une translation, où :

- l'angle de la rotation est différent de

zéro modulo 2π ,

- le vecteur de la translation est non nul et il se trouve dans la direction de l'axe de la rotation.

Pour obtenir l'image M' d'un point M , on translate M par t_u , ce qui donne le point intermédiaire M_1 , puis on fait tourner M_1 par la rotation $r(D, \theta)$, ce qui donne M' . On peut également commencer par la rotation.

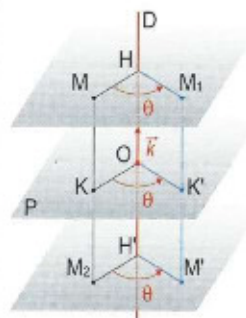
Une réflexion tournée est le produit $sPr(D, \theta)$ d'une réflexion et d'une rotation, où :

- l'axe de la rotation est perpendiculaire au plan de la réflexion,
- l'angle de la rotation est différent de zéro modulo 2π .

Pour obtenir l'image M' d'un point M , on fait tourner M par la rotation $r(D, \theta)$, ce qui donne le point intermédiaire M_1 , puis on réfléchit M_1 par rapport à P , ce qui donne M' .

On peut également commencer par la réflexion :

$$M \rightarrow M_2 \rightarrow M'$$



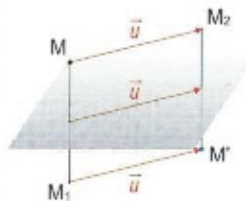
Une réflexion glissée est le produit

$t_u \circ sP$ d'une réflexion et d'une translation, où le vecteur de la translation :

- est non nul,
- appartient à la direction du plan de la réflexion.

Pour obtenir l'image M' d'un point M , on réfléchit M par rapport à P , ce qui donne le point intermédiaire M_1 , puis on translate M_1 par t_u , ce qui donne M' . On peut également commencer par la translation :

$$M \rightarrow M_2 \rightarrow M'$$



SIMILITUDES DANS L'ESPACE

On a vu précédemment que les isométries font partie des similitudes. Or, un théorème énonce que, dans l'espace, toute similitude, si ce n'est pas une isométrie, est toujours le produit d'une homothétie de rapport positif ou négatif, et d'une rotation dont l'axe passe par le centre de l'homothétie. Ce produit est commutatif, c'est-à-dire que le résultat sera le même peu importe l'ordre.

CONCLUSION

DIMENSIONS SUPÉRIEURES

Il est possible de parler de similitude et de déplacement en dimension supérieure. On utilise alors des tableaux

de chiffres appelés « matrices » qui représentent les applications dans un « espace » de dimension n dans lui-même ou un autre « espace ».

L'outil géométrique est alors à la fois plus simple et plus puissant. Par exemple, la matrice de l'identité dans un espace de dimension 5 dans lui-même est présentée ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OUVERTURE À LA PHYSIQUE

En sciences physiques, il existe une méthode appelée méthodes des similitudes. En effet, il arrive souvent que le scientifique obtienne un système d'équations très complexe et souvent impossible à résoudre. C'est le cas, par exemple, en mécanique des fluides pour les écoulements turbulents. Il a alors le choix entre deux solutions :

- soit faire des approximations et obtenir une solution approchée du problème,
- soit avoir recours à l'expérience.

On est donc amené à réaliser des prototypes (modèles en grandeur nature) ou des maquettes (modèles réduits). En général, pour des raisons de coûts, l'étude d'un prototype se fait sur une maquette. Il faut donc transposer les résultats de la maquette au prototype : c'est la méthode des similitudes. Celle-ci s'articule en trois points :

- écriture des équations dynamiques et des conditions aux limites,
- groupement des différentes grandeurs,
- des expériences différentes (maquette et prototype) vont donc obéir aux mêmes relations (mêmes équations, mêmes conditions aux limites) et vont pouvoir être comparées.

ORIGINE DES SIMILITUDES

L'histoire des similitudes est très liée à celle des nombres et de la mesure. En effet, Hiéronyme dit que Thalès eut l'idée de mesurer la taille des pyramides grâce à celle de leur ombre. Il avait repéré à quel moment de la journée sa propre ombre mesurait sa taille exacte ou un rapport de sa taille ($1/2, 1/3, \dots$) et a mesuré l'ombre d'une pyramide au même moment de la journée pour connaître la taille exacte du monument.

Ainsi Plutarque dit : « la hauteur d'une pyramide est rapportée à la longueur de son ombre exactement comme la hauteur de n'importe quel objet vertical mesurable est rapportée à la longueur de son ombre à un même moment de la journée ».

Finalement, à l'origine, l'idée est la même qu'en physique : c'est en voulant simplifier la mesure de quelque chose qui paraissait incommensurable que les mathématiciens ont eu l'idée de comparer deux éléments semblables, l'ombre de la pyramide et celle de l'humain, puis au fil du temps l'image et l'antécédent. C'est donc le rapport k de la similitude qui permet de passer d'une figure à l'autre.