Les **fonctions sinusoïdales**

DÉFINITION

Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont trois fonctions trigonométriques fondamentales. Sinus et cosinus sont apparues comme outils de mesure des arcs, des cordes de cercles et des angles. La fonction tangente a en revanche émergé dans un autre contexte, servant à mesurer la longueur de l'ombre projetée par un arbre.

SINUS, COSINUS TANGENTE

Les premières utilisations d'équivalents du sinus seraient très anciennes, elles dateraient d'environ 3000 ans, avant J.-C.

C'est au IIe siècle avant J.-C. que ***Ptolémée*** introduisit des notions proches du sinus.Il étudia des relations entre longueurs des cordes et valeurs des arcs dans son traité *l'Almageste*. La première apparition rigoureuse du sinus dans l'histoire remonte aux alentours du Ve siècle après J.-C. Aryabatha I, (476-550) un des premiers grands mathématiciens indiens, utilisa le terme *jya* pour désigner le sinus dans son traité de mathématiques et d'astronomie *l'Aryabathîya*, achevé en 499. Il définit le sinus à partir de la relation entre angle et demi-longueur de la corde d'un arc.

La date d'apparition du mot sinus en latin est controversée. Certains la font remonter à l'Anglais Robert de Chester (XIIe siècle) ; il avait repris dans ses ouvrages les tables de sinus de l'Arabe Al-Khwarizmi, mathématicien dont le nom sera à l'origine du mot algorithme. D'autres attribuent le terme sinus au traducteur italien Gérard de Crémone, vers 1150.

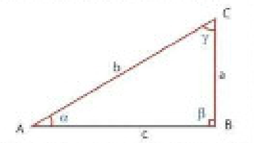
Le premier à introduire les symboles *sin* pour sinus et *tan* pour tangente serait le mathématicien danois Thomas Fincke. Ces notations apparaissent dans son ouvrage *Geometria rotundi* paru en 1583. Quant au symbole *cos* employé pour cosinus, il apparaît dans les écrits de William Oughtred vers le milieu du XVIIe siècle.

TRIGONOMÉTRIE : SINUS D'UN ANGLE

En grec, trigone, du grec *treis* (trois) et *gonia* (angle), signifie triangle. La trigonométrie est donc la « mesure des triangles ». Elle s'attache à l'étude des relations entre les éléments (angles, longueur des côtés) d'un triangle.

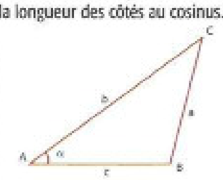
Un couple de sinus et cosinus correspondant permet de reconstituer un angle. Inversement, à toute mesure d'angle sont associés un sinus et un cosinus.

Le cas le plus simple pour obtenir le sinus est celui du triangle rectangle. Un triangle rectangle a deux côtés perpendiculaires, autrement dit un angle droit, de 90°. Considérons l'un des deux autres angles, noté Â. Deux côtés du triangle contribuent à le former : l'hypoténuse, plus grand côté du triangle, et le côté adjacent ; le troisième côté, le plus éloigné du sommet considéré, est appelé côté opposé. Des formules simples relient les longueurs des côtés aux sinus, cosinus et à la tangente de l'angle.



$\sin\alpha = a/b \quad \cos\alpha = c/b \quad \tan\alpha = a/c$

Dans le cas d'un triangle quelconque, de côtés AB, BC et AC de longueurs respectives *c*, a et b une autre formule permet de relier la longueur des côtés au cosinus.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Cette formule est appelée formule d'Al Kashi, du nom d'un des mathématiciens de la fin du XIVe siècle, originaire d'Iran.

Enfin, une relation simple fut établie entre les différents angles et leurs côtés opposés :

$\sin A / a = \sin B / b = \sin C / c$

LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

C'est une figure de référence pour l'étude des angles, sinus, cosinus et autres grandeurs trigonométriques. Pour obtenir le cercle, il faut d'abord mettre en place un repère cartésien orthonormé, c'est-à-dire deux droites de même graduation perpendiculaires l'une à l'autre, les axes du repère, se coupant en un point de coordonnées (0,0) : l'origine du repère. Fixons maintenant un compas en l'origine, prenons un écart de 1 et tournons autour de l'origine. Ajoutons au cercle tracé un sens d'orientation. Le cercle sera parcouru dans le sens positif, ou encore trigonométrique, si on tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le sens inverse sera négatif ou antitrigonométrique. Le cercle ainsi construit, centré en l'origine, de rayon 1 et orienté, est le cercle trigonométrique.

Angle en degré, angle en radian

Imaginons une montre tournant en sens inverse. Supposons que les deux aiguilles sont positionnées au même endroit, sur 3h15. Faisons tourner une de ces aiguilles et arrêtons-la en un point. Elle a parcouru un certain angle par rapport à sa position de départ. La mesure des angles sur le cercle trigonométrique est analogue : on positionne un point M sur le cercle, on y place le rayon du cercle et on mesure l'angle avec la demi-droite correspondant partie positive de l'axe des abscisses (l'axe horizontal).

Les angles peuvent être mesurés de deux façons : en degrés ou en radians. Les mesures en degrés sont bien connues : un tour complet correspond à 360°, un demi-tour à 180° ; un angle droit vaut 90°. Quant aux mesures en radians, elles correspondent à la longueur de l'arc de cercle parcouru sur le cercle trigonométrique pour se positionner en M. Ainsi, un tour complet correspond à 2π radians, c'est-à-dire le périmètre du cercle. Un demi-cercle vaudra la moitié, donc π radians, un quart de cercle $\pi/2$, etc. L'angle en radians peut être positif ou négatif. S'il est négatif, cela signifie que l'angle est orienté dans le sens horaire.

Sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique

Le cosinus et le sinus se lisent sur les axes du repère. Ce sont les coordonnées d'un point placé sur le cercle : le cosinus est l'abscisse et le sinus l'ordonnée. Autrement dit, une fois qu'on a positionné un point M sur le cercle, on trace une droite verticale passant par M. Elle coupe l'axe horizontal en un point donné. Si on mesure la distance de ce point à l'origine, on obtient le cosinus. Pour obtenir le sinus, on effectue la même opération avec une droite horizontale et son intersection avec l'axe vertical.

FONCTION SINUS

Au XVIIIe siècle, ***Leonhard Euler***, mathématicien suisse, donna une nouvelle dimension au concept de sinus : il fit passer celui-ci d'une grandeur trigonométrique à une fonction réelle. Pour mieux appréhender la notion de fonction, plaçons un point sur le cercle trigonométrique en position (1, 0), l'emplacement le plus à droite du cercle. Déplaçons ensuite ce point sur le cercle en tournant dans le sens trigonométrique.

À tout instant, on peut associer au point la longueur du chemin parcouru ainsi qu'une valeur de sinus, alors que dans les tables de sinus, deux valeurs consécutives ne s'obtiennent au contraire que par pas (variation de l'angle degré par degré par exemple). À tout déplacement, on associe un sinus à la longueur parcourue, aussi infinitésimal le déplacement soit-il. Par ailleurs, si le sinus reprend les mêmes valeurs au bout d'un tour, la longueur parcourue ne cesse, elle, de s'accroître : au bout d'un tour, le déplacement sera de 2π, au bout d'un tour et demi de 3π jusqu'à l'infini. Si on tourne dans l'autre sens, la longueur parcourue sera comptée de manière négative : -2π, -3π... L'application qui associe à toute longueur parcourue la valeur correspondante du sinus sur le cercle est notre fonction sinus. Elle stocke en quelque sorte tous les couples de valeurs obtenus en faisant tourner notre point autour du cercle. Cette allure caractéristique du sinus porte un nom : c'est une sinusoïde. La même construction peut être effectuée pour la fonction cosinus. Les deux courbes se ressemblent beaucoup, au point que si les deux graphes sont placés l'un au-dessus de l'autre et que l'on décale horizontalement une des deux courbes, on obtient à un moment une superposition parfaite. L'intervalle de décalage a d'ailleurs une taille précise exprimée par une formule mathématique.

PROPRIÉTÉS DE SINUS ET COSINUS

Partons d'une sinusoïde représentant la fonction sinus ou cosinus. Si on trace cette fonction sur un papier calque et qu'on décale le papier calque d'un peu plus de 6 unités, on obtient à nouveau la superposition de la figure du papier calque avec la représentation graphique.

Cette expérience illustre une propriété fondamentale de sinus et cosinus : ces fonctions sont 2π-périodiques, c'est-à-dire qu'elles reprennent exactement les mêmes valeurs à intervalles réguliers ; ces intervalles sont larges de 2π, soit environ 6,28 ou un de ses multiples. Cette reproduction à l'identique pour un intervalle fixe peut s'opérer en n'importe quel point de la courbe et se répéter à l'infini.

La fonction cosinus est une fonction paire, si une feuille avec la représentation graphique de cosinus est pliée le long de l'axe des ordonnées (l'axe horizontal du repère), il y a superposition exacte de la partie droite et de la partie gauche. La parité de cosinus s'exprime ainsi : $\cos(-x)=\cos(x)$.

Sur le cercle trigonométrique, cela signifie que la valeur du cosinus sera la même pour un angle donné, que l'on tourne dans le sens horaire ou trigonométrique. La fonction sinus est au contraire une fonction impaire. Le centre du repère est centre de symétrie de la fonction sinus. Ainsi, si on fait tourner la représentation graphique d'un demi-tour autour du point de coordonnées (0,0), on retrouve la même figure qu'au départ.

L'expression mathématique de l'imparité de sinus est la suivante : $\sin(-x)=-\sin(x)$. L'angle obtenu en tournant dans un sens sera l'opposée de celle obtenue en tournant dans l'autre sens sur le cercle trigonométrique.

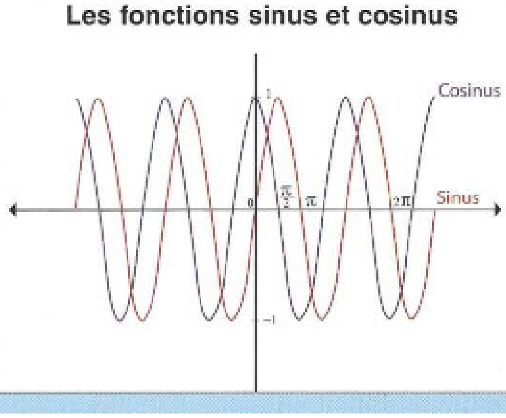
Des fonctions bornées

Les valeurs de sinus et cosinus ne sont jamais inférieures à -1 ni supérieures à 1. Les fonctions sinus et cosinus sont donc bornées. -1 constitue la borne inférieure et +1 la borne supérieure. De plus, entre -1 et 1, toutes les valeurs sont possibles.

TABLES DE SINUS ET VALEURS REMARQUABLES

Avant l'ère des calculatrices, les valeurs de sinus étaient déterminées grâce à des tables de sinus. En effet, pour des valeurs d'angles apparemment simples et précises, comme 40°, 50°, 60°, les valeurs du sinus sont fréquemment irrationnelles : elles ne tombent que rarement sur des valeurs justes et

Les fonctions sinus et cosinus



Petite Chronologie

IIe siècle avant J.-C.
Ptolémé introduit les notions de sinus dans son traité de mathématiques.

499
Première apparition des sinus dans le traité l'Aryabathiya.

IXe siècle
Al-Khwarizmi établi les premières tables de sinus.

XIIe siècle
Apparition supposée du terme sinus.

1583
Introduction des symboles sin et tan par le danois Thomas Fincke.

XVIIe siècle
Apparition du symbole cos dans les écrits de William Oughtred.

(1768- 1830)
Joseph Fourier, mathématicien français travaille sur la décomposition fonction de fonctions périodiques.

Des équivalents du sinus
3000 avant J.C

Les **premières** utilisations

simples à retenir. Les tables de sinus permettent d'avoir des approximations décimales des valeurs obtenues pour de nombreux angles. L'origine de telles tables remontent à Hipparque au IIe siècle avant J.-C. Il avait établi des tables de cordes qui permettaient le passage des mesures d'angles à celles des cordes. Ces tables étaient destinées à l'astronomie. Elles ont malheureusement été perdues. Aryabhata, au Ve siècle après J.-C., considérait la demi-corde de l'angle double plutôt que la corde de l'angle et ouvrit le passage entre tables de cordes et tables de sinus. Les premières tables de sinus auraient été établies par le mathématicien arabe Al-Khwarizmi au IXe siècle.

FAMILLES DE FONCTIONS APPARENTÉES

De nombreuses fonctions ressemblent ou se rattachent aux sinus et cosinus.

FONCTIONS DÉSUÈTES ET COMPLÉMENTAIRES

La fonction sinus verse, notée versin jouait un rôle extrêmement important aux XVe-XVIe siècles. Elle était la deuxième fonction la plus utilisée. En revanche, de nos jours, son usage est quasi inexistant. Les fonctions sécante (sec), cosécante (cosec) et cotangente (cotan) sont les inverses multiplicatifs de la même manière à partir de cosinus, sinus et tangente. Cotangente, cosinus et cosécante sont appelées fonctions complémentaires.
Sinus, cosinus, tangente, sécante, cosécante et cotangente sont les six fonctions trigonométriques. Cependant, si en pratique l'usage de sinus, cosinus et tangente est assez répandu, celui de cotangente est moins fréquent et celui de sécante ou cosécante est particulièrement rare.

ARCSINUS ET ARCCOSINUS : LES FONCTIONS RÉCIPROQUES

À quoi servent les fonctions arcsinus et arccosinus ? Sinus et cosinus associent une valeur à un angle ou une longueur d'arc. Mais si on ne dispose que des valeurs du sinus ou cosinus, comment retrouver l'angle ? Deux fonctions, appelées fonctions réciproques, permettent ce passage : arcsinus et arccosinus. Ainsi, alors que sinus et cosinus faisaient passer des angles au calcul, les fonctions arcsinus et arccosinus permettent de remonter du calcul aux angles. Attention, les valeurs prises par les fonctions réciproques correspondent aux mesures des angles non pas en degrés mais en radians.

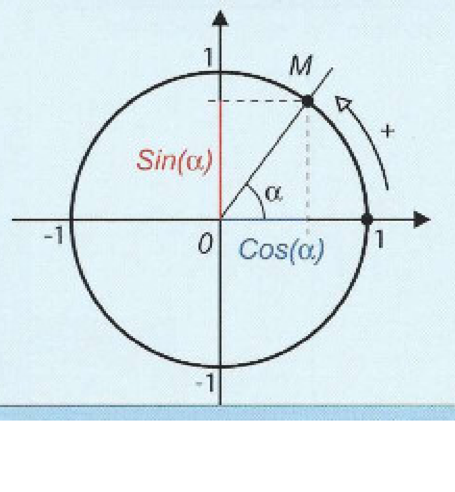
Propriétés de sinus et d'arcsinus
La fonction sinus est définie sur l'ensemble des réels : tout nombre, positif, négatif, aussi grand ou aussi petit que l'on souhaite, admet un sinus. Au contraire, le domaine de définition de l'arcsinus est beaucoup plus limité : arcsinus n'est défini que pour des valeurs comprises dans l'intervalle [-1 ; 1]. Les deux fonctions réciproques ont des sens de variation contraire : arcsinus est croissante, tandis qu'arccosinus est décroissante. Les valeurs prises par arcsinus et arccosinus varient respectivement de - $(\pi/2)$ à $\pi/2$ et de π à 0. Ce passage d'une extrémité de l'intervalle à l'autre respecte une relation encore plus forte, exprimée par la formule suivante en tout point x :
$Arcsin\,(x) + Arccos\,(x) = \pi/2$
Enfin, notons que si arcsinus est impaire comme sinus, arccosinus n'est ni paire, ni impaire, contrairement à cosinus.

EXPONENTIELLE COMPLEXE

Leonhard Euler, déjà mentionné pour avoir introduit le concept de fonction pour le sinus, définit la fonction exponentielle complexe. Il relia cette fonction aux fonctions sinus et cosinus par une formule remarquable, la formule d'Euler. Cette fonction évaluée en $e^{i\pi}$ donna d'ailleurs lieu a l'identité d'Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, que

Richard Feynman qualifia de « plus remarquable formule des mathématiques ». Cette fonction, dont la valeur en x est notée e^{ix}, permet de repérer un point sur le cercle trigonométrique. Elle contient toutes les informations nécessaires à son positionnement et est très étroitement liée à l'angle à mesurer. Sinus et cosinus entretiennent eux aussi un lien très étroit avec les angles, donc avec l'exponentielle complexe. La formule d'Euler est la suivante :
$e^{ix} = cos(x) + i sin(x)$ où i est l'unité des nombres imaginaires, élément fondamental des nombres complexes vérifiant l'égalité $i^2 = -1$. Les formules qui permettent de retrouver le cosinus et le sinus à partir de l'exponentielle complexe sont également appelées formules d'Euler. On dit que cosinus est la partie paire de l'exponentielle complexe et sinus sa partie impaire.

Le cercle trigonométrique



FONCTIONS HYPERBOLIQUES

La fonction exponentielle (différente de l'exponentielle complexe) est une fonction positive qui croît très vite. De même que sinus et cosinus sont respectivement les parties impaire et paire de l'exponentielle complexe, les fonctions sinus hyperbolique sont les parties impaire et paire de la fonction exponentielle. Comparons maintenant les propriétés des fonctions hyperboliques aux propriétés des fonctions trigonométriques correspondantes :
• Une même parité : le cosinus hyperbolique est pair, tout comme le cosinus ; le sinus hyperbolique est impair, comme le sinus.
• Explosion de l'exponentielle et cercle borné : sin et cos proviennent du cercle et restent enfermés dans un domaine étroit, il sont bornés sur l'intervalle [-1;1] ; au contraire, *sh* et *ch* proviennent de l'exponentielle qui croît très vite : leurs valeurs ne sont pas bornées et croissent même très rapidement vers l'infini.
• Point de rencontre : *sin* et *sh* se rencontrent en un seul point: l'origine de coordonnées (0,0). De même, cos et ch se rencontrent en un unique point, de coordonnée (0 ; 1), sur l'axe des ordonnées.

LES FONCTIONS SINUSOÏDALES

Les fonctions sinusoïdales sont une famille de fonctions obtenues à partir de la fonction sinus.

TRANSFORMATIONS DE LA FONCTION SINUS

Qu'est-ce que changer la période ?
Partons de la représentation graphique de la fonction sinus et étirons-la de part et d'autre de l'axe des ordonnées (l'axe vertical du repère), comme un accordéon. Deux ondulations identiques seront plus espacées. On a ainsi augmenté la période de la fonction sinus : celle-ci se répète à l'identique pour un intervalle plus grand que l'intervalle normal. Par une compression, on peut de même diminuer la période. La période normale de sinus est de 2π, mais grâce à ce procédé, il est possible d'obtenir n'importe quelle période : période de $1, \sqrt{3}$… Mathématiquement, la fonction de période T aura pour expression au point t :
$f(t) = \sin\,(2\pi/T)\,t = \sin\,(\omega\,t) = \sin\,(2\pi\,ft)$, où $\omega = 2\pi/T$ et $f = 1/T$ et f se nomment respectivement la pulsation et la fréquence. Ces deux grandeurs sont fréquemment utilisées à la place de la période, notamment en physique.

Qu'est-ce que changer l'amplitude ?
Nous pouvons également étirer la courbe de sinus selon le sens vertical. Si nous décrivions un paysage, nous dirions alors que la hauteur est plus importante, ou encore les bosses plus hautes et les creux plus bas. Pour la fonction sinus, le vocabulaire exact est : l'amplitude a été augmentée. Elle correspond à la distance entre l'axe des abscisses (horizontal) et un point de valeur maximale.

Qu'est-ce que changer la phase à l'origine ?
Reprenons la représentation de sinus et faisons-la glisser le long de l'axe horizontal. Sauf si le décalage est multiple de la période, la représentation obtenue ne passera plus par le point (0,0). Ainsi, nous avons changé la phase à l'origine ϕ. Pour une phase à l'origine ϕ, la nouvelle formule mathématique est $f(t) = \sin\,(t+\phi)$.

Qu'est-ce que changer la moyenne ?
Faisons glisser la courbe de sinus non plus vers la droite ou gauche mais vers le haut ou le bas. Nous venons de changer la moyenne. Par exemple, si la fonction sinus a été décalée de deux unités vers le haut, la moyenne sera de 2. La formule de la moyenne est la suivante : $f(t) = m + (\sin)\,t$.

Tout en un
Une fonction sinus peut subir les quatre transformations en même temps : nouvelle pulsation (ou période), nouvelle amplitude, nouvelle phase et nouvelle moyenne, soit mathématiquement $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + m$. Cette formule générale est celle d'une fonction sinusoïdale. La forme prise par cette fonction, donc l'allure de sa courbe représentative, est une sinusoïde.

La moyenne
La relation est simple au niveau des moyennes : la moyenne de la somme est la somme des moyenne. Autrement dit, $M_{tot} = M_1 + M_2 + … + M_n$.

L'amplitude
Cette fois, l'amplitude totale n'est pas toujours égale à la somme des amplitudes. La relation générale toujours vraie est $A_{tot} = A_1 + A_2 + … + A_n$ c'est-à-dire que l'amplitude de la somme sera toujours inférieur ou égale à la plus grande des amplitudes. L'égalité sera vérifiée à condition que toutes les pulsations soient égales.

La pulsation
Pour la pulsation, tout est possible. Voici les deux cas extrêmes :
• Si toutes les pulsations sont les mêmes, la pulsation totale sera identique à cette pulsation de référence.
• Pour des pulsations différentes, la notion même de pulsation pour la somme peut perdre son sens : dans certains cas, la somme obtenue ne sera même pas périodique, il n'existera pas d'intervalle au bout desquels la fonction se répètera à l'identique. Or la pulsation ne peut se définir que lorsqu'il y a période. Donc il n'existera pas de pulsation de la fonction somme des fonctions sinusoïdales. Il existe des cas intermédiaire, par exemple lorsque toutes les périodes sont proportionnelles : la fonction obtenue sera périodique, bien que sa période ne sera pas la somme des périodes de chaque fonction mais dépendra de leur produit.

La phase à l'origine
Prenons des fonctions de même pulsation ($\omega 1 = \omega 2 = \omega = \omega n$). La somme de ces fonctions aura une phase à l'origine qui dépendra à la fois de l'amplitude et de la phase de chaque fonction sinusoïdale. Si les fonctions sinusoïdales ont toutes la même amplitude, la phase à l'origine de la somme des fonctions ne dépendra que des phases à l'origine de chacune des fonctions sommées. La relation entre phase totale et phases de départ est cependant assez compliquée à exprimer, contrairement aux moyennes.

Fonctions périodiques et fonctions sinusoïdales
Un mathématicien et physicien français du début du XIXe siècle, Joseph Fourier (1768 - 1830) effectua une série de travaux sur la propagation de la chaleur pour lesquels il recourut à des modélisations mathématiques. Dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur*, il énonça un lien remarquable entre les fonctions sinusoïdales et n'importe quelle fonction périodique, à savoir que toute fonction périodique peut se décomposer en somme finie ou infinie des fonctions sinusoïdales : sa série de Fourier.

FONCTIONS SINUSOÏDALES

SINUS ET ONDE SINUSOÏDALE

En optique, lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu à un autre, par exemple de l'air à l'eau, il est dévié. C'est le phénomène de réfraction. Chaque milieu est caractérisé par un indice. Celui-ci est de 1 pour le vide, presque égal à 1 pour l'air, de 1,33 pour l'eau, 1,5 pour le verre. La loi de la réfraction, qui explique la relation entre indice du milieu et déviation du rayon, a pendant longtemps été attribuée au mathématicien et philosophe René Descartes. Cependant, cette loi aurait en réalité été découverte par Willebrord Snell, mathématicien et physicien néerlandais. La loi de la réfraction est donc aujourd'hui appelée loi de Snell-Descartes. Le sinus y joue un rôle fondamental. Cette loi s'écrit, pour des milieux 1 et 2 d'indices n_1 et n_2 et un rayon d'angle incident θ_1 et d'angle réfracté θ_2 : $n_1\,sin(\theta_1) = n_2\,sin(\theta_2)$.

LES SIGNAUX SINUSOÏDAUX

En électricité, on rencontre de nombreux signaux sinusoïdaux. Un certain nombre de grandeurs mesurées correspondent en effet à des ondes. La tension électrique ou l'intensité du courant peuvent par exemple être décrits par des fonctions sinusoïdales du temps : $u(t) = U\,sin(\omega\,t + \gamma)$; $i(t) = U\,\sin(w\,t + g)$. Un oscilloscope est un appareil utilisé pour mesurer et faire visualiser l'évolution de signaux électriques. Lorsqu'on mesure une tension sinusoïdale avec un oscilloscope, on verra apparaître une sinusoïde sur son écran. Les fonctions sinusoïdales sont présentes dans de nombreux autres domaines de la physique. En acoustique, le son est une onde qui peut être décrite par des fonctions sinusoïdales ; en mécanique, la description d'oscillateurs comme les pendules impose le recours à des fonctions sinusoïdales. D'autres branches de la mécanique (élasticité par exemple), l'électromagnétisme (ondes radio) et encore bien d'autres domaines utilisent des fonctions sinusoïdales.