Chapitre 3

Sommes, séries arithmétiques et géométriques

3.1 Le symbole somme

Ce symbole permet d'écrire de grandes sommes sans utiliser les points de suspension. Par exemple, on écrit

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Cela permet d'avoir des expressions plus précises (il pourrait y avoir n'importe quoi à la place des points de suspension) et plus condensées.

Soit n_1, n_2 deux nombres entiers et des nombres réels a_k ($n_1 \leqslant k \leqslant n_2$), on note

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2-1} + a_{n_2}$$

Dans cette expression mathématique, l'*indice k de la somme* permet de décrire comment on additionne les éléments. Le nombre n_1 est la valeur de départ de l'indice et le nombre n_2 celle d'arrivée. L'indice k prend toutes les valeurs entières entre n_1 et n_2 y compris.

Lorsqu'on développe une somme, son indice disparaît !

Propriétés du symbole somme

Soit n_1, n_2, n_3 trois nombres entiers tels que $n_1 \leqslant n_2 < n_3$, des nombres réels a_k, b_k ($n_1 \leqslant k \leqslant n_3$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il y a trois propriétés fondamentales :

Propriétés	Justification rapide
$(\mathcal{P}_1)$ $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_3} a_k$	L'addition de deux sommes est encore une somme.
$(\mathcal{P}_2)$ $\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k + \sum_{k=n_1}^{n_2} b_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} \left(a_k + b_k\right)$	On peut permuter les éléments d'une somme : $a + b = b + a$
$(\mathcal{P}_3)$ $\displaystyle\lambda \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k = \sum_{k=n_1}^{n_2} \left(\lambda a_k\right)$	On peut distribuer la multiplication sur l'addition : $a(b + c) = ab + ac$

3.2 Séries arithmétiques

Une histoire sur Gauss (célèbre mathématicien allemand, 1777-1855)

On raconte que lorsque Gauss était élève, un de ses professeurs de mathématiques lui a infligé comme punition le calcul de la somme $1+2+3+4+5+\cdots+1000$. Gauss à trouvé la réponse en quelques minutes grâce à l'astuce décrite ci-dessous.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccrcrcr} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 998 & + & 999 & + & 1000 \\ + & S & = & 1000 & + & 999 & + & 998 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S & = & 1001 & + & 1001 & + & 1001 & + & \cdots & + & 1001 & + & 1001 & + & 1001 \end{array}$$

Puisque le terme 1001 apparaît 1000 fois dans la somme $2S$, on obtient :

$$2S = 1000 \cdot 1001 \iff S = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500'500$$

Définition

Une *série arithmétique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 0$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$.

Exemples

a) $1 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 2 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 3 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 5 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 6 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 7 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 9 \overset{\overset{+1}{\curvearrowright}}{+} 10$

b) $1 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 3 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 5 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 7 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 9 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 11 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 13 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 15 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 17 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 19$

c) $2 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 4 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 6 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 8 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 10 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 12 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 14 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 16 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 18 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 20 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 22 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 24 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 26 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 28 \overset{\overset{+2}{\curvearrowright}}{+} 30$

d) $120 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 115 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 110 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 105 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 100 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 95 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 90 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 85 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 80 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 75 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 70 \overset{\overset{-5}{\curvearrowright}}{+} 65$

Écriture avec le symbole somme

Dans le cas d'une série arithmétique, on a :

$$a_1 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_2 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_3 \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} \cdots \overset{\overset{+r}{\curvearrowright}}{+} a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_1 + k \cdot r)$$

Théorème

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ est une série arithmétique de raison r. Alors, on a :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Autrement dit, la valeur de la série est égale au nombre de termes de la somme multiplié par la moyenne du premier terme et du dernier terme.

Preuve

On note $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. On peut utiliser l'astuce inventée par Gauss dont on a parlé au début de cette section. Cette astuce consiste à écrire la somme S une fois normalement et une fois inversée, puis à examiner la somme verticale (voir tableau ci-dessous) :

$$\begin{array}{rrclclclccclcl} & S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ + & S & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline & 2S & = & a_1+a_n & + & a_2+a_{n-1} & + & a_3+a_{n-2} & + & \cdots & + & a_{n-1}+a_2 & + & a_n+a_1 \end{array}$$

Or, comme S est une série arithmétique, on trouve grâce à la propriété $\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$ que :

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$$

En effet, comme $a_2 = a_1 + r$ et que $a_{n-1} = a_n - r$ (car $a_n = a_{n-1} + r$), on a bien :

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$$

De même, puisque $a_3 = a_2 + r$ et que $a_{n-2} = a_{n-1} - r$ (car $a_{n-1} = a_{n-2} + r$), on a aussi :

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + r + a_{n-1} - r = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

et ainsi de suite...

Donc :

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ fois}} = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Ainsi :

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$ □

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \dfrac{1+10}{2} = 55$

b) $\underbrace{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}_{10 \text{ termes}} = 10 \cdot \dfrac{1+19}{2} = 100$

c) $\underbrace{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24+26+28+30}_{15 \text{ termes}} = 15 \cdot \dfrac{2+30}{2} = 240$

d) $\underbrace{120+115+110+105+100+95+90+85+80+75+70+65}_{12 \text{ termes}} = 12 \cdot \dfrac{120+65}{2} = 1'110$

3.3 Séries géométriques

Les rentes

Un généreux donateur a décidé de verser 100 CHF sur votre compte en banque tous les premiers janvier de 2001 à 2050. En supposant que le taux d'intérêts de 1% est constant jusqu'en 2050 et que personne n'a retiré d'argent sur ce compte, on peut déterminer le capital en date du premier janvier 2050 en capitalisant chacun des versements à l'aide de la formule de capitalisation des intérêts composés $C_n = C_0(1+i)^n$ (voir page 32).

$$C_{2050} = \underbrace{\underbrace{100}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2050}} + \underbrace{100(1.01)}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2049}} + \underbrace{100(1.01)^2}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2048}} + \underbrace{100(1.01)^3}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2047}} + \cdots + \underbrace{100(1.01)^{48}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2002}} + \underbrace{100(1.01)^{49}}_{\substack{\text{versement}\\ \text{daté du}\\ 01.2001}}}_{\text{50 termes (1 par an)}}$$

$$= 100\underbrace{\left(1 + 1.01 + 1.01^2 + 1.01^3 + \cdots + 1.01^{48} + 1.01^{49}\right)}_{\text{série géométrique}}$$

Même si la réponse peut être calculée à la main (en additionnant les 50 termes, on trouve $C_{2050} \cong 6446.30$ CHF (arrondi à 5 centimes près)), il serait bien d'avoir une formule permettant de calculer cette série géométrique sans devoir additionner ces 50 termes.

Définition

Une *série géométrique* est une somme finie de termes

$$a_1 \overset{\cdot r}{\curvearrowright}{+} a_2 \overset{\cdot r}{\curvearrowright}{+} a_3 \overset{\cdot r}{\curvearrowright}{+} \cdots \overset{\cdot r}{\curvearrowright}{+} a_n$$

pour laquelle il existe un nombre r, $r \neq 1$, appelé *raison*, qui satisfait $\boxed{a_{k+1} = a_k \cdot r}$.

Quitte à effectuer une mise en évidence de a_1 comme dans l'exemple ci-dessus, on peut toujours écrire :

$$a_1 \overset{\cdot r}{+} a_2 \overset{\cdot r}{+} a_3 \overset{\cdot r}{+} \cdots \overset{\cdot r}{+} a_n = a_1 \cdot \left(1 \overset{\cdot r}{+} r \overset{\cdot r}{+} r^2 \overset{\cdot r}{+} r^3 \overset{\cdot r}{+} \cdots \overset{\cdot r}{+} r^{n-2} \overset{\cdot r}{+} r^{n-1}\right)$$

Exemples

a) $1 \overset{\cdot 2}{+} 2 \overset{\cdot 2}{+} 4 \overset{\cdot 2}{+} 8 \overset{\cdot 2}{+} 16 \overset{\cdot 2}{+} 32 \overset{\cdot 2}{+} 64 \overset{\cdot 2}{+} 128 \overset{\cdot 2}{+} 256 \overset{\cdot 2}{+} 512$

b) $1 \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{2} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{4} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{8} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{16} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{32} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{64} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{128} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{256} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{512} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{1024} \overset{\cdot \frac{1}{2}}{+} \frac{1}{2048}$

c) $1 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^2 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^3 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^4 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^5 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^6 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^7 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^8 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^9 \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^{10} \overset{\cdot 1.1}{+} 1.1^{11}$

d) $12 \overset{\cdot 3}{+} 36 \overset{\cdot 3}{+} 108 \overset{\cdot 3}{+} 324 \overset{\cdot 3}{+} 972 \overset{\cdot 3}{+} 2916 \overset{\cdot 3}{+} 8748 \overset{\cdot 3}{+} 26244 \overset{\cdot 3}{+} 78732 \overset{\cdot 3}{+} 236196$

Écriture avec le symbole somme

Dans le cas d'une série géométrique, on a :

$$a_1 \overset{\cdot r}{+} a_2 \overset{\cdot r}{+} a_3 \overset{\cdot r}{+} \cdots \overset{\cdot r}{+} a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_1 \cdot r^k) = a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

Théorème

La formule permettant de calculer une série géométrique de raison r et dont le premier terme vaut 1 est :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}} \qquad \left(= \frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

Remarquons que n est le nombre de termes de cette série.

Preuve

On a en distribuant :

$$\begin{aligned} &\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}\right)(r - 1) \\ &= \quad r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\ &\quad -1 - r - r^2 - r^3 - r^4 - \cdots - r^{n-1} \\ &= r^n - 1 \end{aligned}$$

On a ainsi montré que :

$$\left(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}\right)(r - 1) = r^n - 1$$

Par conséquent en divisant de chaque côté par $(r - 1)$ on obtient la formule énoncée dans le théorème. $\square$

Application du théorème aux exemples précédents

a) $\underbrace{1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512}_{\text{10 termes}} = \dfrac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023$

b) $\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048}}_{\text{12 termes}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$= \dfrac{4095}{2048} = 1.9995$

c) $\underbrace{1 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3 + 1.1^4 + 1.1^5 + 1.1^6 + 1.1^7 + 1.1^8 + 1.1^9 + 1.1^{10} + 1.1^{11}}_{\text{12 termes}}$

$= \dfrac{1.1^{12} - 1}{1.1 - 1} \cong 21.3843$

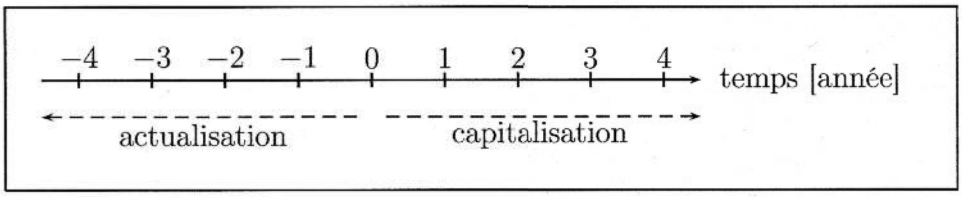
d) $\underbrace{12 + 36 + 108 + 324 + 972 + 2916 + 8748 + 26244 + 78732 + 236196}_{\text{10 termes}}$

$= 12 \cdot \left(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 + 19683\right) = 12 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1}$

$= 354'288$

3.4 Application : calculs d'intérêts et capitalisation

Toute la difficulté de cette section consiste à bien comprendre comment on peut déplacer un capital dans le temps. Lorsqu'on déplace un capital en direction du futur, on le capitalise. Si on déplace un capital en direction du passé, on l'actualise. Lorsqu'aucune contrainte spécifique n'est précisée, on s'imaginera toujours disposer d'un capital en l'année zéro. Dans ce cas, on peut visualiser l'actualisation et la capitalisation.



3.4.1 Capitalisation

Notons C_n le capital à l'année n et t le *taux d'intérêt (effectif) annuel* (supposé constant).

Intérêts simples

Lorsqu'on capitalise un capital initial C_0 selon la méthode des intérêts simples, on ajoute à C_0 la proportion d'intérêt correspondante.

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot t \cdot n \qquad \text{donc} \qquad \boxed{C_n = C_0(1 + t \cdot n)}$$

Cette formule est valable pour tout $n > 0$ (on peut parler de demi-année,...).

Intérêts composés

On calcule les intérêts année par année, en les ajoutant au capital. Ainsi, chaque année, le montant sur lequel les intérêts sont calculés change !

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0 \cdot t = C_0(1+t)\\
&C_2 = C_1 + C_1 \cdot t = C_1(1+t) = C_0(1+t)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2 \cdot t = C_2(1+t) = C_0(1+t)^3\\
&C_4 = C_3 + C_3 \cdot t = C_3(1+t) = C_0(1+t)^4\\
&\ldots\\
&\boxed{C_n = C_0(1+t)^n}
\end{aligned}$$

On a donc démontré que cette formule est valable lorsque $n \in \mathbb{N}$. Mais, elle est valable pour tout nombre n réel (même si on ne démontrera pas) !

Exemple

On place 1000 CHF à 5% pendant 40 ans.

1. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts simples est donné par

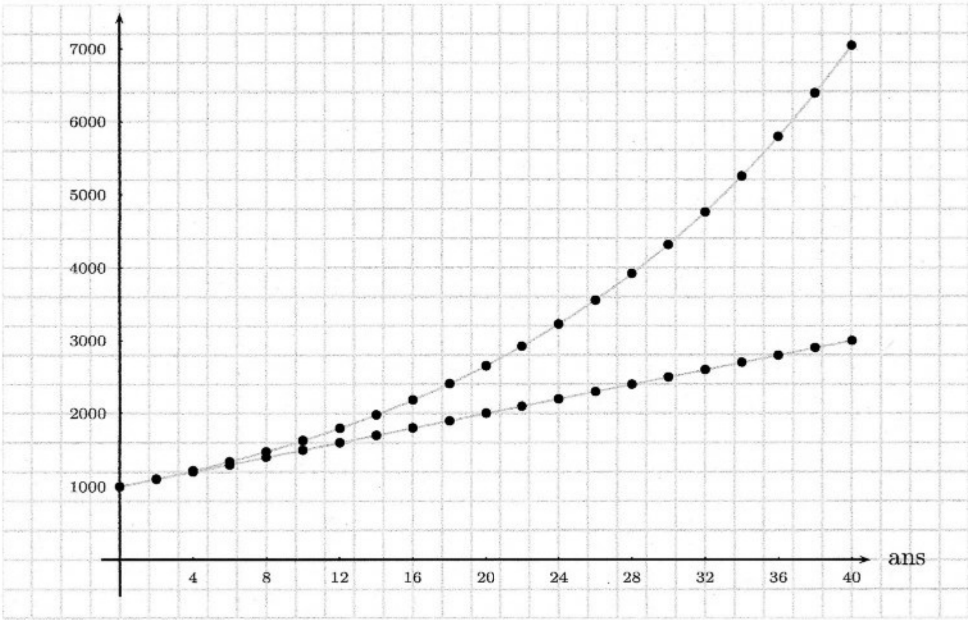
$$C_{40} = C_0(1 + t \cdot 40) = 1000(1 + 0.05 \cdot 40) = 1000 \cdot 3 = 3000 \text{ CHF}$$

2. Le capital final après les 40 ans si on applique la méthode des intérêts composés est donné par

$$C_{40} = C_0(1+t)^{40} = 1000(1+0.05)^{40} \cong 1'000 \cdot 7.03999 \cong 7'040.00 \text{ CHF}$$

Cela fait environ 4'040 CHF de plus qu'avec la méthode des intérêts simples !

3. Si on dessine les capitaux obtenus tous les deux ans pour des intérêts simples et composés (la période de placement reste l'année). On obtient le graphe suivant.



On voit que pour les intérêts simples, la courbe est une droite, tandis que pour les intérêts composés, il s'agit d'une courbe exponentielle !

Taux périodique (ou proportionnel ou relatif)

On peut désirer composer des intérêts m fois dans l'année selon des périodes égales (de longueur $\frac{1}{m}$). Pour cela, on introduit la notion d'un *taux d'intérêt périodique (ou proportionnel ou relatif)*, noté t_m.

Par exemple t_2 correspond à un taux semestriel, t_4 à un un taux trimestriel, t_{12} à un taux mensuel et t_{360} à un taux journalier, car en économie, il y a 360 jours par an.

On fixe ce taux de manière à ce que la capitalisation revienne au même que si cela avait été sur des périodes d'une année avec le taux d'intérêt (effectif) annuel. En termes mathématiques, en regardant comment on calcule le capital après une année, on trouve la condition suivante qui relie le taux (effectif) annuel avec le taux périodique.

$$C_1 = C_0(1+t) = C_0\,(1+t_m)^m \qquad \text{donc} \qquad \boxed{(1+t) = (1+t_m)^m}$$

$$\iff (1+t)^{\frac{1}{m}} = (1+t_m)$$

Exemple Si le taux d'intérêt annuel est de 3% pour un placement mensuel, alors le taux périodique est de $t_{12} = (1+0.03)^{\frac{1}{12}} - 1 \cong 0.247\%$. On remarque que ce taux n'est pas égal à 3% divisé par 12, qui ferait 0.25% !

3.4.2 Actualisation

Il s'agit cette fois d'aller dans le passé, en se demandant, par exemple, quel investissement C_0 on doit placer, à un taux d'intérêt annuel t, pour obtenir après n année un capital C_n. Les formules sont les mêmes que pour la capitalisation, si ce n'est que maintenant ce n'est pas C_0 qui est donné, mais C_n !

Exemple Si on souhaite avoir 50'000 CHF dans 20 ans sur un compte en banque à un taux de 2%, on doit placer

$$C_0 = C_{20} \cdot \frac{1}{(1+t)^{20}} = 50'000 \cdot (1+0.02)^{-20} \cong 50'000 \cdot 0.67297 \cong 33'648.60 \text{ CHF}$$

3.4.3 Équivalence de capitaux et échéance moyenne

Définition

Deux capitaux sont dit *équivalents* s'ils sont égaux au même instant.

Exemples

1. Si on suppose que le taux d'intérêt est constant à 5%, alors 1'000 CHF le premier janvier 2007 sont équivalents à 1'050 CHF le premier janvier 2008.

   En effet, une année après, les 1'000 CHF sont devenus $1'000 \cdot (1.05)^1 = 1'050$ CHF.

2. Verser 5'000 CHF aujourd'hui sur un compte bancaire d'intérêts constants à 2% est équivalent à avoir versé 4'528.65 CHF il y a 5 ans.

   En effet, on a $5'000 \cdot (1.02)^{-5} \cong 4'528.65$ CHF ou $4'528.65 \cdot (1.02)^5 \cong 5'000$ CHF.

Définition

L'*échéance moyenne* est l'unique date à laquelle plusieurs capitaux échéants à différentes dates sont réglés par un seul paiement équivalent à la somme de tous ces capitaux.

Exemple

Imaginons que l'on ait acheté 2 produits. Le premier a été acheté le premier juin 2006, il coûtait alors 1'500 CHF. Quant au deuxième, il a été commandé et il coûtera 2'500 CHF le jour de sa livraison le premier juin 2007. Pour ces deux achats, on considère que le taux d'intérêts est de 1%.

L'échéance moyenne correspond à la date où la somme des achats, qui vaut 4'000 CHF, sera équivalente aux deux paiements. Cette échéance correspond au 16 janvier 2007 (autrement dit 7 mois et 15 jours après le premier juin 2006).

En effet, on commence par déplacer les deux valeurs au premier juin 2006 (on pourrait les déplacer à n'importe quelle date), la valeur totale vaut ainsi :

$$1'500 + 2'500 \cdot (1.01)^{-1} \cong 3975.25$$

On cherche dans combien d'années n ces 3975.25 CHF valent $1'500 + 2'500 = 4'000$ CHF.

$$3975.25 \cdot (1.01)^n = 4000 \iff (1.01)^n = \tfrac{4000}{3975.25} \iff n = \log_{1.01}(\tfrac{4000}{3975.25}) \cong 0.6238 \text{ ans}$$

Ainsi $n \cong 0.6238 \cdot 360 \cong 224.6$ jours, ce qui fait environ 7 mois et 15 jours.