Sphères, plans, droites : intersections

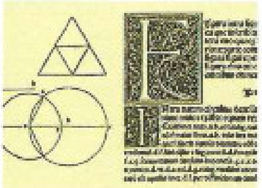
LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Il n'est pas difficile de visualiser ce que sont des droites, des plans et des sphères, en revanche il est plus délicat d'imaginer les figures formées lorsque ces éléments se coupent et plus encore de connaître les caractéristiques précises de ces figures. Cependant ces problèmes ne datent pas d'hier et ils ont parfois des solutions simples.

HISTORIQUE

L'un des plus anciens documents traitant de problèmes géométriques que l'on ait retrouvé est le papyrus de Rhind, écrit vers 1650 avant J.-C. Ce papyrus aborde de nombreux problèmes mathématiques ayant une application directe dans la vie courante (les Égyptiens faisaient des recherches dans le but d'en appliquer les résultats immédiatement) et parmi eux se trouvent des problèmes de calculs

d'aire de ***figures*** géométriques (triangles, trapèzes…). Ces calculs permettaient une bonne répartition des terres et faisaient intervenir des intersections de droites.
Ainsi on constate que depuis presque 4000 ans, les hommes s'intéressent à ce type de problème. Cependant les méthodes égyptiennes n'avaient pas grand chose à voir avec les méthodes employées de nos jours. Elles étaient empiriques et non déductives.
Il faut attendre la civilisation grecque pour voir apparaître le premier ouvrage fondé sur une approche axiomatique. C'est dans

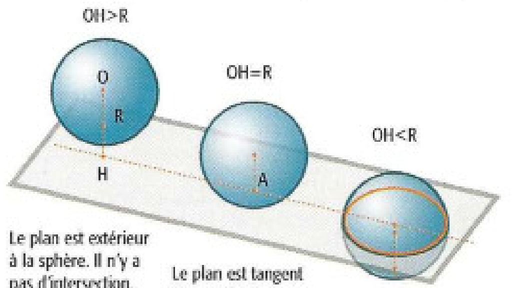


« ***Les Éléments*** » (un ensemble de 13 livres) qu'Euclide présente sa théorie. Il définit clairement ce que sont des droites, des points, des segments et bien d'autres éléments géométriques. Il énonce 10 axiomes de base puis, en se servant uniquement de ces éléments clairement définis, il déduit de nombreuses propriétés géométriques. Cette géométrie reposant entièrement sur la déduction logique est appelée tout simplement « géométrie

euclidienne ». C'est avec ***Descartes*** au XVIIe siècle que la géométrie voit une nouvelle révolution. Il établit un formalisme mathématique qui permet à l'analyse de se développer de façon impressionnante.
Il introduit ce domaine des mathématiques en géométrie pour donner naissance à la « géométrie analytique ». C'est ainsi le premier à considérer la géométrie dans l'angle des équations. Il « oublie » tous les

principes d'***Euclide*** et traite les problèmes de géométrie en résolvant des équations et non en faisant des déductions purement abstraites et logiques. De nos jours la géométrie empirique égyptienne a totalement disparu : elle est bien trop approximative. En revanche, les géométries euclidienne et analytique cohabitent toujours. Elles sont en effet complémentaires : on commence généralement l'enseignement de la géométrie par la géométrie euclidienne puisqu'elle a l'avantage de ne nécessiter qu'un peu de logique pour être comprise et maniée. On enseigne la géométrie analytique bien plus tard (puisqu'elle repose sur la résolution d'équations) et on l'utilise pour avoir des calculs systématiques, ce qui est utilisé entre autres pour faire de la géométrie assistée par ordinateur. Les applications sont alors presque infinies.

Intersections entre une sphère et un plan



Le plan est extérieur à la sphère. Il n'y a pas d'intersection.

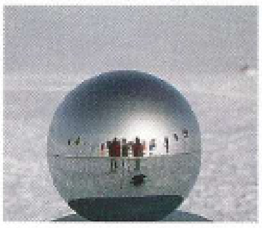
Le plan est tangent à la sphère en A.

Le plan est sécant à la sphère. L'intersection est un cercle.

INTERSECTIONS DE PLANS ET DE SPHÈRES

En géométrie euclidienne, les sphères et les plans peuvent avoir des intersections. Dans quelles circonstances ? Quelles sont ces intersections ? Pour les visualiser, prenons un exemple : une araignée

a tissé une ***toile*** infiniment grande et il commence à pleuvoir. La toile de l'araignée est à peu près plate, nous allons donc la considérer comme étant assimilable à un plan. Nous considérons que les gouttes d'eau sont sphériques. Quelles sont alors les interactions possibles entre une goutte d'eau et la toile infinie de l'araignée ? Figeons le temps à un instant donné. Ainsi tout est immobile. Une ***sphère***

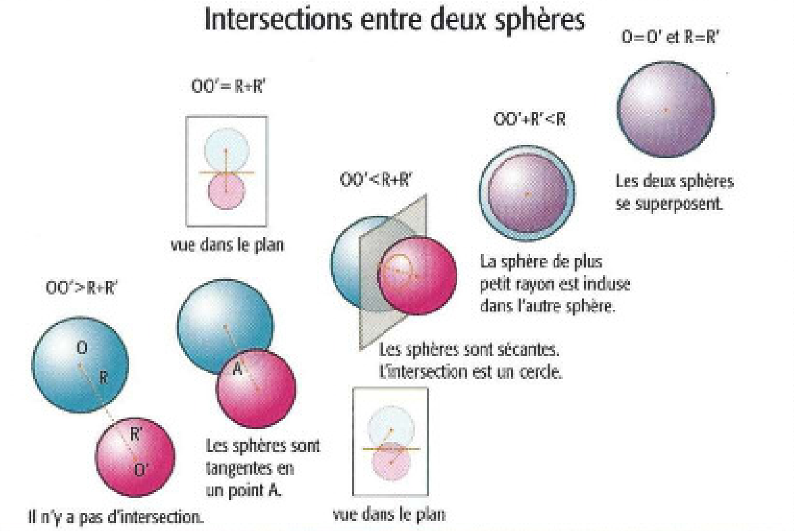


représente l'ensemble des points situés à une distance R d'un point – le centre de la sphère. La distance R est appelée « le rayon » de la sphère. Ainsi, si le centre de la sphère est à une distance Y du plan et si Y est supérieure à R, alors aucun point de la sphère ne touche le plan, il n'y a pas d'intersection (la toile n'est pas mouillée par cette goutte). À présent si le centre de la sphère est exactement à la distance R du plan, cela signifie que le point du plan qui est le plus proche du centre de la sphère se trouve exactement à une distance R de celui-ci et que tous les autres points du plan sont à une distance plus grande. Donc ce point est le seul à appartenir à la fois à la toile et à la goutte : l'intersection entre un plan et une sphère qui se trouve à une distance égale à son rayon est exactement un point. La goutte d'eau frôle la toile, elle l'effleure à peine. Dernier cas : la distance Y entre la goutte et le plan est inférieure au rayon R de la goutte. Pour modéliser ce dernier cas, prenons une feuille de papier. Posons la perpendiculairement à la toile d'araignée de façon à ce que le centre de la goutte soit sur la feuille. On peut constater que l'on peut faire tourner la feuille autour de l'axe perpendiculaire à la toile et passant par le centre de la goutte. Sur la feuille de papier, une figure se dessine : en effet on voit la trace du plan (une droite), le centre de la goutte (un point) et le contour de la goutte (un cercle). Comme le centre de la sphère est distant du plan d'une longueur inférieure à son rayon, le cercle coupe la droite (du plan) en deux points symétriques par rapport à l'axe perpendiculaire au plan et passant par le centre de la sphère. Si on fait alors tourner la feuille autour de cet axe, la marque de ces deux points dessine un cercle. Donc l'intersection entre un plan et une sphère, placée à une distance inférieure à son rayon par rapport au plan, est un cercle.
Ainsi l'intersection entre un plan et une sphère n'offre que trois possibilités :
• rien (si le plan et la sphère sont disjoints) ;
• un point (si la sphère est à une distance égale à son rayon par rapport au plan) ;
• un cercle (si la sphère est à une distance inférieure à son rayon par rapport au plan).

INTERSECTIONS ENTRE DEUX SPHÈRES

Modélisons à présent les intersections entre deux sphères. Pour traiter ce problème il faut se placer dans un plan qui contient les

Intersections entre deux sphères



Il n'y a pas d'intersection.

Les sphères sont tangentes en un point A.

Les sphères sont sécantes. L'intersection est un cercle.

La sphère de plus petit rayon est incluse dans l'autre sphère.

Les deux sphères se superposent.

L'histoire de la géométrie

2000 ans avant J.-C.
Date des premières recherches égyptiennes sur la géométrie.

1650 ans avant J.-C.
Le papyrus de Rhind fut écrit vers 1650 avant J.-C. en Égypte. C'est le plus ancien document mathématique retrouvé à ce jour.

600 ans avant J.-C.
Premier pas de la géométrie grecque avec Thalès de Milet.

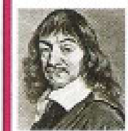
300 ans avant J.-C.
Année à laquelle Euclide et certains de ses disciples rédigeaient « Les Éléments ». Cet ouvrage est composé de 13 livres.

1824
Année à laquelle Gauss a formulé pour la première fois la possibilité qu'il existe des géométries non euclidiennes.

5 000
Nombre de polygones composant les personnages des films d'animation. Ainsi plus de 30x5 000 intersections sont calculées à chaque seconde de film pour afficher un personnage.

Le premier à inventer

La géométrie analytique en 1637



René
Descartes

deux centres (plutôt que de traiter le problème directement dans l'espace). Dans ce plan, il y a les deux centres et les deux cercles centrés en ces centres (les deux traces des sphères, c'est-à-dire les deux intersections des sphères avec le plan). De plus, chacun de ces cercles a pour rayon le rayon de la sphère dont il est l'intersection avec le plan.

• Si la distance séparant les deux centres est supérieure à la somme des rayons : les deux cercles sont ***disjoints*** et il en est logiquement de même pour les sphères associées. En effet, on retrouve facilement le résultat tridimensionnel à partir du résultat bidimensionnel en imaginant que l'on fait tourner le plan d'étude autour d'un axe qui passe par les deux centres, cela forme une surface dans l'espace, c'est le résultat en trois dimensions. Dans le cas présent, il n'y a aucune intersection dans le plan. Quand on effectue la rotation autour de l'axe, on obtient aucune trace, il n'y a donc pas d'intersection entre les deux sphères.

• Si la distance séparant les deux centres est exactement égale à la somme des rayons, les deux cercles sont tangents dans le plan. Si on imagine la rotation du plan autour de l'axe passant par les deux centres, on obtient toujours comme intersection le simple point de tangence des cercles (en effet il appartient à la droite autour de laquelle on fait tourner le plan, donc il est invariant par rapport aux rotations et la surface qu'il décrit en tournant sur lui même, c'est lui même).

• Si les deux centres sont au même endroit et que les rayons sont égaux, les deux cercles se superposent. Lorsqu'on effectue la rotation pour obtenir la figure en trois dimensions correspondante on obtient une sphère. En effet, si on fait tourner un cercle autour d'un de ses diamètres on obtient une sphère dans l'espace. Dans ce cas, l'intersection des deux sphères (confondues) est la sphère elle-même.

• Si la différence entre le plus grand rayon et le plus petit rayon est strictement supérieure à la distance entre les deux cercles (autrement dit : si la distance entre les deux centres additionnée avec le plus petit des rayons est plus petite que le plus grand des rayons) alors le plus petit des deux cercles est totalement inclus dans le plus grand. Il n'y a pas d'intersection. Selon le même raisonnement que dans le premier cas en trois dimensions, l'intersection des deux sphères est donc nulle, l'une étant incluse dans l'autre.

• Si aucun des cas précédents n'est satisfait alors les deux cercles se coupent en deux points. Si on visualise ces deux points dans l'espace on constate qu'ils dessinent un cercle. L'intersection des deux sphères est donc un cercle dans l'espace.

Ainsi les cas possibles d'intersection entre deux sphères sont les suivants : aucune intersection, un point d'intersection, une sphère, un cercle. Ce sont donc les mêmes cas d'intersection que ceux avec un plan et une sphère ; il faut cependant rajouter le cas où les deux sphères sont identiques.

INTERSECTIONS AVEC DES DROITES

Les intersections entre deux plans semblent être des cas plus simples que les intersections entre un plan et une sphère ou entre deux sphères. Nous allons le vérifier maintenant.

Si on considère deux plans, trois possibilités peuvent être illustrées :

• soit ils sont parallèles et non confondus alors leur intersection est vide, c'est-à-dire qu'ils ne s'intersectent pas ;

• soit ils sont parallèles et confondus dans ce cas leur intersection c'est eux même ;

• soit ils ne sont pas parallèles et dans ce dernier cas ils se coupent selon une droite ;

D'autre part, il faut préciser que l'on peut définir une droite comme l'intersection de deux plans. Cela n'est pas encore essentiel, mais il faudra s'en souvenir lorsque nous aborderons des exemples simples de géométrie analytique. Pour l'instant, considérons qu'une droite est une ligne rectiligne et infinie dans l'espace. Il devient alors simple de modéliser les cas possibles d'intersections entre une droite et un plan. Soit la droite est parallèle au plan soit elle ne l'est pas. Si elle est parallèle au plan, soit elle est contenue dans le plan (leur intersection est alors la droite), soit elle est totalement disjointe du plan (leur intersection est alors vide). Si elle n'est pas parallèle au plan elle coupe logiquement le plan en un unique point. Ces cas d'intersections de plan avec une droite sont très importants. En effet, une droite étant l'intersection de deux plans, l'intersection d'une droite avec un plan est l'intersection de trois plans entre eux. Mais maintenant envisageons les intersections possibles entre une droite et une sphère :

• soit la distance du centre de la sphère à la droite est supérieure au rayon, auquel cas l'intersection est vide ;

• soit la distance du centre de la sphère à la droite est exactement égale au rayon dans ce cas l'intersection est le point de tangence ;

• soit la distance entre le centre de la sphère et la droite est strictement inférieure au rayon alors la droite « traverse » la sphère ce qui fait donc deux points d'intersections (un point d'intersection à « l'entrée » et un point d'intersection à la « sortie »).

Tout ces résultats se retrouvent facilement en raisonnant dans l'unique plan qui contient la droite et le centre de la sphère.

APPLICATION EN INFORMATIQUE

Tous ces problèmes géométriques d'intersections peuvent paraître inutiles et indigestes à première vue, une sorte de lubie de mathématiciens sans grand intérêt. Pourtant ce sont des problèmes qui ont de nombreuses applications pratiques. Par exemple, les programmes sur ordinateurs qui permettent de créer des images en ***trois dimensions*** utilisent tous des calculs résolvant ces problèmes d'intersections. En effet la méthode la plus classique pour faire une image en trois dimensions sur ordinateur est d'utiliser un algorithme dit « de lancer de rayon ». On considère pour chaque point de l'image un rayon lumineux qui en part et grâce à des calculs on vérifie pour chaque plan de la scène si le rayon l'intersecte. Si le rayon l'intersecte alors la lumière, vue du point de l'image d'où est parti le rayon, est de la couleur du plan qu'elle a intersecté. Ainsi donc, en suivant chaque rayon lumineux un à un et en calculant tout ce qu'il peut intersecter comme objets de la scène, on parvient à savoir de quelle couleur doit être dessiné chaque point de l'image et on parvient donc à créer des images et des films en trois dimensions. De plus, sans même parler d'imagerie, ces problèmes d'intersections sont utiles pour toutes les simulations de trois dimensions sur ordinateur. Par exemple, on peut calculer exactement la trajectoire d'un missile ou d'un boulet de canon sur ordinateur et avec des calculs d'intersection on peut savoir s'il va arriver sur la sphère ciblée ou non. On peut aussi vérifier si des plans de bâtiments donneront des bâtiments solides en vérifiant où sont les points d'appuis d'intersections. En résumé, tous ces problèmes d'intersections sont extrêmement importants dès que l'on modélise le monde réel.

BASES DE MÉTHODES DE CALCULS ANALYTIQUES

Comment donc un ordinateur peut-il raisonner pour trouver les intersections ? À partir de la définition des éléments (cercle, plan, droite), l'homme isole les différents cas possibles rapidement en utilisant sa logique. Mais pour un ordinateur c'est autre chose. Un ordinateur ne sait agir que de façon systématique. Il lui faut une méthode infaillible qui soit toujours exactement la même. La réponse est apportée par les mathématiques analytiques : la résolution de systèmes d'équations. Comment un ordinateur peut savoir si deux plans se coupent ou non ? Nous, nous regardons si les deux plans sont parallèles ou pas.

Un ordinateur va agir sensiblement de la même façon : il va définir ces plans à partir d'un point et d'un vecteur perpendiculaire. Il a donc pour ce problème deux points et deux vecteurs (un pour chaque plan). Si ces deux vecteurs sont parallèles, les plans le sont, de même s'ils ne sont pas parallèles, les plans ne le sont pas.

Or les mathématiques offrent justement un outil très pratique de calcul pour savoir si deux vecteurs sont parallèles ou non : le produit vectoriel. Le produit vectoriel de deux vecteurs A et B est défini ainsi : il est nul si et seulement si les deux vecteurs sont parallèles.

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$$

On constate donc qu'avec simplement trois calculs (un pour chaque ligne du vecteur final) un ordinateur peut savoir si les deux plans sont parallèles ou non.

De la même façon, nous pouvons traiter le cas de l'intersection d'une droite avec un plan. Tout d'abord, une droite est l'intersection de deux plans. Chercher si une droite et un plan se coupent revient à chercher si trois plans se coupent en un point commun ou non. Cette fois, nous allons définir un plan à partir de son équation (une équation de plan est du type ax+by+cz+d=0 avec les chiffres a, b, c et d, définissant le plan) et non plus à partir d'un point et d'un vecteur perpendiculaire. Chercher si les trois plans (P1, P2 et P3) se coupent en un seul point revient donc à chercher s'il existe un point M(x,y,z) tel que x, y et z vérifient :

$$\begin{cases} a_{P1}x + b_{P1}y + c_{P1}z + d_{P1} = 0 \\ a_{P2}x + b_{P2}y + c_{P2}z + d_{P2} = 0 \\ a_{P3}x + b_{P3}y + c_{P3}z + d_{P3} = 0 \end{cases}$$

Encore une fois il existe un outil mathématique puissant qui permet de savoir si un tel système de 3 équations admet une unique solution ou non : le déterminant 3x3. Le déterminant 3x3 se définit à partir d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$(a_{p1}b_{p2}c_{p3})+(b_{p1}c_{p2}a_{p3})+(c_{p1}a_{p2}b_{p3})-(a_{p3}b_{p2}c_{p1})-(a_{p2}b_{p1}c_{p3})-(a_{p1}c_{p3}c_{p2})$.

Il est non nul si et seulement si on a une solution unique. Il est nul s'il n'y a aucune solution donc la droite est parallèle et disjointe du plan. S'il y a une infinité de solution la droite est parallèle et contenue dans le plan.

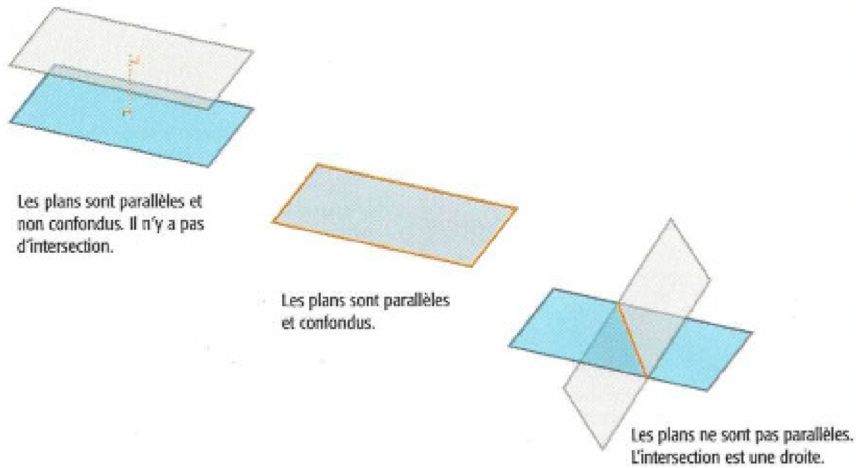
On voit ici qu'avec un seul calcul (qui peut paraître long, mais qui est très simple pour un ordinateur) on peut savoir de façon systématique si une droite coupe un plan (donc si le rayon lumineux doit prendre la couleur d'un plan de la scène par exemple).

Bien entendu ce ne sont que quelques rudiments de géométrie analytique, mais ils permettent déjà d'avoir une bonne idée du fonctionnement des ordinateurs lorsqu'ils ont à traiter ces problèmes d'intersections.

Un ***programme*** sur ordinateur peut dessiner une image rudimentaire en 3D à partir d'une scène qu'on lui aurait décrite et il peut donc nous servir à créer les images d'un mini ***film d'animation***. Le fonctionnement est toujours le même par l'approche analytique : on pose les équations caractéristiques de tous les éléments (par exemple une équation du type « ax+by+cz+d=0 » pour un plan) et selon le type des équations, on applique telle ou telle méthode de résolution automatique.

Ainsi on peut déterminer s'il y a intersection et, si oui, le type d'intersection.

Intersections entre deux plans



Les plans sont parallèles et non confondus. Il n'y a pas d'intersection.

Les plans sont parallèles et confondus.

Les plans ne sont pas parallèles. L'intersection est une droite.