haute école arc gestion
neuchâtel berne jura neuchâtel delémont

PROBABILITES ET LOIS STATISTIQUES

Support de cours de statistique 2

Sylvie Gonano
Version Février 2015

TABLE DES MATIERES DE PROBABILITES ET LOIS STATISTIQUES

Chapitre 1 L'analyse combinatoire

1.1 Introduction
1.2 Les permutations
1.3 Les combinaisons
1.4 Les arrangements
1.5 Exercices
Réponses des exercices 1.5

Chapitre 2 Notions de probabilité

2.1 Concept fondamental
2.2 La notion d'événement
2.3 Les probabilités simples
2.4 Exercices
2.5 Représentation graphique
2.6 Les probabilités conditionnelles
2.7 Multiplication des probabilités
2.8 Exercices
Réponses des exercices 2.4 et 2.8

Chapitre 3 Introduction aux lois de probabilité

3.1 Introduction
3.2 La loi des grands nombres
3.3 La distribution de probabilité discrète
3.4 La distribution de probabilité continue
3.5 Exercices
3.6 L'espérance mathématique et la variance
3.7 Exercices
Réponses des exercices 3.5 et 3.7

Chapitre 4 La loi binomiale

4.1 La loi de Bernoulli
4.2 La loi binomiale
4.3 Exercices
Réponses des exercices 4.3

Chapitre 5 La loi de Poisson

5.1 Définition
5.2 Aspects mathématiques
5.3 Exemple
5.4 Représentation graphique
5.5 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson
5.6 Exercices
Réponses des exercices 5.6

Chapitre 6 La loi normale

6.1 Définition
6.2 La loi normale centrée réduite
6.3 Exemple
6.4 Intervalles remarquables
6.5 Exercices
Réponses des exercices 6.5
Annexe 1 : table de la loi normale

CHAPITRE 1 L'ANALYSE COMBINATOIRE

1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est un ensemble de techniques qui servent à déterminer le nombre de résultats possibles d'une expérience particulière sans les dénombrer, c'est-à-dire sans les énumérer.
L'analyse combinatoire consiste à « ranger » des objets dans différents ordres. Ces objets peuvent être des nombres, des lettres, des individus, etc…

Il existe trois sortes de dénombrement : les **permutations**, les **combinaisons** et les **arrangements**.

Dans les différentes formules que nous allons voir intervient la notion de **factoriel**.

On appelle n factoriel (que l'on note n !) le produit des n premiers nombres entiers positifs.

Exemple : $5\,! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

De manière plus générale,

$$\mathbf{n\,!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Par convention, $0\,! = 1$.

1.2 Les permutations

1.2.1 Les permutations simples

On appelle permutation simple de n objets différents toute suite que l'on peut former avec ces objets dans un ordre quelconque. Une permutation est différente d'une autre permutation si elle contient les mêmes objets mais disposés dans un ordre différent.

Exemple : prenons le mot « oui », formé de 3 lettres différentes, donc de 3 objets différents. Enumérons le nombre de possibilités qu'il y a de former des mots différents (indépendamment du sens) avec ces trois lettres :

oui oiu uoi uio iou iuo

cela donne 6 possibilités.

Dans cet exemple, on peut dénombrer les possibilités mais quand cela devient impossible, il existe une formule qui nous donne le résultat de six possibilités, c'est :

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

De manière générale, le nombre de permutations simples de n objets différents est égal à :

$$\mathbf{P_n = n\,!}$$

1.2.2 Les permutations avec répétitions

Lorsque parmi les n objets il y en a qui sont semblables, on parle de permutations avec répétitions. Le nombre de possibilités d'avoir un ordre différent est plus petit que dans le cas de permutations simples car nous ne pouvons pas différencier les objets semblables.

Exemple : prenons le mot « non », formé de 3 lettres mais donc 2 sont identiques. Enumérons le nombre de possibilités qu'il y a de former des mots différents (indépendamment du sens) avec ces trois lettres :

non nno onn

cela donne 3 possibilités.

La formule que l'on peut utiliser est : $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = 3$

parce qu'il y a 3 objets dont 2 sont semblables et 1 unique.

De manière générale, le nombre de permutations avec répétitions de n objets dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables,..., et n_r sont semblables est égal à :

$$\mathbf{P_n\ (n_1, n_2, \ldots, n_r)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$$

1.3 Les combinaisons

1.3.1 Les combinaisons simples

On appelle combinaison de ***k*** objets choisis parmi ***n*** objets ($k \leq n$), tout sous-ensemble à k éléments que l'on peut former en choisissant k objets de l'ensemble des n objets.
Deux combinaisons sont distinctes si elles ne contiennent pas les mêmes objets.

Exemple : cinq chevaux A, B, C, D et E prennent le départ d'une course. Combien de façons y a-t-il pour désigner les trois chevaux qui arriveront aux trois premières places, sans tenir compte de l'ordre d'arrivée ? Autrement dit, combien y a-t-il de **tiercés dans le désordre** ?

Solution par dénombrement : ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

cela donne 10 possibilités.

La formule qui donne le même résultat, sans dénombrement est : $\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10$

De manière générale, le nombre C_n^k des combinaisons de k objets parmi n objets est égal à :

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

1.3.2 Les combinaisons avec répétitions

On obtient des combinaisons avec répétitions lorsque parmi n objets on en choisit k avec la possibilité de prendre plusieurs fois le même objet. Du fait des répétitions, k peut être plus grand que n.

Exemple : on veut former des lots contenant 2 objets parmi les 3 articles disponibles suivants : vin, chocolat, biscuits.

Enumérons les possibilités : vin et vin , vin et chocolat , vin et biscuits , chocolat et chocolat , chocolat et biscuits , biscuits et biscuits.
Cela donne 6 possibilités.

La formule que l'on peut utiliser est : $\dfrac{(3+2-1)!}{(3-1)!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 6$

De manière générale, le nombre $\overline{C}_n^k$ des combinaisons avec répétitions de k objets parmi n objets est égal à :

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$$

1.4 Les arrangements

1.4.1 Les arrangements simples

On appelle arrangement de k objets parmi n objets ($k \leq n$), tout sous-ensemble à k éléments que l'on peut former en choisissant k objets de l'ensemble des n objets en tenant compte de l'ordre.
Deux arrangements sont distincts s'ils ne contiennent pas les mêmes objets ou s'ils contiennent les mêmes objets mais dans un ordre différent.

Exemple : cinq chevaux A, B, C, D et E prennent le départ d'une course. Combien de façons y a-t-il pour désigner les trois chevaux qui arriveront aux trois premières places, en tenant compte de l'ordre d'arrivée ? Autrement dit, combien y a-t-il de **tiercés dans l'ordre** ?

Pour énumérer les différentes possibilités, on prend chacune des combinaisons et on permute les 3 chevaux :

ABC ACB BAC BCA CAB CBA
ABD ADB BAD BDA DAB DBA
⋮
CDE CED DCE DEC ECD EDC

cela donne 10 fois 6 = 60 possibilités.

La formule que l'on peut utiliser est : $\dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 60$

De manière générale, le nombre A_n^k des arrangements de k objets parmi n objets est égal à :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le nombre d'arrangements peut aussi être obtenu en multipliant le nombre de combinaisons par les permutations possibles de chaque combinaison. Dans notre exemple, le nombre d'arrangements est égal à :

$$10 \times 6 = 60$$

De manière générale, on peut écrire :

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$

1.4.2 Les arrangements avec répétitions

On obtient des arrangements avec répétitions lorsque parmi n objets on en choisit k avec la possibilité de prendre plusieurs fois le même objet et en tenant compte de l'ordre. Du fait des répétitions, k peut être plus grand que n.

Exemple : on choisit 2 nombres parmi les 3 premiers nombres entiers.
Enumérons les possibilités :

11 12 13 21 22 23 31 32 33
Cela donne 9 possibilités.

La formule que l'on peut utiliser est : $3^2 = 9$

De manière générale, le nombre $\overline{A}_n^k$ des arrangements avec répétitions de k objets parmi n objets est égal à :

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

1.5 Exercices

1. Calculer : 10 ! ; $\frac{7!}{5!}$; $\frac{4!}{0!}$; $\frac{23!+22!}{23!-22!}$

2. De combien de façons différentes un groupe de 12 personnes peut-il s'asseoir sur un banc ?

3. Combien de mots différents peut-on former avec le mot STATISTIQUE (sans tenir compte de la signification des mots) ?

4. Dans une classe de 25 étudiants (nommés A, B, C,…), on doit choisir une délégation de 4 représentants.
   a) Combien de délégations différentes peut-on former ?
   b) Combien de délégations contiennent les étudiants A, B, C ?
   c) Combien de délégations ne contiennent pas l'étudiant D ?
   d) Combien de délégations contiennent A et pas D ?

5. Si l'on ne souhaite pas de répétitions :
   a) Combien de nombres à 3 chiffres peut-on former avec les chiffres 2, 3, 5, 6 et 7 ?
   b) Combien de ces nombres sont-ils inférieurs à 400 ?
   c) Combien de ces nombres sont-ils impairs ?
   d) Combien de ces nombres finissent par 75 ?

6. Refaire l'exercice 5 en acceptant les répétitions.

7. Quatre filles et trois garçons désirent s'asseoir sur un banc.
   a) De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir ?
   b) Combien reste-t-il de possibilités si les filles désirent s'asseoir les unes à côté des autres ?
   c) Combien reste-t-il de possibilités si les garçons désirent s'asseoir les uns à côté des autres ?
   d) Combien reste-t-il de possibilités si les garçons et les filles désirent être en alternance ?

8. Combien y a-t-il de possibilités de ranger dans une boîte 10 chocolats bruns, 8 chocolats blancs et 6 chocolats noirs, sachant que les chocolats de même couleur doivent être placés les uns à côté des autres ?

9. De combien de manières différentes peut-on former un comité de 5 personnes si on choisit parmi 6 professeurs et 15 étudiants et si l'on souhaite avoir au moins 3 étudiants ?

10. Combien y a-t-il de façons différentes de remplir un bulletin du TOTOGOAL en sachant que pour 13 matches proposés, on a le choix entre 1 , 2 ou x ?

11. Dans la loterie du Swiss Loto, il faut choisir 6 numéros sur 42.
    a) Combien existe-t-il de possibilités différentes ?
    b) Si les boules étaient remises dans l'urne après chaque tirage, à combien passerait le nombre de possibilités ?

12. Combien de mots différents peut-on former avec toutes les lettres du mot SUISSE (sans considération de sens) :
    a) s'il n'y a pas de restriction ?
    b) si les voyelles doivent être les unes à côté des autres ?

13. Parmi 50 coupons-réponse reçus, on va en tirer 8 au sort. Les 4 premiers gagnants recevront des prix de 500, 300, 200 et 100 francs respectivement, alors que les 4 derniers lauréats gagneront tous 50 francs. Déterminer le nombre de possibilités de répartition des prix.

14. Pour composer leurs différents lots, les organisateurs d'une tombola ont à disposition en nombre suffisant des montres, des plantes, du vin et du chocolat. Chaque numéro gagnant comporte deux articles.
    a) Combien de lots peuvent-ils constituer ?
    b) Combien de lots contenant des articles différents peuvent-ils constituer ?

15. De combien de manières différentes peut-on asseoir 4 hommes et 4 femmes autour d'une table ronde si :
    a) il n'y a aucune restriction ?
    b) mesdames X et Y ne doivent pas être assises l'une à côté de l'autre ?
    c) chaque femme doit être placée entre deux hommes ?

16. Utiliser la fonction *FACT* d'EXCEL pour vérifier les résultats des exercices 1,2 et 3.

17. Utiliser la fonction *COMBIN* d'EXCEL pour vérifier les résultats des exercices 4, 9, 11a et 14b.

18. Utiliser la fonction *PERMUTATION* d'EXCEL pour vérifier les résultats de l'exercice 5.

Réponses des exercices 1.5

1. 3'628'800 ; 42 ; 24 ; $\frac{12}{11}$ 2. 479'001'600 3. 1'663'200
4. a) 12'650 b) 22 c) 10'626 d) 1771 5. a) 60 b) 24 c) 36 d) 3
6. a) 125 b) 50 c) 75 d) 5 7. a) 5040 b) 576 c) 720 d) 144 8. 6 9. 18'018
10. 1'594'323 11. a) 5'245'786 b) 10'737'573 12. a) 120 b) 24
13. 901'956'132'000 14. a) 10 b) 6 15. a) 5040 b) 3600 c) 144

CHAPITRE 2 NOTIONS DE PROBABILITE

2.1 Concept fondamental

Lorsque nous jetons un dé, il est impossible de prévoir à coup sûr le numéro de la face supérieure qui sera lisible. On dit que l'expérience de jeter un dé est une **expérience aléatoire**. Une telle expérience peut être réalisée un nombre illimité de fois ; on appelle **épreuve** chaque répétition de cette expérience.
Lorsque nous jetons un dé, nous admettons comme également probable, ou **équiprobable**, l'arrivée de l'une quelconque de ses six faces.

2.2 La notion d'événement

On désigne par **E** l'**ensemble fondamental** d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble de tous les **résultats** (ou **issues**) possibles de cette expérience.

Exemple Pour le jet d'un dé, nous avons l'ensemble fondamental : E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} qui est formé d'**événements élémentaires** : {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} correspondant aux sous-ensembles de E réduits à un seul élément.

Nous pouvons envisager plusieurs sous-ensembles d'**événements possibles**, tous liés à l'expérience considérée, par exemple :

A : le numéro est pair $\Rightarrow$ **A** : {2, 4, 6}
B : le numéro est supérieur à 3 $\Rightarrow$ **B** : {4, 5, 6}
C : le numéro est 5 $\Rightarrow$ **C** : {5}

Une épreuve permet la **réalisation** ou la **non-réalisation** d'un événement. Si nous jetons le dé une seule fois et que, lors de cette épreuve, la face qui porte le numéro 4 sort, on dira que l'événement **A** est réalisé. De même, l'événement **B** est réalisé ; en revanche, l'événement **C** n'est pas réalisé.

L'ensemble **E** correspond à l'événement qui consiste à obtenir un numéro égal à 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Cet événement particulier est évidemment réalisé quel que soit le résultat de l'épreuve. On dit que **E** est l'**événement certain**.

Le sous-ensemble vide, désigné par le symbole $\varnothing$, représente l'**événement impossible**, qui ne peut être réalisé par aucun résultat de l'épreuve.

2.3 Les probabilités simples

Par définition, la probabilité **p** que l'événement **A** se réalise est calculée par le rapport du nombre **n** des événements élémentaires qui réalisent **A** (on les appelle **cas favorables**), au nombre total **N** des événements élémentaires (on les appelle **cas possibles**) :

$$\boxed{p = P(A) = \frac{n}{N}}$$

Par exemple, si **A** est l'arrivée d'un nombre pair lors du lancement d'un dé, il y a 6 cas possibles, soit **E** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, dont 3 sont favorables puisque **A** = {2, 4, 6}. Nous avons alors :

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Remarques La définition de P(A) permet d'écrire que $0 \leq P(A) \leq 1$:

- P(A) = 0 lorsque A est un événement impossible
- P(A) = 1 lorsque A est l'événement certain

Lorsque l'événement **A** ne se réalise pas, on dit alors que l'événement contraire est réalisé et on le note $\overline{A}$. La probabilité de $\overline{A}$ est égale à **1 - P(A)**, soit :

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{N-n}{N} = \mathbf{q}$$

Nous avons alors la relation $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{p} + \mathrm{q} = 1$.

2.4 Exercices

1. On jette un dé ; quelle est la probabilité d'obtenir :
a) le numéro 2
b) un numéro pair
c) un numéro supérieur à 4

2. On tire une carte d'un jeu de 36 cartes ; quelle est la probabilité d'obtenir :
a) l'as de cœur
b) un as
c) un carreau

3. On tire simultanément (= **sans remise**, c'est-à-dire sans les remettre) 3 cartes d'un jeu de 36 cartes ; quelle est la probabilité d'obtenir 3 as ? Préciser le nombre de cas favorables ainsi que le nombre de cas possibles.

4. Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges. On tire simultanément 2 boules ; quelle est la probabilité d'avoir 2 boules blanches ? Préciser le nombre de cas favorables ainsi que le nombre de cas possibles.

5. On prélève simultanément au hasard 3 ampoules électriques dans un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité pour que

a) aucune ampoule ne soit défectueuse
b) au moins une ampoule soit défectueuse.

Préciser à chaque fois le nombre de cas favorables ainsi que le nombre de cas possibles.

2.5 Représentation graphique

La représentation graphique sous la forme de diagrammes de Venn permet de comprendre les règles élémentaires du calcul des probabilités.

Reprenons l'exemple du dé avec les sous-ensembles suivants :

A : le numéro est pair	**A** : {2, 4, 6}
B : le numéro est supérieur à 3	**B** : {4, 5, 6}
C : le numéro est 5	**C** : {5}

Nous pouvons alors représenter cette expérience de la façon suivante :

Nous pouvons illustrer alors les règles suivantes :

P(**A** et **B**) = P(**A** $\cap$ **B**) Probabilité d'obtenir un chiffre pair (événement **A**) <u>et</u> un chiffre supérieur à 3 (événement **B**) :

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

P(**A** ou **B**) = P(**A** $\cup$ **B**) Probabilité d'obtenir un chiffre pair (événement **A**) <u>ou</u> un chiffre supérieur à 3 (événement **B**) :

$$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

On notera que P(**A** $\cap$ **B**) $\neq 0$, cela signifie qu'il existe des événements qui réalisent **A** et qui réalisent **B**. On dit que les événements **A** et **B** ne sont pas **incompatibles**. Alors, on a :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

2.6 Les probabilités conditionnelles

On note P(**A/B**) la **probabilité conditionnelle** que l'événement **A** se réalise à la condition que l'événement **B** se soit déjà réalisé (obtenir un chiffre pair, événement A, lorsque le chiffre doit être supérieur à 3, événement B). La probabilité de P(A/B) est égale à :

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemple On jette une paire de dés bien équilibrés. Sachant que la somme obtenue est égale à 6, calculer la probabilité pour que l'un des deux dés ait donné un 2.

Evénement **A** : au moins l'un des dés donne un 2 : {2,1}, {2,2}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {1,2}, {3,2}, {4,2}, {5,2}, {6,2}.
Evénement **B** : la somme est égale à 6 : {1,5}, {2,4}, {3,3}, {4,2}, {5,1}.

A $\cap$ **B** = {2,4}, {4,2}

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{nombre\ d'éléments\ de\ A \cap B}{nombre\ d'éléments\ de\ B} = \frac{2}{5}$$

2.7 Multiplication des probabilités

Si **A** ne dépend pas de la réalisation de **B**, on dit que les événements **A** et **B** sont **indépendants** (obtenir un chiffre pair au premier jet et un chiffre supérieur à 3 au second jet), alors P(**A/B**) = P(**A**), d'où la loi de **multiplication des probabilités** :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exemple Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard 3 articles du lot, l'un après l'autre ; il s'agit donc d'un **tirage sans remise**. Quelle est la probabilité qu'aucun article tiré ne soit défectueux ?

Probabilité que le 1er article ne soit pas défectueux : $P(A_1) = 8/12$
Probabilité que le 2ème article ne soit pas défectueux : $P(A_2) = 7/11$
Probabilité que le 3ème article ne soit pas défectueux : $P(A_3) = 6/10$

Les tirages étant indépendants, la probabilité qu'aucun article ne soit défectueux est égale à :

$$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{336}{1320} = 0{,}2545$$

2.8 Exercices

1. Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules rouges. On tire une boule, on observe sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire une seconde boule (tirage avec remise).
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule blanche ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules de la même couleur ?

2. On extrait successivement 3 boules d'une boîte contenant 6 boules rouges, 4 boules blanches et 5 boules vertes. Quelle est la probabilité pour que les 3 boules soient extraites dans l'ordre rouge, blanche et verte, si l'on procède à un tirage
   a) avec remise ?
   b) sans remise ?

3. Sur 100'000 garçons qui naissent, 89'620 sont encore en vie à 50 ans et 59'390 à 70 ans. Quelle probabilité un homme de 50 ans a-t-il d'être encore en vie à 70 ans ?

4. Dans un collège, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 160 cm. On sait que le 60% des élèves sont des filles. Si l'on prend un élève au hasard, et si celui-ci (ou celle-ci) mesure plus de 160 cm, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

5. Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total des pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont respectivement 3%, 4% et 5%.
   Supposons que l'on prenne une pièce au hasard et que celle-ci soit défectueuse (un premier événement est alors réalisé), calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine M_1.

6. Refaire les exercices 3, 4 et 5 de la page 11 en utilisant la multiplication des probabilités.

7. Une urne contient un grand nombre de boules rouges, noires, jaunes et bleues dans la proportion 5, 4, 2 et 1. On effectue des tirages avec remise. Trouver la probabilité qu'en effectuant 16 tirages, on tire 7 boules rouges, 4 boules noires, 3 boules jaunes et 2 boules bleues.

8. Une boîte contient 26 jetons représentant les 26 lettres de l'alphabet (les 6 voyelles *a, e, i, o, u, y* et les 20 consonnes). On tire au hasard simultanément 4 jetons.
   a) Quelle est la probabilité de tirer deux voyelles et deux consonnes ?
   b) Quelle est la probabilité de tirer au plus trois voyelles ?

9. Une boîte blanche contient 8 pièces dont 3 sont défectueuses et une boîte noire contient 5 pièces dont 2 sont défectueuses. On tire une pièce dans chaque boîte.
   a) Quelle est la probabilité que les deux pièces soient défectueuses ?
   b) Quelle est la probabilité que l'une des pièces soit défectueuse et l'autre pas ?
   c) Si l'une des pièces est défectueuse et l'autre pas, quelle est la probabilité que la pièce défectueuse provienne de la boîte blanche ?

Réponses des exercices 2.4

1. a) 1/6 b) ½ c) 1/3 2. a) 1/36 b) 1/9 c) ¼ 3. 1/1785 4. 5/14 5. a) 24/91 b) 67/91

Réponses des exercices 2.8

1. a) 0.2344 b) 0.5313
2. a) 0.0356 b) 0.0440
3. 0.6627
4. 0.2727
5. 0.4054
6. voir réponses exercices 2.4
7. 0.0125
8. a) 0.1906 b) 0.9990
9. a) 0.15 b) 0.475 c) 0.4737

CHAPITRE 3 INTRODUCTION AUX LOIS DE PROBABILITE

3.1 Introduction

Nous allons commencer par faire un exercice de répétition. Si l'on jette 50 fois un dé non pipé, on peut indiquer les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

Nombre de points obtenus : x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	Pourcentages	$n_i x_i$	$f_i x_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	9				
2	8				
3	6				
4	6				
5	10				
6	11				
Total					

1. Compléter le tableau et calculer la **moyenne pondérée** des points obtenus à partir :

   a) de la colonne (5)

   b) de la colonne (6)

2. Représenter graphiquement cette distribution.

Le graphique représentant les effectifs, les fréquences ou les pourcentages d'une distribution relative à une **variable discrète** porte le nom de ..... .

Supposons que l'on pousse l'expérience jusqu'à jeter le dé 1'000'000'000'000 = $1 \cdot 10^{12}$ fois.
a) Compléter le tableau ci-dessous intuitivement :

Nombre de points obtenus x_i	Effectifs devinés n_i	Fréquence attendue f_i	PROBABILITE p_i	$p_i x_i$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total				

Loi : Lorsque l'expérience est répétée un nombre infini de fois, la notion de fréquence fait place à celle de **probabilité**, et la distribution prend alors le nom de **distribution de probabilité**.

b) Calculer la **moyenne pondérée** de cette distribution :

Dans le cas d'une distribution de probabilité, la notion de moyenne pondérée est remplacée par celle d'**espérance mathématique** que l'on note **E(X)**. La formule de l'espérance mathématique est la suivante :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}$$

La loi ci-dessus porte le nom de **la loi des grands nombres**.

3.2 La loi des grands nombres

Selon cette loi, la **fréquence observée** d'apparitions d'un résultat particulier dans une succession d'expériences aléatoires se confond avec la **probabilité théorique** d'obtenir ce résultat lors d'une expérience particulière, lorsque le nombre d'expériences **tend vers l'infini**. Autrement dit, s'il y a théoriquement une chance sur six d'obtenir une face déterminée en jetant un dé, on constate que cette tendance ne se produit que si l'on renouvelle un très grand nombre de fois l'expérience. La convergence sera d'autant plus grande que l'expérience sera répétée un nombre élevé de fois. Par conséquent, le chiffre de un sur six ne se rencontrera pas sur quelques centaines de jets et a fortiori sur quelques-uns !
Cette loi établit le lien entre la notion concrète de fréquence et la notion abstraite de probabilité. Elle constitue le fondement de la statistique probabiliste.
Mais il faudra se rappeler que convergence ne signifie pas absence d'écarts, et ceci est d'autant plus vrai que le nombre d'expériences est faible.

3.3 La distribution de probabilité discrète

Si X est une variable pouvant prendre l'ensemble des valeurs discrètes $x_1, x_2, ..., x_k$ avec comme probabilités respectives $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_k)$, on dit que X a une **distribution de probabilité discrète**. La fonction p(X) est la distribution de probabilité de X. La variable X est appelée **variable aléatoire discrète**.

Exemple On lance une paire de dés. Soit X la somme des points obtenus. La distribution de probabilité est alors donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$											

En complétant le tableau, on constate que la probabilité d'obtenir la somme 5 est égale à 1/9. Cela signifie que si l'on jette 900 fois les deux dés simultanément, on peut espérer obtenir 100 fois la somme 5.

3.4 La distribution de probabilité continue

On peut étendre les notions de distribution de probabilité discrète au cas où la variable X prend ses valeurs sur un ensemble continu. La variable X est appelée **variable aléatoire continue**. Dans ce cas, la représentation graphique de la distribution de probabilité continue est une courbe continue dont l'équation est $y = p(x)$. L'aire totale limitée par la courbe et l'axe des x est égale à 1. L'aire limitée par la courbe et les droites $x = a$ et $x = b$ donne la probabilité que x soit compris entre a et b, c'est-à-dire $p(a < x < b)$.
La fonction $y = p(x)$ est appelée **densité de probabilité**.
La distribution de probabilité continue la plus connue est la **loi normale**.

3.5 Exercices

1. Soit la distribution de probabilité discrète suivante :

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/6	1/2	3/10	1/30

Trouver :

a) $p(x = 2)$
b) $p(1 \leq x \leq 3)$
c) l'espérance mathématique de cette distribution de probabilité.

2. Un vendeur de parapluie gagne Fr. 300.- les jours où il pleut ; en revanche, il perd Fr. 60.- les jours où il fait beau. La probabilité pour qu'il pleuve est de 0.3.

   a) Etablir la distribution de probabilité du résultat journalier.
   b) Quelle somme peut-il espérer gagner par jour ?

3. L'équipe de football de Young Boys doit rencontrer successivement Lucerne, Bâle et Zürich. On estime ses chances de gagner respectivement à 0.6, 0.2 et 0.1 et ses chances de faire match nul respectivement à 0.3, 0.4 et 0.2. En football, un match gagné rapporte trois points, un match nul un point et un match perdu zéro point.

   a) Quel nombre de points Young Boys peut-il espérer réaliser
      - contre Lucerne ?
      - contre Bâle ?
      - contre Zürich ?
      - sur l'ensemble des trois rencontres ?

   b) Si X est la variable aléatoire du nombre de points obtenus par Young Boys sur l'ensemble des trois rencontres, établir la distribution de probabilité de X sous forme d'un tableau et calculer l'espérance mathématique E(X).

   c) Quelle est la probabilité que Young Boys récolte 3 points au moins sur l'ensemble des trois matches ?

   d) Quelle est, pour Young Boys, la probabilité de gagner contre Lucerne, de perdre ensuite contre Bâle et enfin de faire match nul contre Zürich ?

4. Le boulot, c'est la santé ...

   Hypothèse : Je dispose de deux heures pour préparer un travail écrit et je souhaite obtenir la meilleure note possible.

   Première alternative : j'ai le choix entre travailler et ne pas travailler.

   - Si je décide de ne pas travailler, j'ai une **deuxième alternative** : tricher et ne pas tricher.

     Si je ne triche pas, j'ai 60% de chance d'obtenir la note 2, 30% la note 3 et 10% la note 4.
     Si je triche, j'ai 3 chances sur 4 de me **faire attraper** et d'être sanctionné par la note 1. Si le **professeur ne voit rien**, j'améliore de 1 point les notes ci-dessus (60% d'avoir 3, 30% d'avoir 4 et 10% d'avoir 5).

   - Si je décide de travailler, j'ai une **troisième alternative** : travailler 2 heures et travailler 1 heure seulement.

     Si je travaille 2 heures, j'ai le temps de revoir toute la matière et obtiendrai alors la note 4 dans 70% des cas, la note 5 dans 20% des cas et la note 6 dans 10% des cas.
     Si je travaille 1 heure, j'ai une **quatrième alternative** : survoler toute la matière et travailler de manière assidue sur un seul chapitre.

Si je survole toute la matière, j'obtiendrai la note 3.5 dans 70% des cas, 4.5 dans 20% des cas et 5.5 dans 10% des cas.

Si je travaille de manière assidue sur un seul chapitre, j'ai 20% de chance que le professeur m'interroge sur le chapitre étudié et dans ce cas j'obtiens la note 6.En revanche, si le professeur interroge sur l'ensemble de la matière, j'obtiendrai la note 3.5 dans 70% des cas, la note 4.5 dans 20% des cas et la note 5.5 dans 10% des cas.

Travail à effectuer : 1) Etablir l'arbre de décision en y faisant figurer les espérances mathématiques.

2) Donner la stratégie qui sera retenue. Justifier votre réponse.

3.6 L'espérance mathématique et la variance

Comme nous l'avons déjà vu, dans le cas d'une distribution de probabilité, la notion de moyenne pondérée est remplacée par celle d'**espérance mathématique** que l'on note **E(X)**. La formule de l'espérance mathématique est la suivante :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}$$

La **variance**, quant à elle, est une mesure représentant l'ampleur de la déviation par rapport à la moyenne. C'est donc une mesure de **dispersion** analogue à l'écart-type que nous avons étudié en statistique descriptive (variance = (écart-type)^2).

La variance d'une variable aléatoire discrète, que l'on note **Var(X)**, est obtenue en multipliant le carré de chaque écart à la moyenne par la probabilité correspondante, et en faisant la somme de chacun de ces produits :

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i)}$$

3.7 Exercices

1. Reprendre l'exercice 1) du paragraphe 3.5 et calculer la **variance, l'écart-type et le coefficient de variation** de cette distribution de probabilité.

2. Reprendre l'exercice 2) du paragraphe 3.5 et calculer la **variance, l'écart-type et le coefficient de variation** de cette distribution de probabilité.

Réponses des exercices 3.5

1. a) 3/10 b) 5/6 c) 1.2
2. a)

X	300	-60
P(X)	0.3	0.7

   b) 48.-
3. a) Lucerne : 2.1 Bâle : 1 Zürich : 0.5 Ensemble: 3.6
   b)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X)	0.028	0.12	0.116	0.21	0.278	0.072	0.11	0.054	0	0.012

E(X) = 3.6

   c) 0.736 d) 0.048
4. Travailler deux heures car on obtient la meilleure note possible: 4.4

Réponses des exercices 3.7

1. VAR(X) = 0.56 Ecart-type = 0.7483 Coefficient de variation = 62.36%
2. VAR(X) = 27216 Ecart-type = 165.- Coefficient de variation = 343.75%

CHAPITRE 4 LA LOI BINOMIALE

4.1 La loi de Bernoulli

De nombreuses expériences aléatoires sont formées d'une suite d'épreuves identiques et indépendantes, chacune n'ayant que deux **résultats** possibles, les mêmes tout au long de l'expérience. Quand les probabilités des deux résultats possibles sont constantes d'une épreuve à l'autre, la suite d'épreuves est dite de **Bernoulli** en l'honneur de Jakob Bernoulli, mathématicien suisse qui vécut à Bâle de 1654 à 1705 et qui apporta de nombreuses contributions au calcul des probabilités.

Les épreuves de Bernoulli ont une signification importante car elles servent de modèle mathématique pour beaucoup de phénomènes réels. L'étude de la composition, **masculin-féminin**, d'une population homogène se base sur les épreuves de Bernoulli. En fait, le **sexe d'un bébé** à la naissance peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli, le sexe à chaque naissance étant masculin ou féminin ; la probabilité d'une fille ou d'un garçon reste essentiellement constante à chaque naissance (52 % pour un garçon et 48 % pour une fille); et le sexe de l'enfant est indépendant d'une naissance à l'autre.

Dans une chaîne de production, on vérifie la **qualité de production** en choisissant aléatoirement des lots différents. Dans un lot, chaque marchandise inspectée est classifiée comme **« bonne » ou « défectueuse »**. Dans les situations normales, chaque inspection peut être considérée comme une épreuve de Bernoulli car la classification n'a que deux résultats possibles ; la probabilité de trouver une marchandise défectueuse est constante pour les marchandises du même lot et les marchandises inspectées sont indépendantes les unes des autres.

Les deux issues possibles d'une épreuve de Bernoulli portent le nom de **« succès »** et d' **« échec »**.

La variable aléatoire X correspondant au nombre de succès prend alors la valeur **1** si on a un **succès** et **0** si on a un **échec**.

La probabilité associée à x = 1 est notée $\boldsymbol{p}$, celle associée à x = 0 est notée $\boldsymbol{q}$.
Nous avons alors le tableau suivant :

x	1	0	
p(x)	p	q	$\sum = 1$

L'**espérance mathématique** de la loi de Bernoulli est égale à :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p(x_i)$$
$$= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

La **variance** de la loi de Bernoulli est, quant à elle, égale à :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{2} p(x_i)(x_i - E(X))^2 \\ &= p(1-p)^2 + q(0-p)^2 \\ &= p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 \\ &= (1-p)[p(1-p) + (0-p)^2] \\ &= (1-p)(p - p^2 + p^2) \\ &= (1-p)p = qp = pq \end{aligned}$$

4.2 La loi binomiale

La loi binomiale est une succession d'épreuves de Bernoulli répétées indépendamment les unes des autres. On s'intéresse alors au nombre de « succès » ou d' « échecs » qui s'est produit pour n épreuves de Bernoulli. Si l'on note par **A le succès** et par $\overline{A}$ **l'échec**, une suite d'épreuves de Bernoulli peut être par exemple une chaîne du type (avec n = 10)

$$A\overline{A}\overline{A}A\overline{A}AAA\overline{A}A$$

ou si on utilise la notation **0** et **1**

$$1001011101 \quad .$$

Par la condition d'indépendance, cette chaîne, comme d'ailleurs toute autre chaîne constituée de 6 lettres **A** et de 4 lettres $\overline{A}$, a une probabilité de

$$p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p) \cdot p \cdot p \cdot p \cdot (1-p) \cdot p = p^6 \cdot (1-p)^4 \quad .$$

Le nombre de cas possibles pour obtenir 6 lettres A parmi 10 épreuves est le nombre de **combinaisons** possibles de 6 objets parmi 10, soit :

$$C_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = 210$$

La probabilité d'obtenir 6 succès parmi 10 épreuves est donc :

$$P(X = 6) = C_{10}^{6} \cdot p^6 \cdot q^4$$

Dans le cas général, on a la probabilité d'obtenir x succès parmi n épreuves :

$$\boxed{P(X = x) = C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x}} \qquad , \text{x} = 0, 1, 2, \ldots, \text{n}$$

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et l'on note ce fait par $X \rightarrow \mathrm{B}(n, p)$. La loi binomiale $\mathrm{B}(n, p)$ correspond à la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, chacune de paramètre p.
On en déduit que l'**espérance mathématique** de la loi binomiale est égale à :

$$E(X) = np$$

et la **variance** de la loi binomiale est égale à :

$$Var(X) = npq \quad .$$

La loi binomiale est une **distribution discrète** ; on peut donc représenter cette distribution de probabilité par un **diagramme en bâtons**.

4.3 Exercices

1. On lance 10 fois une pièce de monnaie. Soit la variable aléatoire X représentant le nombre de « piles » apparues. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement **8 fois « pile »** ?

2. Pour chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est de 48%. Pour une famille de 6 enfants, déterminer la probabilité d'avoir exactement

   a) 1 garçon
   b) 2 filles
   c) 3 garçons.

3. On prélève au hasard 4 exemplaires dans un lot de pièces fabriquées par une usine. Quelle est la probabilité de trouver moins de 3 pièces défectueuses si la probabilité d'en trouver une est $p = 0.1$ pour tout exemplaire extrait ? Après chaque prélèvement, on remet la pièce dans le lot (pour ne pas modifier la probabilité p).

4. Soit une production en séries d'objets contenant 1/5 d'objets défectueux. Si l'on effectue 15 tirages avec remise, trouver les probabilités :

   a) qu'il n'y ait aucun objet défectueux
   b) qu'il y ait 3 objets défectueux
   c) qu'il y ait moins de 13 objets défectueux.

5. Représenter graphiquement la distribution de probabilité de l'exercice 3.

6. Un agent d'assurances sur la vie vend des polices à des individus de même âge et en bonne santé. D'après une étude actuarielle, la probabilité qu'une personne de cet âge vive encore trente ans est de $\frac{19}{30}$. Calculer la probabilité que les événements suivants se produisent trente ans plus tard.

   a) Sur 8 clients ayant contracté une police, 4 exactement sont vivants.
   b) Au moins 2 clients sur 5 sont vivants.
   c) Combien de clients l'agent devait-il avoir pour être sûr à plus de 99.9 % que l'un d'eux au moins soit vivant ?

7. Le cliché d'un examen radiologique s'avère de qualité suffisante pour poser un diagnostic dans 80% des cas. Pour les 20% des autres cas, le cliché n'est pas lisible ou peut prêter à confusion. Un radiologue réalise ce même examen sur 25 patients ; calculez la probabilité

   a) qu'il soit en mesure de poser un diagnostic pour 20 patients exactement ;
   b) qu'au moins un cliché soit de mauvaise qualité.

8. Un pirate informatique sévissant sur Internet tente de découvrir les mots de passe des abonnés de deux serveurs différents : Evernet et Playonline. Ses méthodes de décryptage et les systèmes de sécurité propres aux deux serveurs lui permettent de percer un mot de passe avec les probabilités de

   - 2% pour un client de Evernet et
   - 4,5% pour un abonné de Playonline.

   a) Le pirate s'attaque à 40 clients de Playonline ; calculer la probabilité qu'il découvre 5 mots de passe exactement.
   b) Quelle chance le pirate a-t-il de décrypter, parmi 50 clients d'Evernet, les mots de passe d'au plus 2 d'entre eux ?
   c) À combien de clients de Playonline le pirate doit-il s'attaquer, s'il veut être sûr à 99% de découvrir au moins un mot de passe ?
   d) Le pirate dispose d'un répertoire de 200 adresses e-mail. Parmi celles-ci, 140 appartiennent à des clients de Playonline, les 60 autres sont celles d'abonnés d'Evernet. Le pirate choisit une adresse au hasard et tente de découvrir son mot de passe. Quelle est la probabilité qu'il y parvienne ?
   e) Dans les mêmes conditions que sous d), le pirate parvient à découvrir le mot de passe du client choisi ; quelle est alors la probabilité que ce dernier soit un abonné de Playonline ?

9. Une entreprise privée spécialisée dans l'acheminement de colis postaux assure les prestations suivantes pour toute livraison dans le monde entier :

   Envoi de **type A** : le colis parvient à son destinataire le lendemain de l'expédition, en moyenne 7 fois sur 10, et le surlendemain en moyenne 3 fois sur 10 ;
   Envoi de **type B** : le colis parvient à son destinataire deux jours après l'expédition, en moyenne 8 fois sur 10 et trois jours plus tard, en moyenne 2 fois sur 10.

a) Une société adresse 15 colis en courrier A à des destinations différentes (et indépendantes) ; calculer la probabilité qu'au moins 13 d'entre eux parviennent à leurs destinataires le lendemain.
b) Si l'on expédie 3 colis de type A et 4 colis de type B, quelle est la probabilité que les 7 colis parviennent tous à leur destinataire le deuxième jour suivant l'expédition ?

10. Utiliser la fonction *LOI.BINOMIALE* d'EXCEL pour vérifier les résultats des exercices 1, 2, 3 et 4.

Réponses des exercices 4.3

1. 0.0439
2. a) 0.0795 b) 0.2526 c) 0.3110
3. 0.9963
4. a) 0.0352 b) 0.2501 c) 0.999999943
6. a) 0.2036 b) 0.9362 c) 7
7. a) 0.1960 b) 0.9962
8. a) 0.0242 b) 0.9216 c) 100 d) 0.0375 e) 0.84
9. a) 0.1268 b) 0.0111

CHAPITRE 5 LA LOI DE POISSON

5.1 Définition

La loi de Poisson, comme la loi binomiale, est une loi de probabilité **discrète**. Elle convient particulièrement bien pour les phénomènes de comptage d'événements situés dans le **temps** ou dans l'**espace**.
S'agissant du temps, on peut citer comme exemples : le nombre de particules émises par une substance radioactive, le nombre d'appels téléphoniques enregistrés par un central, le nombre d'accidents d'un assuré ou encore le nombre d'arrivées à un guichet.
En ce qui concerne l'espace, on peut étudier le nombre de bactéries contenues dans une préparation microscopique, le nombre d'éléphants dans la jungle, etc...
En général, nous pouvons étudier toute distribution de « points » lorsque ces points **se positionnent au hasard** soit dans le temps soit dans l'espace.
Cette loi est due au mathématicien français Siméon-Denis Poisson (1781-1840).

5.2 Aspects mathématiques

La variable aléatoire X correspondant au nombre de phénomènes observés par unité de temps ou d'espace suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, que l'on note $X \rightarrow P(\lambda)$, si sa fonction de probabilité est :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

où λ représente le **nombre moyen** d'événements par unité de temps ou d'espace et k le nombre d'événements attendu.

L'**espérance mathématique** de la loi de Poisson est par définition égale à λ. De même, la variance est aussi égale à λ.

5.3 Exemple

Si le **nombre moyen** d'arrivées de clients à un guichet est égal à **1.9 par minute**, calculons la probabilité d'observer **5 arrivées** dans une minute donnée, supposant que les arrivées sont indépendantes les unes des autres.
Dans cet exemple, la valeur de λ est égale à 1.9 et la valeur de k est égale à 5. Nous avons donc :

$$P(X = 5) = \frac{e^{-1.9} \cdot 1.9^{5}}{5!} = 0.0309$$

La probabilité de voir arriver 5 clients au guichet dans une minute donnée est donc de 3.09 %.

5.4 Représentation graphique

Comme la loi de Poisson est une distribution discrète, on peut représenter cette distribution de probabilité par un **diagramme en bâtons**.

5.5 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Pour une loi binomiale donnée, on peut démontrer que lorsque p est faible et n grand ($n \geq 50$), la loi de Poisson constitue une bonne approximation de cette loi. On prend alors pour paramètre de la loi de Poisson l'espérance mathématique de la loi binomiale.

Exemple : Considérons une urne contenant 50 boules dont 49 sont noires et 1 blanche. On tire 100 boules (tirage avec remise) et on s'intéresse au nombre de boules blanches apparues.
Nous avons donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0.02$.
Calculons la probabilité d'avoir 4 boules blanches :

$$P(X=4) = C_{100}^{4}\, 0.02^{4}\, 0.98^{96} = 0.0902$$

Utilisons maintenant l'approximation par la loi de Poisson. La valeur de λ est égale à $np = 100 \cdot 0.02 = 2$. Nous avons donc :

$$P(X=4) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{4}}{4!} = 0.0902.$$

5.6 Exercices

1. Une secrétaire fait en moyenne deux fautes par page.

a) Quelle est la probabilité qu'il y ait trois fautes sur une page ?
b) Représenter graphiquement cette distribution.

2. Un central téléphonique reçoit en moyenne 4 appels dans la minute. Quelle est la probabilité des événements suivants dans la minute ?

a) aucun appel
b) 0 ou 1 appel
c) plus de 5 appels
d) entre 2 et 6 appels (2 et 6 compris)

3. Au cours d'une période de la seconde guerre mondiale, on a noté les points de chute des bombes dans une région au sud de Londres. La surface était divisée en 576 carrés de ¼ de miles^2 (surface) et on a observé les comptages suivants :

Nb de chutes	0	1	2	3	4	≥ 5
Nb de carrés atteints	229	211	93	35	7	1

a) Quel est le nombre moyen de chutes observé ?
b) Comparer les fréquences observées avec les probabilités d'une loi de Poisson de même moyenne.

4. Le service d'urgence d'un grand hôpital accueille, durant le week-end, en moyenne 2,4 patients par heure. Calculer la probabilité que, durant une heure particulière, ce service d'urgence

a) n'accueille aucun patient
b) accueille quatre patients exactement
c) accueille au moins trois patients.

5. Dans une clinique privée, 2 % des patients admis n'ont pas une assurance suffisante. Calculer la probabilité que, sur 200 patients admis, exactement 5 patients n'aient pas une assurance suffisante.

6. Une compagnie d'aviation sait que la probabilité qu'un de ses passagers connaisse des problèmes de circulation sanguine (thrombose), à la suite d'un vol de longue durée, est évaluée à environ 25/100'000.

Au cours d'un mois, cette compagnie transporte 11'000 passagers dans ses vols longs courriers. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) Trois passagers exactement sont victimes de thrombose.
b) Aucun passager ne connaît de problème de circulation sanguine.

L'année suivante, cette compagnie établit une statistique. Il en ressort que le nombre moyen mensuel de passagers connaissant ce problème spécifique est de 1,5.

c) Quel est alors le nombre de passagers transportés par cette compagnie en un mois ?

7. Aux premières heures de l'après-midi, en moyenne 4,5 visiteurs se présentent par minute à un guichet d'entrée d'un musée.

Calculer la probabilité qu'au cours d'une minute particulière

a) 3 visiteurs
b) au plus 2 visiteurs

se présentent à ce même guichet.

8. Des relevés effectués sur un grand axe routier démontrent, qu'en moyenne, 3.5 camions pénètrent chaque minute dans un certain tunnel à risques. Calculez la probabilité que, durant une minute particulière

a) aucun camion ne pénètre dans le tunnel ;
b) sept camions exactement pénètrent dans le tunnel ;
c) au moins trois camions pénètrent dans le tunnel.

9. Utiliser la fonction *LOI.POISSON* d'EXCEL pour vérifier les résultats des exercices 1a, 2, 4 et 7.

Réponses des exercices 5.6

1. a) 0.1804 2. a) 0.0183 b) 0.0916 c) 0.2148 d) 0.7978
3. a) 0.9288 b) 0.3950 avec 0.3976, 0.3669 avec 0.3663, 0.1704 avec 0.1615
   0.0528 avec 0.0608, 0.0122 avec 0.0122, 0.0023 avec 0.0017
4. a) 0.0907 b) 0.1254 c) 0.4303 5. 0.1563 6. a) 0.2216 b) 0.0639 c) 6000
7. a) 0.1687 b) 0.1736 8. a) 0.0302 b) 0.0385 c) 0.6791

CHAPITRE 6 LA LOI NORMALE

6.1 Définition

La **loi normale** encore appelée **loi de Gauss** ou loi de Laplace-Gauss (du nom de ses fondateurs) est la loi statistique la plus utilisée.
Beaucoup de mesures, telles que la taille ou le poids d'individus, le diamètre d'une pièce de machine, les résultats à un test du QI suivent approximativement une loi normale.
La loi normale s'applique à des variables aléatoires **continues** pouvant prendre toutes les valeurs réelles possibles entre $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc une loi continue.
Elle est entièrement définie par deux paramètres, la **moyenne** μ **et la variance** σ^2. Nous dirons qu'une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 et nous noterons ce fait par $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$.
La fonction de densité qui définit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ a pour expression

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < X < +\infty$$

avec μ la **moyenne** de la distribution, σ son **écart-type** et e la base des logarithmes népériens ($e = 2.718...$).

6.2 La loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, la variable $t = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $N(0,1)$, appelée **loi normale standard** ou **loi normale centrée réduite**.
La loi normale centrée réduite correspond à la loi normale avec les paramètres $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Sa fonction de densité est donc :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{t^2}{2}} \quad , -\infty < t < +\infty$$

Ce cas particulier de la loi normale est très pratique car il existe des tables qui nous fournissent les valeurs de la surface située sous la courbe centrée réduite jusqu'à une valeur donnée de la variable.

6.3 Exemple

Le poids des sacs de farine suit une loi normale de moyenne 50 kg et de variance 4.
L'entreprise emballe 60'000 sacs par mois.

1. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 51 kg ?
   On calcule $t = \frac{51-50}{2} = 0.5$.
   P(X<51) = P(t<0.5) = 0.6915.
   On peut aussi associer fréquence et probabilité et dire qu'il y a 0.6915 × 60'000 = 41'490 sacs qui ont un poids inférieur à 51 kg.

2. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 51 kg ?
   On cherche P(X>51) qui est égale à 1 - P(X<51).
   Donc on a 1 – 0.6915 = 0.3085.

3. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse moins de 48 kg ?
   On calcule $t = \frac{48-50}{2} = -1$.
   Comme la table ne fournit pas les probabilités pour les valeurs négatives de t, nous devons procéder par symétrie.
   P(X<48) = P(t<-1) = 1- P(t<1) = 1 – 0.8413 = 0.1587.

4. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 48 kg ?
   Par symétrie, nous obtenons :
   P(X>48) = P(t>-1) = 1 – P(t<-1) = 1- [1 – P(t<1)] = P(t<1) = 0.8413.

Considérons maintenant le cas où nous avons deux bornes.

1. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse entre 51 et 52 kg ?
   Nous devons calculer deux valeurs de t : t_1 et t_2 .
   $t_1 = \frac{51-50}{2} = 0.5 \quad t_2 = \frac{52-50}{2} = 1$
   P(51<X<52) = P(0.5<t<1) = F(1) – F(0.5) = 0.8413 – 0.6915 = 0.1498.

2. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse entre 48 et 49 kg ?
   $t_1 = \frac{48-50}{2} = -1 \quad t_2 = \frac{49-50}{2} = -0.5$.
   P(48<X<49) = P(-1<t<-0.5) = P(0.5<t<1) = F(1) – F(0.5) = 0.8413 – 0.6915 = 0.1498.

3. Quelle est la probabilité qu'un sac pèse entre 49 et 52 kg ?
   $t_1 = \frac{49-50}{2} = -0.5 \quad t_2 = \frac{52-50}{2} = 1$.
   P(49<X<52) = P(-0.5<t<1) = F(1) – F(-0.5) = F(1) – [1 – F(0.5)] = 0.8413 –[1 – 0.6915] = 0.8413 – 0.3085 = 0.5328.

Nous pouvons aussi envisager le problème dans l'autre sens, c'est-à-dire qu'on donne la probabilité et qu'il faut chercher le poids.

1. Quel est le poids au-dessus duquel on trouve 12'000 sacs ?
   On cherche déjà la probabilité : 12000/60000 = 0.2.

Nous avons donc $P(t<t_0) = 0.8$. Dans la table, nous cherchons la valeur la plus proche de 0.8, à savoir 0.7995. Elle correspond à t = 0.84. Nous revenons alors sur la valeur de X en utilisant la formule du changement de variable :
$X = t \times \sigma + \mu = 0.84 \times 2 + 50 = 51.68$ kg.

2. Quel est le poids au-dessus duquel on trouve 45'000 sacs ?
   P = 45000/60000 = 0.75. Une considération de symétrie nous fournit $P(t<t_0') = 0.75$. Dans la table, la valeur la plus proche est celle de 0.7486 qui correspond à $t_0' = 0.67$. La valeur de t_0, symétrique de 0.67 est donc égale à -0.67.
   $X = -0.67 \times 2 + 50 = 48.66$ kg.

6.4 Intervalles remarquables

Il est intéressant de connaître la probabilité qu'a une variable aléatoire X d'être comprise dans un intervalle faisant intervenir la moyenne et l'écart-type de la loi normale. On va démontrer comment on obtient les probabilités des trois intervalles autour de la moyenne, à savoir $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ et $\mu \pm 3\sigma$. Nous allons faire la démonstration pour le premier intervalle. Il faut donc calculer les deux valeurs de t :

$$t_1 = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1 .$$

Nous avons alors $P(-1<t<1) = F(1) - F(-1) = F(1) - [1 - F(1)] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826$.
La même démonstration donnerait une probabilité de 0.9544 pour le deuxième intervalle ainsi que 0.9973 pour le troisième intervalle. Dans la pratique, les probabilités de ces trois intervalles sont simplifiées en 68%, 95% et 99%.

6.5 Exercices

1. Soit $X \rightarrow N(10,4)$. Calculer :

a) $P(X < 11)$
b) $P(8 < X < 12)$
c) $P(X > 6)$
d) $P(X < 10)$
e) X_0 tel que $P(X < X_0) = 0.9505$

2. En raison de divers aléas, le poids d'une boîte de fromage n'est pas toujours exactement égal au poids indiqué sur la boîte. Le poids X des boîtes de fromage de marque Salembert suit une loi normale de moyenne $\mu = 100$ gr. et d'écart-type $\sigma = 4$ gr. Calculer la probabilité qu'une boîte ait un poids situé entre 90 et 110 gr., soit $P(90 < X < 110)$.

3. A) La distribution des longueurs des pièces fabriquées par une machine est normale avec une moyenne de 11.5 mm et un écart-type de 0.2 mm. Si cette machine produit 10'000 pièces par semaine, combien de pièces mesurent :

a) entre 11.6 et 11.9 mm ?
b) moins de 11.2 mm ?
c) plus de 11.4 mm ?
d) entre 11.3 et 11.8 mm ?
e) entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$?

B) Déterminer les limites de l'intervalle, de centre μ, qui comprend la longueur d'une pièce choisie au hasard avec une probabilité de

a) 0.90
b) 0.95
c) 0.99 .

4. Pour un examen auquel ont été soumis de nombreux candidats, on a trouvé une moyenne des points de 62.0 et un écart-type de 8.4. En supposant que la distribution des points est normale,
a) quel nombre de points limite doit-on choisir pour n'admettre que 60 % des candidats ?
b) quel nombre de points correspond au percentile 95 ?

5. Une machine remplit des sachets de poudre dont le poids a une distribution normale de moyenne μ qui dépend du réglage de la machine et d'écart-type toujours égal à 1.5 gr. Sur quelle moyenne μ doit-on régler la machine si l'on veut une probabilité de 0.05 d'avoir un sachet de moins de 97 gr. ?

6. Un élève a passé deux épreuves, l'une en français, l'autre en allemand. En français, il a obtenu 84 points sur 100, la moyenne de l'épreuve était de 71 et l'écart-type de 10. En allemand, il a obtenu 117 points sur 150, la moyenne de l'épreuve était de 104 et l'écart-type de 19.

a) Dans quelle discipline l'élève est-il le plus à son aise?
b) Quel aurait dû être son résultat en allemand pour égaler sa réussite en français?

7. A la gare d'une ville de suisse romande, on a étudié les courses des taxis. On a relevé la durée de leur absence dans la file d'attente de la gare. On considère que la durée du transport (aller-retour) d'un taxi suit une distribution normale. La moyenne et l'écart-type de cette distribution sont respectivement 28.4 et 4.54 minutes. Utiliser ces paramètres pour répondre aux questions suivantes:

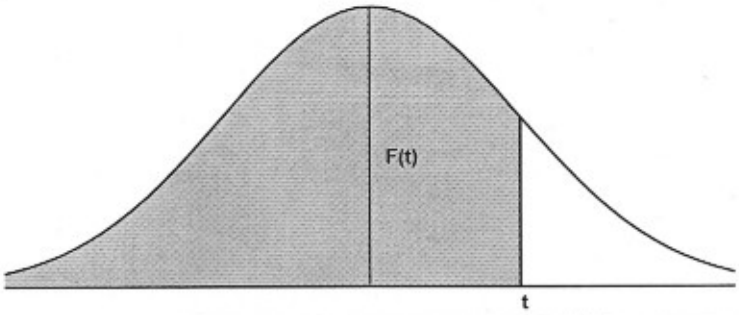
a) quelle est la probabilité qu'un taxi soit absent pour une durée supérieure à 30 minutes?
b) quelle est la probabilité qu'un taxi soit absent pour une durée inférieure à 30 minutes?
c) quelle est la probabilité qu'un taxi soit absent pour une durée supérieure à 20 minutes et inférieure à 30 minutes?
d) quel intervalle de temps autour de la moyenne faut-il fixer afin qu'il contienne le 80% des courses?

Réponses des exercices 6.5

1. a) 0.6915 b) 0.6826 c) 0.9772 d) 0.5 e) 13.3
2. 0.9876 3. A. a) 2857 b) 668 c) 6915 d) 7745 e) 9544 B. a) 11.17;11.83 b) 11.11;11.89 c) 10.985;12.015
4. a) 59.9 b) 75.82 5. 99.47 6. a) en français b) 128.7
7. a) 0.3632 b) 0.6368 c) 0.6046 d) 22.59 ;34.21

ANNEXE 1

Table de la loi normale



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8254	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9779	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de t :

t	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4	4.5
	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

Source : « Statistique », Dodge, Mehran et Rousson, PAN, 1990.