Exercices de préparation à l'examen de Statistiques 2 de janvier 2017

Problème 1

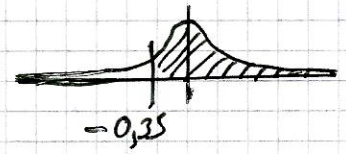
On va utiliser la loi normale.

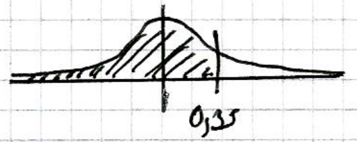
Notons X le salaire mensuel d'une personne.

On a $\mu = 5250$ et $\sigma = 680$.

Comme X suit une loi normale, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite.

a) $P(X > 5012) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{5012-5250}{680}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > -0{,}35\right) =$

$\approx$ 

$=$ 

$\cong 0{,}6368$ en utilisant une table de la loi normale centrée réduite.

Par conséquent, le nombre de salariés avec un salaire mensuel supérieur à 5012 est nb de salariés du groupe $\cdot\, P(X > 5012) = 30'000 \cdot 0{,}6368 = \underline{\underline{19'104}}$.

b) $P(X < 6474) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{6474-5250}{680}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < 1{,}8\right) = 0{,}9641$.

Ainsi, le nombre de salariés avec un salaire mensuel inférieur à 6474 est $30'000 \cdot 0{,}9641 = \underline{\underline{28'923}}$.

c) On sait que le nb de salariés avec salaire inférieur à celui de Mme Jones est 23'730. Notons k le salaire de Mme Jones.

On a alors $30'000 \cdot P(X < k) = 23'730 \rightarrow P(X < k) = 0{,}791$

$\rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-5250}{680}\right) = 0{,}791 \rightarrow \frac{k-5250}{680} = 0{,}81$

$\rightarrow k = 5800{,}8$.

Le salaire de Mme Jones est donc de $\underline{\underline{5800{,}80}}$.

Problème 2

Dans ce genre de problème où on a 2 paires de catégories enchevêtrées, il est utile de construire un tableau et de le remplir petit à petit. On peut ensuite facilement répondre aux questions.

	billet PN	billet L	Total
billet gagnant	① 0,03	② 0,032	③ 0,062
billet pas gagnant	④ 0,57	⑤ 0,368	⑥ 0,938
Total	⑦ 0,6	⑧ 0,4	⑨ 1

Comme on va mettre les probabilités dans ce tableau, la case ⑨, qui correspond au total, contient 1.
Il y a 60% de billet PN → 0,6 dans la case 7.
On a ⑧ = ⑨ − ⑦ = 1 − 0,6 = 0,4.

5% des billets PN sont gagnants → cela signifie que, si on a un billet PN, il y a une probabilités de 5% qu'il soit gagnant :
C'est une probabilité conditionnelle et on a : $p(\text{gagnant} \mid PN) = \dfrac{p(\text{gagnant et } PN)}{p(PN)}$

$\rightarrow 0{,}05 = \dfrac{①}{0{,}6} \rightarrow ① = 0{,}05 \cdot 0{,}6 = 0{,}03$

Similairement : $p(\text{gagnant} \mid L) = \dfrac{p(\text{gagnant et } L)}{p(L)} \rightarrow 0{,}08 = \dfrac{②}{0{,}4}$

$\rightarrow ② = 0{,}08 \cdot 0{,}4 = 0{,}032.$

On a alors ③ = ① + ② = 0,03 + 0,032 = 0,062,
④ = ⑦ − ① = 0,6 − 0,03 = 0,57,
⑤ = ⑧ − ② = 0,4 − 0,032 − 0,358,
⑥ = ⑨ − ③ = 1 − 0,062 = 0,938.

On vérifie qu'on a bien ④ + ⑤ = ⑥

a) $p(\text{gagnants}) = ③ = \underline{\underline{0{,}062}}.$

b) $p(PN \mid \text{gagnant}) = \dfrac{p(PN \text{ et gagnant})}{p(\text{gagnant})} = \dfrac{①}{③} = \dfrac{0{,}03}{0{,}062} = \underline{\underline{0{,}4839}}.$

<u>Problème 3</u>

Comme on choisit une partie des éléments parmi le total, on a une <u>loi binomiale</u>.
Notons X le nombre de clients qui quittent.

a) $P(X=7) = C_7^{55} \cdot 0{,}19^7 \cdot (1-0{,}19)^{55-7} = \underline{\underline{0{,}0734}}.$

b) Notons n le nombre de clients considérés. On veut $P(X \geq 1) \geq 99{,}9\%$

$\rightarrow 1 - P(X=0) \geq 0{,}999 \rightarrow 1 - (1-0{,}19)^n \geq 0{,}999$

$\rightarrow -(1-0{,}19)^n \geq -0{,}001 \rightarrow (1-0{,}19)^n \leq 0{,}001$

$\rightarrow 0{,}81^n \leq 0{,}001 \rightarrow \log(0{,}81^n) \leq \log(0{,}001)$

$\rightarrow n\log(0{,}81) \leq \log(0{,}001) \rightarrow n \geqslant \dfrac{\log(0{,}001)}{\log(0{,}81)}$ $(\log(0{,}81) < 0)$

$\rightarrow n \geqslant 32{,}78$

$\rightarrow$ A partir de <u>33 clients.</u>

<u>Problème 4</u>

Comme on choisit une partie des éléments parmi le total, on peut utiliser la <u>loi binomiale.</u>
Mais, comme le nb total d'éléments est grand, on peut utiliser la <u>loi de Poisson.</u>

<u>Avec la loi binomiale:</u>

Notons X le nombre d'enfants malades.

a) $P(X=3) = C_3^{1'000'000} \cdot \left(\dfrac{1}{400'000}\right)^3 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{400'000}\right)^{1'000'000-3} = \underline{\underline{0{,}2138.}}$

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$= C_0^{1'000'000}\left(\dfrac{1}{400'000}\right)^0 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{400'000}\right)^{1'000'000} +$

$+ C_1^{1'000'000}\left(\dfrac{1}{400'000}\right)^1 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{400'000}\right)^{1'000'000-1} +$

$+ C_2^{1'000'000}\left(\dfrac{1}{400'000}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{400'000}\right)^{1'000'000-2} =$

$= 0{,}082045 + 0{,}205112 + 0{,}256516 = \underline{\underline{0{,}5438.}}$

<u>Avec la loi de Poisson:</u>

Ici, on a $P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ où λ est le nombre moyen de malades dans le total des nouveaux-nés. On a $\lambda = \dfrac{1}{400'000} \cdot 1'000'000 = 2{,}5.$

a) $P(X=3) = \dfrac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^3}{3!} = \underline{\underline{0{,}2138.}}$

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$

$= \dfrac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^0}{0!} + \dfrac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^1}{1!} + \dfrac{e^{-2{,}5} \cdot 2{,}5^2}{2!} = 0{,}082085 + 0{,}2052125 + 0{,}2565156$

$= \underline{\underline{0{,}5438.}}$

<u>Problème 5</u>

Comme on a 2 catégories (hommes et femmes) et qu'on choisit des éléments dans chaque catégorie, on va devoir utiliser la <u>définition de la probabilité</u>:

$$\text{prob}(A) = \frac{\text{nb de cas favorables à A}}{\text{nb de cas possibles}}.$$

Dans cet exercice, l'ordre ne compte pas. On aura donc des combinaisons.

a) p (4 femmes exactement réussissent) =

= p (4 femmes sur 23 réussissent et 3 hommes sur 20 réussissent) =

$$= \frac{C_4^{23} \cdot C_3^{20}}{C_7^{43}} = \underline{\underline{0,1133.}}$$

b) p (au moins 1 homme est retenu) = 1 − p (zéro homme retenu) =

$$= 1 - p\,(7 \text{ femmes réussissent}) = 1 - \frac{C_7^{23}}{C_7^{43}} = 1 - 0,0076 = \underline{\underline{0,9924.}}$$