Exercices de préparation à l'examen de Stat 2 de juin 2017

Problème 1

Comme on a plusieurs catégories (Européens, Américains, Asiatiques et Sud-africains) et qu'on choisit des éléments dans plusieurs catégories, on va devoir utiliser la définition de la probabilité : $\text{prob}(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorables à } A}{\text{nb de cas possibles}}$.

a) Ici l'ordre ne compte pas. On utilise donc des combinaisons.

prob (4 Européens, 2 Américains et 1 Asiatique participe) =
= prob (4 Européens sur 8, 2 Américains sur 2, 1 Asiatique sur 3 et 0 Sud-africain sur 2) $= \dfrac{C_4^8 \cdot C_2^2 \cdot C_1^3 \cdot C_0^2}{C_{4+2+1}^{8+2+3+2}} = \underline{\underline{0,0326}}$.

b) Ici l'ordre compte. On doit avoir, dans l'ordre,

Asiatique – Asiatique – Européen – Européen

3 choix sur 15 personnes

2 choix sur 14 personnes (1 Asiatique est déjà en 1e place et il reste 14 personnes)

8 choix sur 13 personnes restantes

7 choix sur 12 personnes restantes

Ainsi, la probabilité cherchée est $\dfrac{3}{15} \cdot \dfrac{2}{14} \cdot \dfrac{8}{13} \cdot \dfrac{7}{12} = \underline{\underline{0,0103}}$.

Problème 2

Comme on choisit une partie des éléments sur le total, on a une loi binomiale.
Notons X le nombre d'observations de requins-marteaux.

a) On a $p(X=3) = C_3^{10} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{10-3}$ où p est la probabilité d'observer un requin-marteau sur une plongée. Comme $p = \dfrac{1}{5}$, on a
$p(X=3) = C_3^{10} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(1-\dfrac{1}{5}\right)^7 = \underline{\underline{0,2013}}$.

b) Notons n le nombre de plongées nécessaires. On a :
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \left(1-\dfrac{1}{5}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

On a alors $P(X \geq 1) \geq 95\% \longrightarrow$

$$1-\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}95 \qquad \Big|\ -1$$
$$-\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq -0{,}05 \qquad \Big|\ \cdot(-1)$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0{,}05 \qquad \Big|\ \log(\ldots)$$
$$\log\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \log(0{,}05) \qquad \Big|\ \log(a^n) = n\log(a)$$
$$n\log\left(\frac{4}{5}\right) \leq \log(0{,}05) \qquad \Big|\ : \log\left(\frac{4}{5}\right) \quad \left(\log\left(\frac{4}{5}\right) < 0\right)$$
$$n \geq \frac{\log(0{,}05)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}$$
$$\Longrightarrow n \geq 13{,}43.$$

Il faut donc <u>14 plongées.</u>

<u>Problème 3</u>

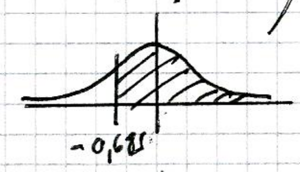
On va utiliser ici la <u>loi normale.</u>

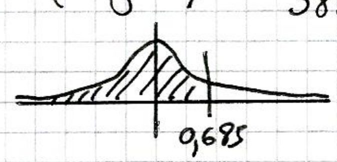
Notons X le nombre d'euros dépensés par un client en une semaine.

On a $\mu = 2400$ et $\sigma = 585$.

Comme X suit une loi normale, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite.

a) On a $P(X > 2000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{2000-2400}{585}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > -0{,}685\right)$

$=$ 

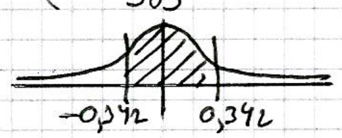
$=$ 

$\simeq 0{,}7525$ en utilisant une table de la loi normale centrée réduite.

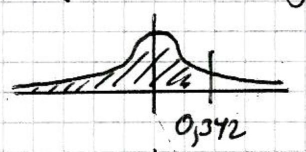
Par conséquent, le nombre de ceux qui ont dépensé plus de 2000 euros est

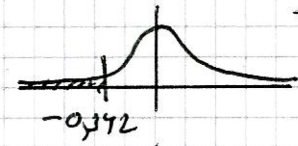
nb de personnes $\cdot\ P(X > 2000) = 1800 \cdot 0{,}7525 = \underline{1355.}$

b) Ici, on a $P(2200 < X < 2600) = P\left(\frac{2200-2400}{585} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2600-2400}{585}\right) =$

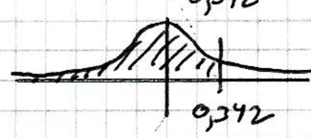
$= P\left(-0{,}342 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 0{,}342\right) =$ 

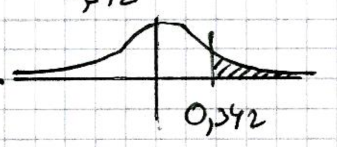
$=$

$=$ 

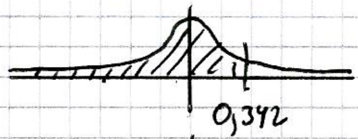
$-$ 

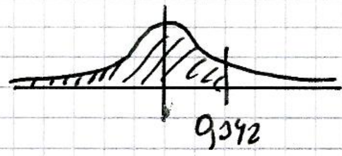
$=$

$=$ 

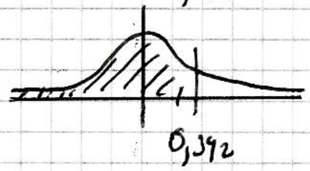
$-$ 

$=$

$=$ 

$- \Big(1 -$ 

$\Big)$

$= 2 \cdot$ 

$-1 = 2 \cdot 0{,}634 - 1 = 0{,}268.$

Ainsi, le nombre de ceux qui ont dépensé entre 2200 et 2600 euros est

nb de personnes $\cdot\ P(2200 < X < 2600) = 1800 \cdot 0{,}268 = \underline{\underline{482}}.$

Problème 4

Comme on choisit une partie des éléments pour le total, on peut utiliser la loi binomiale. Mais, comme le nb total d'éléments est grand, on peut aussi utiliser la loi de Poisson.

Avec la loi binomiale:

Notons X le nombre d'accidents.

On a $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$.

On a $P(X=k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ où $n = 1200$, $p = 3\% = 0{,}003$ et

$1 - p = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$.

Ainsi $P(X \geqslant 3) = 1 - C_0^{1200} \cdot 0{,}003^0 \cdot 0{,}997^{1200} - C_1^{1200} \cdot 0{,}003^1 \cdot 0{,}997^{999} - C_2^{1200} \cdot 0{,}003^2 \cdot 0{,}997^{998}$

$= 1 - 0{,}0272 - 0{,}0981 - 0{,}177 = \underline{\underline{0{,}6977}}.$

Avec la loi de Poisson:

Ici, on a $P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ où λ est le nb moyen d'accident.

On a $\lambda = 0{,}3\%$ de $1200 = 0{,}003 \cdot 1200 = 3{,}6$.

Ainsi $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$

$= 1 - \dfrac{e^{-3,6} \cdot 3{,}6^0}{0!} - \dfrac{e^{-3,6} \cdot 3{,}6^1}{1!} - \dfrac{e^{-3,6} \cdot 3{,}6^2}{2!}$

$= 1 - 0{,}0273 - 0{,}0984 - 0{,}177 = \underline{\underline{0{,}6972}}.$

Problème 5

Dans ce genre de problème où on a 2 paires de catégories enchevêtrées, il est utile de construire un tableau et de le remplir petit à petit. On peut ensuite facilement répondre aux questions.

	hommes	femmes	total
incident	① 0,06	② 0,02	③ 0,08
pas d'incident	④ 0,64	⑤ 0,28	⑥ 0,92
total	⑦ 0,7	⑧ 0,3	⑨ 1

Comme on va mettre les probabilités dans ce tableau, la case ⑨, qui correspond au total, contient 1.
Il y a 70% d'hommes au total → 0,7 dans la case ⑦.
30% de femmes → 0,3 dans la case ⑧.
8% d'incident au total → 0,08 dans la case ③.

On sait que 3 fois sur 4, un incident est le fait d'un homme. On en conclut que, si on a un incident, alors la probabilité que ce soit un homme est $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

En utilisant la formule de probabilité conditionnelle, on a alors

$$p(\text{homme} \mid \text{incident}) = \frac{p(\text{homme et incident})}{p(\text{incident})} \longrightarrow 0{,}75 = \frac{①}{0{,}08}$$

$$\rightarrow ① = 0{,}75 \cdot 0{,}08 = 0{,}06.$$

Puis, facilement,

$$② = ③ - ① = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02,$$
$$④ = ⑦ - ① = 0{,}7 - 0{,}06 = 0{,}64,$$
$$⑤ = ⑧ - ② = 0{,}3 - 0{,}02 = 0{,}28,$$
$$⑥ = ⑨ - ③ = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

On vérifie qu'on a bien ④ + ⑤ = ⑥

On peut maintenant calculer la probabilité que, lors d'une plongée sans incident, le plongeur soit une femme :

$$p(\text{femme} \mid \text{sans incident}) = \frac{p(\text{femme et sans incident})}{p(\text{sans incident})} = \frac{⑤}{⑥} = \frac{0{,}28}{0{,}92}$$

$$= \underline{\underline{0{,}3043.}}$$