Statistique inférentielle

Sommaire

Notations

De manière générale, on note :

- μ = la moyenne de la population considérée
- σ = l'écart-type de la population considérée
- $\bar{x}$ = la moyenne de l'échantillon considéré de taille *n*
- s = l'écart-type de l'échantillon considéré de taille *n*
- π = la proportion possédant un certain caractère au sein d'une population
- p = la proportion possédant un certain caractère au sein d'un échantillon

Elaboré par Roland Vuille – Décembre 2017 – Révision en décembre 2018

Intervalle de confiance d'une moyenne

L'intervalle de confiance de niveau 1 – α d'une moyenne est :

$$[\ \bar{x} - t \cdot \sigma_x\ ;\ \bar{x} + t \cdot \sigma_x\ ]$$

où σ_x est l'écart-type de la distribution d'échantillonnage :

$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ si σ est connu

$\sigma_x = \frac{s}{\sqrt{n}}$ si σ est inconnu

et **t** est la valeur de la variable normale centrée réduite qui dépend du niveau de confiance **1 – α** : pour la calculer, on commence par calculer **α** et **A** = $\frac{\alpha}{2}$; puis on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau ci-dessous :

A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
t =	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

Exemple :

Pour déterminer l'âge moyen de ses clients, une grande entreprise de confection masculine prélève un échantillon aléatoire de 50 clients et trouve $\bar{x}$ = 36. Si l'on connaît σ = 12 :

a) Trouver un intervalle de confiance à 95% pour l'âge moyen de l'ensemble des clients
b) Supposer que pour le même niveau de confiance, on veuille réduire l'amplitude de l'intervalle de 4 années. Quelle doit être alors la taille de l'échantillon ?

Résolution :

a) On a : $\bar{x}$ = 36 ;

σ = 12 et n = 50 → $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{50}}$ = 1,697 ;

1 - α = 95% = 0,95 → α = 0,05 → A = $\frac{\alpha}{2}$ = 0,025 ;

on cherche A à l'intérieur du tableau et on lit le t qui correspond : t = 1,96.

Ainsi : $\bar{x} - t \cdot \sigma_x$ = 36 – 1,96 · 1,697 = 32,674 et

$\bar{x} + t \cdot \sigma_x$ = 36 + 1,96 · 1,697 = 39,326.

L'intervalle de confiance à 95% est donc **[32,674 ; 39,326]**.

b) On cherche maintenant n pour que l'intervalle de confiance à 95% soit maintenant [32,674 +2 ; 39,326 – 2] = [34,674 ; 37,326].

On doit alors avoir $\bar{x} - t \cdot \sigma_x$ = 34,674 et $\bar{x} + t \cdot \sigma_x$ = 37,326.

Comme $\bar{x}$ = 36, on doit donc avoir $t \cdot \sigma_x$ = 37,326 - 36 = 1,326 (ou 36 – 34,674 = 1,326).

Comme t = 1,96 (puisque le niveau de confiance est que le même que ci-dessus) et $\sigma_x = \frac{12}{\sqrt{n}}$,

on obtient $1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} = 1{,}326$, d'où $\sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 12}{1{,}326} = 17{,}74$ et, donc, $n = 17{,}74^2 = 314{,}6$.

Par conséquent, la taille de l'échantillon doit alors être de **315**.

Intervalle de confiance d'un pourcentage ou d'une proportion

L'intervalle de confiance de niveau 1 – α d'un pourcentage ou d'une proportion est :

$$\left[\, p - t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \;;\; p + t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,\right]$$

où **p** est la proportion de l'échantillon de taille *n* qui possède le caractère étudié
et **t** est la valeur de la variable normale centrée réduite qui dépend du niveau de confiance **1 – α** : pour la calculer, on commence par calculer **α** et **A =** $\frac{\alpha}{2}$; puis on lit la **valeur de** t correspondante dans le tableau ci-dessous :

A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
t =	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

Exemple :

Selon un sondage concernant la popularité de Monsieur X, 160 personnes sur un échantillon de 200 ne l'apprécient pas.

a) Construire un intervalle de confiance à 95% pour la proportion des personnes n'appréciant pas Monsieur X.

b) Si l'on construit un autre intervalle de confiance basé sur le même sondage et que cet intervalle est [0,75347 ; 0,84653], à quel niveau de confiance a-t-il été construit ?

Résolution :

a) On a : $p = \frac{160}{200} = 0{,}8$ et n = 200 ;

$1 - \alpha = 95\% = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow A = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$;

on cherche A à l'intérieur du tableau et on lit le t qui correspond : t = 1,96.

Ainsi : $p - t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}8 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}} = 0{,}745$ et

$p + t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}} = 0{,}855$.

L'intervalle de confiance à 95% est donc **[0,745 ; 0,855]**.

b) On cherche maintenant le niveau de confiance 1 – α.

On doit avoir : $p - t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}8 - t \cdot \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}} = 0{,}75347$ et

$p + t \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}8 + t \cdot \sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{200}} = 0{,}84653$,

c'est-à-dire 0,8 – 00283 · t = 0,75347 et 0,8 + 00283 · t = 0,84653.

On doit donc avoir $t = \frac{0{,}8-0{,}75437}{0{,}00283} = 1{,}645$ (ou $t = \frac{0{,}84653-0{,}8}{0{,}00283} = 1{,}645$).

Avec le tableau ci-dessus, on cherche t = 1,645 la valeur de A qui correspond : A = 0,05.

Comme $A = \frac{\alpha}{2}$, on obtient $0{,}05 = \frac{\alpha}{2}$, d'où α = 0,1.

Ainsi le niveau de confiance était de 1 – α = 1 – 0,1 = 0,9 = **90%**.

Tests d’hypothèses - Généralités

Dans de nombreuses études statistiques, nous sommes amenés à fixer une valeur préalable d’une caractéristique de la population et à confirmer ou infirmer cette valeur à l’aide des résultats obtenus à partir d’un échantillon.
La démarche à suivre pour effectuer un test d’hypothèse, à partir d’un échantillon, comprend en général les étapes suivantes :

1) **Formuler les hypothèses :** Deux hypothèses doivent être posées, à savoir l’hypothèse nulle et l’hypothèse alternative.
   L’**hypothèse nulle** correspond à la valeur présumée du paramètre (caractéristique de la population) présumé. On écrit :
   $$H_0 : \theta = \theta_0 = \text{valeur présumée}$$
   L’**hypothèse alternative** peut prendre trois formes possibles en fonction du problème à traiter :
   $$H_a : \theta > \theta_0 \quad \text{(test unilatéral à droite)}$$
   $$H_a : \theta < \theta_0 \quad \text{(test unilatéral à gauche)}$$
   $$H_a : \theta \neq \theta_0 \quad \text{(test bilatéral)}$$
   Le problème est de savoir si l’hypothèse H_0 est réalisée ou non. On va donc tester l’hypothèse nulle H_0 contre l’hypothèse alternative H_a.
2) En fonction d’un **seuil de signification** spécifique ($\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$, etc.), on va chercher une **valeur t** en utilisant un tableau d’une loi de probabilité.
3) Calculer la **valeur T** selon une formule qui dépend de la situation considérée.
4) Prendre la décision d’**accepter** ou de **rejeter l’hypothèse nulle** selon les règles suivantes :
   - **Si $|T| > t$, alors on rejette l’hypothèse nulle** et donc on accepte l’hypothèse alternative,
   - **Si $|T| \leq t$, alors on ne rejette pas l’hypothèse nulle** et donc on rejette l’hypothèse alternative.

Test pour une moyenne (échantillon de taille supérieure à 30)

Dans le cas où la taille de l'échantillon est supérieure à 30, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** **$H_0 : \mu = \mu_0$ = valeur présumée de la moyenne**
   $H_a : \mu > \mu_0$ (test unilatéral à droite)
   $H_a : \mu < \mu_0$ (test unilatéral à gauche)
   $H_a : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la variable normale centrée réduite qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau ci-dessous :

	Seuil pour un test unilatéral							
A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Seuil pour un test bilatéral							
A =	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
t =	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

3) **Calcul de T :** on calcule $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (voir les définitions des lettres à la page 1)
4) **Décision :** - **Si $|T| > t$, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
   - **Si $|T| \leq t$, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle** et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

Une chaîne de montage de réfrigérateurs fonctionne de façon optimale si le temps de passage dans la chaîne n'excède pas 30 minutes. Un échantillon aléatoire de 100 réfrigérateurs a été choisi et le temps de passage a été observé pour chacun d'eux. La moyenne du temps de passage $\bar{x}$ de cet échantillon est égale à 31 minutes et l'écart-type s est égal à 6 minutes, Au seuil de 5%, le temps de passage moyen est-il supérieur à 30 minutes ?

Résolution :

1) **Hypothèses :** $H_0 : \mu = 30$ = valeur limite présumée de la moyenne
   $H_a : \mu > 30$ (test unilatéral à droite)
2) **Recherche de t** : avec α = 5%, on a A = 0,05 et on lit t dans le tableau : t = 1,6449.
3) **Calcul de T** : on a $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, avec $\bar{x} = 31$, $\mu_0 = 30$, $s = 6$ et $n = 100$. Ainsi $T = \frac{31-30}{6/\sqrt{100}} = 1,666$.
4) **Décision** : comme |T| = 1,666 > t = 1,6449, on rejette l'hypothèse nulle et on considère que **le temps de passage moyen est significativement supérieur à 30 minutes.**

Remarque :

La région d'acceptation de l'hypothèse nulle est alors $\left[\mu_0 - t \bullet \frac{s}{\sqrt{n}} ; \mu_0 + t \bullet \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

Test pour une moyenne (échantillon de taille inférieure à 30)

Dans le cas où la taille de l'échantillon est inférieure à 30, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** **H_0 : μ = μ_0 = valeur présumée de la moyenne**
   H_a : μ > μ_0 (test unilatéral à droite)
   H_a : μ < μ_0 (test unilatéral à gauche)
   H_a : μ ≠ μ_0 (test bilatéral)
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution du t de Student qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau de la page 7, **à la ligne n-1**.
3) **Calcul de T :** on calcule $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (voir les définitions des lettres à la page 1)
4) **Décision :** - **Si |T| > t, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
   - **Si |T| ≤ t, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle** et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

Considérons un échantillon de taille *n* = 10 dont les observations sont les suivantes :

47 51 48 49 48 52 47 49 46 47

Nous aimerions savoir si la moyenne de cet échantillon est significativement égale à 50 au seuil de 5%.

Résolution :

1) **Hypothèses** : H_0 : μ = 50 = valeur présumée de la moyenne
   H_a : μ ≠ 50 (test bilatéral)
2) **Recherche de t** : avec α = 5%, on a A = 0,05 et on lit t dans le tableau à la ligne *n*-1 = 9 : t = 2,2622.
3) **Calcul de T** : : on a $T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$, avec $\bar{x}$ = moyenne des 10 observations de l'échantillon = 48,4, *s* = écart-type des 10 observations de l'échantillon = 1,8, μ_0 = 50 et *n* = 10. Ainsi $T = \frac{48.4-50}{1,8/\sqrt{10}}$ = -2,81.
4) **Décision** : comme |T| = 2,81 > t = 2,2622, on rejette l'hypothèse nulle et on considère que la **moyenne est significativement différente de 50 (au seuil de 5%)**.

Remarque :

La région d'acceptation de l'hypothèse nulle est alors $\left[\mu_0 - t \bullet \frac{s}{\sqrt{n}} ; \mu_0 + t \bullet \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

		Seuil pour un test unilatéral							
	A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
		Seuil pour un test bilatéral							
	A =	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
n-1 = 1	t =	1,0000	1,9626	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	636,58
2		0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	31,60
3		0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	12,92
4		0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	8,6101
5		0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8685
6		0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9587
7		0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	5,4081
8		0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0414
9		0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10		0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5868
11		0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4369
12		0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13		0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2209
14		0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1403
15		0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	4,0728
16		0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0149
17		0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18		0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9217
19		0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8833
20		0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8496
21		0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22		0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7922
23		0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24		0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,7454
25		0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26		0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7067
27		0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6895
28		0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29		0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6595
30		0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
31		0,6825	1,0541	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	3,6335
32		0,6822	1,0535	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,6218
33		0,6820	1,0530	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	3,6109
34		0,6818	1,0525	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,6007
35		0,6816	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40		0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45		0,6800	1,0485	1,3007	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50		0,6794	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55		0,6790	1,0463	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	3,4765
60		0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70		0,6780	1,0442	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80		0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4164
90		0,6772	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100		0,6770	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
120		0,6765	1,0409	1,2886	1,6576	1,9799	2,3578	2,6174	3,3734
∞		0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

Test pour un pourcentage ou une proportion

Dans le cas où l'échantillon est de grande taille, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** **$H_0 : \pi = \pi_0$ = valeur présumée de la moyenne**
   $H_a : \pi > \pi_0$ (test unilatéral à droite)
   $H_a : \pi < \pi_0$ (test unilatéral à gauche)
   $H_a : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la variable normale centrée réduite qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau ci-dessous :

	Seuil pour un test unilatéral							
A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Seuil pour un test bilatéral							
A =	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
t =	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

3) **Calcul de T :** on calcule $T = \dfrac{p-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$ (voir les définitions à la page 1)
4) **Décision :** - **Si $|T| > t$, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
   - Si $|T| \leq t$, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

Lors d'un sondage sur un échantillon aléatoire de 200 votants, un projet reçoit 52% de votes favorables. Avec un seuil de signification de 5%, peut-il conclure que le projet sera accepté ?

Résolution :

1) **Hypothèses** : $H_0 : \pi = 0.5 = 50\%$ = valeur limite du pourcentage pour l'acceptation du projet
   $H_a : \pi > 0.5 = 50\%$ = valeur nécessaire pour que le projet soit accepté
2) **Recherche de t** : avec α = 5%, on a A = 0,05 et on lit t dans le tableau : t = 1,6449
3) **Calcul de T** : on a $T = \dfrac{p-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$, avec p = 0,52 = 52%, π_0 = 0,5 = 50% et n = 200. Ainsi

   $T = \dfrac{0,52-0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5(1-0,5)}{200}}}$ = 0,5657.
4) **Décision** : comme |T| = 0,5657 < t = 1,6449, on ne rejette pas l'hypothèse nulle et on considère que **le projet n'obtiendra pas plus de 50% de votes favorables et donc qu'il ne sera pas accepté au seuil de signification de 5%**.

Remarque : La région d'acceptation de l'hypothèse nulle est alors :

$$\left[\Pi_0 - t \bullet \sqrt{\frac{\Pi_0(1-\Pi_0)}{n}} ; \Pi_0 - t \bullet \sqrt{\frac{\Pi_0(1-\Pi_0)}{n}}\right].$$

Test de comparaison de deux moyennes

Lorsque nous désirons savoir s'il existe une différence significative entre la moyenne μ_1 et μ_2 de deux populations d'où sont tirés des échantillons, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** **$H_0 : \mu_1 = \mu_2$**
   $H_a : \mu_1 > \mu_2$ (test unilatéral à droite)
   $H_a : \mu_1 < \mu_2$ (test unilatéral à gauche)
   $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ (test bilatéral)
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution du t de Student qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau de la page 10, **à la ligne n – 2**, où **n = n_1 + n_2**, **n_1** et **n_2** étant les tailles des deux échantillons.
3) **Calcul de T :** avec $\bar{x}_1$ la moyenne du premier échantillon, $\bar{x}_2$ la moyenne du deuxième échantillon, on calcul T en utilisant la formule :

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

   où s_p est calculé en utilisant les variances s_1^2 et s_2^2 des deux échantillons :

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

4) **Décision :** **- Si |T| > t, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
   - Si |T| ≤ t, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

Une étude est réalisée en vue de comparer la durée de vie moyenne de deux marques de pneus. Un échantillon a été prélevé pour chacune des deux marques. Les résultats obtenus sont :

Pour la marque 1 : durée de vie moyenne : $\bar{x}_1$ = 72'000 km
écart-type : s_1 = 3'200 km
taille de l'échantillon : n_1 = 25

Pour la marque 2 : durée de vie moyenne : $\bar{x}_2$ = 74'400 km
écart-type : s_2 = 2'400 km
taille de l'échantillon : n_2 = 20

Nous désirons savoir s'il existe une différence significative de durée de vie entre les deux marques de pneus, à un seuil de signification α de 1%.

Résolution :

1) **Hypothèses** : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
   $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ (test bilatéral)
2) **Recherche de t** : on a n = n_1 + n_2 = 25 + 20 = 45 et n - 2 = 43 ; avec α = 1%, on a A = 0,01 et on lit t dans le tableau de la page 10, entre les lignes 40 et 45 : t = 2,7.
3) **Calcul de T** : Commençons par la valeur de s_p :

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(25-1)3200^2+(20-1)2400^2}{25+20-2}} = 2874.10$$

On peut alors calcul la valeur de T :

$$T = \frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{72000-74400}{2874.10 \cdot \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}} = \text{-}2.78$$

4) **Décision** : comme |T| = 2,78 > t = 2,7, on rejette l'hypothèse nulle et on considère que **les deux marques de pneus n'ont pas la même durée de vie moyenne**.

		Seuil pour un test unilatéral							
	A =	0,25	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
		Seuil pour un test bilatéral							
	A =	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
n - 2									
1	t =	1,0000	1,9626	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	636,58
2		0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	31,60
3		0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	12,92
4		0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	8,6101
5		0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8685
6		0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9587
7		0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	5,4081
8		0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0414
9		0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10		0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5868
11		0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4369
12		0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13		0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2209
14		0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1403
15		0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	4,0728
16		0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0149
17		0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18		0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9217
19		0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8833
20		0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8496
21		0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22		0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7922
23		0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24		0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,7454
25		0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26		0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7067
27		0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6895
28		0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29		0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6595
30		0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
31		0,6825	1,0541	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440	3,6335
32		0,6822	1,0535	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,6218
33		0,6820	1,0530	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333	3,6109
34		0,6818	1,0525	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,6007
35		0,6816	1,0520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40		0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45		0,6800	1,0485	1,3007	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50		0,6794	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55		0,6790	1,0463	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	3,4765
60		0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70		0,6780	1,0442	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80		0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4164
90		0,6772	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100		0,6770	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
120		0,6765	1,0409	1,2886	1,6576	1,9799	2,3578	2,6174	3,3734
∞		0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2906

Test de comparaison de deux pourcentages ou deux proportions

Lorsque nous désirons savoir s'il existe une différence significative entre la moyenne μ_1 et μ_2 de deux populations d'où sont tirés des échantillons, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

   $H_a : \pi_1 > \pi_2$ **(test unilatéral à droite)**

   $H_a : \pi_1 < \pi_2$ **(test unilatéral à gauche)**

   $H_a : \pi_1 \neq \pi_2$ **(test bilatéral)**

2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution du t de Student qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans le tableau de la page 10, **à la ligne n – 2**, où **n = n_1 + n_2**, **n_1** et **n_2** étant les tailles des deux échantillons.

3) **Calcul de T :** avec p_1 le pourcentage du premier échantillon, p_2 le pourcentage du deuxième échantillon, on calcul T en utilisant la formule :

$$T = \frac{p_1 - p_2}{s_p} \quad \text{avec} \quad s_p = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

4) **Décision :** **- Si $|T| > t$, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,

   - Si $|T| \leq t$, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

Le rapporteur d'un projet de loi concernant le trafic routier pense que son projet sera perçu de manière beaucoup plus favorable par la population urbaine que par la population rurale. Une enquête a été réalisée sur deux échantillons de 100 personnes provenant respectivement d'un milieu urbain et d'un milieu rural. Dans le milieu urbain (population 1), 82 personnes étaient favorables à son projet, alors que dans le milieu rural (population 2), seulement 69 personnes se sont prononcées de manière positive. A un seuil de signification de 5%, peut-on confirmer l'intuition du rapporteur ?

Résolution :

1) **Hypothèses** : Nous allons effectuer un test unilatéral à droite : $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

   $H_a : \pi_1 > \pi_2$

2) **Recherche de t** : on a n = $n_1 + n_2$ = 100 + 100 = 200 et n - 2 = 198 ; avec α = 5%, on a A = 0,05 et on lit t dans le tableau de la page 10, à la ligne ∞ : t = 1,6449.

3) **Calcul de T** : Commençons par la valeur de s_p : on a $p_1 = \frac{82}{100}$ = 0,82 et $p_2 = \frac{69}{100}$ = 0,69, d'où :

$$s_p = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.82(1-0.82)}{100} + \frac{0.69(1-0.69)}{100}} = 0.06$$

   On peut alors calcul la valeur de T :

$$T = \frac{p_1 - p_2}{s_p} = \frac{0.82 - 0.69}{0.06} = 2.17$$

4) **Décision** : comme $|T|$ = 2,17 > t = 1,6449, on rejette l'hypothèse nulle et **on confirme l'intuition du rapporteur**.

Test de comparaison de plusieurs moyennes ou test de Fisher

Lorsque nous désirons savoir s'il existe une différence significative entre la moyenne $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_a$ de plusieurs (a > 2) populations d'où sont tirés des échantillons, on peut effectuer les tests d'hypothèses suivants :

1) **Hypothèses :** **$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$**
   H_a : les moyennes des populations ne sont pas toutes égales entre elles
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution de Fisher qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans les tableaux de la page 13, **à la colonne a – 1** et **à la ligne N – a**, où **N** est le total des éléments de tous les échantillons tirés.
3) **Calcul de T :** on doit calculer **T =** $\frac{CME}{CMI}$, où ***CME*** correspond aux carrés moyens entre les groupes et ***CMI*** correspond aux carrés moyens à l'intérieur des groupes. ***CME*** et ***CMI*** sont donnés par les formules :

$$CME = \frac{\sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2}{a-1} \qquad CMI = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N-a}$$

   où n_i est la taille de l'échantillon i, $\bar{x}_i$ est la moyenne de l'échantillon i, $\bar{x}_{..}$ est la moyenne des observations de tous les échantillons pris ensemble et $\bar{x}_{ij}$ est la $j^{ème}$ observation de l'échantillon i.
4) **Décision :** - **Si |T| > t, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
   - **Si |T| ≤ t, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle** et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Remarques :

- **La valeur de *CMI* se calculent aussi comme la moyenne des variances des échantillons : $CMI = \frac{\sum_{i=1}^{a} s_i^2}{a}$, où s_i^2 est la variance de l'échantillon *i*.**
- **A la calculatrice utilisé au cours, l'écart-type s_i est donné par σ_x.**

		a - 1										
N - a	A	1	2	3	4	5	6	8	10	20	40	∞
1	0.25	5.83	7.5	8.2	8.58	8.82	8.98	9.19	9.32	9.58	9.71	9.85
	0.1	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	59.4	60.2	61.7	62.5	63.3
	0.05	161	200	216	225	230	234	239	242	248	251	254
2	0.25	2.57	3	3.15	3.23	3.28	3.31	3.35	3.38	3.43	3.45	3.48
	0.1	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.37	9.39	9.44	9.47	9.49
	0.05	18.5	19	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
	0.01	98.5	99	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5
	0.001	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	0.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.44	2.44	2.46	2.47	2.47
	0.1	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.25	5.23	5.18	5.16	5.13
	0.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.1	8.94	8.85	8.79	8.66	8.59	8.53
	0.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.5	27.2	26.7	26.4	26.1
	0.001	167	149	141	137	135	133	131	129	126	125	124
4	0.25	1.81	2	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	0.1	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.95	3.92	3.84	3.8	3.76
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.96	5.8	5.72	5.63
	0.01	21.2	18	16.7	16	15.5	15.2	14.8	14.5	14	13.7	13.5
	0.001	74.1	61.3	56.2	53.4	51.7	50.5	49	48.1	46.1	45.1	44.1
5	0.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87
	0.1	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.34	3.3	3.21	3.16	3.1
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.74	4.56	4.46	4.36
	0.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11	10.7	10.3	10.1	9.55	9.29	9.02
	0.001	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	27.6	26.9	25.4	24.6	23.8
6	0.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.74
	0.1	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	2.98	2.94	2.84	2.78	2.72
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.06	3.87	3.77	3.67
	0.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.1	7.87	7.4	7.14	6.88
	0.001	35.5	27	23.7	21.9	20.8	20	19	18.4	17.1	16.4	15.8
7	0.25	1.57	1.7	1.72	1.72	1.71	1.71	1.7	1.69	1.67	1.66	1.65
	0.1	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.75	2.7	2.59	2.54	2.47
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.64	3.44	3.34	3.23
	0.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.62	6.16	5.91	5.65
	0.001	29.3	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	14.6	14.1	12.9	12.3	11.7
8	0.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.63	1.61	1.59	1.58
	0.1	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.59	2.54	2.42	2.36	2.29
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.35	3.15	3.04	2.93
	0.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.81	5.36	5.12	4.86
	0.001	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12	11.5	10.5	9.92	9.33
9	0.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.6	1.59	1.56	1.55	1.53
	0.1	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.47	2.42	2.3	2.23	2.16
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.14	2.94	2.83	2.71
	0.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.47	5.26	4.81	4.57	4.31
	0.001	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.4	9.89	8.9	8.37	7.81
10	0.25	1.49	1.6	1.6	1.59	1.59	1.58	1.56	1.55	1.52	1.51	1.48
	0.1	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.38	2.32	2.2	2.13	2.06
	0.05	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.98	2.77	2.66	2.54
	0.01	10	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.85	4.41	4.17	3.91
	0.001	21	14.9	12.6	11.3	10.5	9.92	9.2	8.75	7.8	7.3	6.76

		a - 1										
N - a	A	1	2	3	4	5	6	8	10	20	40	∞
12	0.25	1.56	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.51	1.5	1.47	1.45	1.42
	0.1	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.24	2.19	2.06	1.99	1.9
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.85	2.75	2.54	2.43	2.3
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.5	4.3	3.86	3.62	3.36
	0.001	18.6	13	10.8	9.63	8.89	8.38	7.71	7.29	6.4	5.93	5.42
14	0.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.5	1.48	1.46	1.43	1.41	1.38
	0.1	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.15	2.1	1.96	1.89	1.8
	0.05	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.7	2.6	2.39	2.27	2.13
	0.01	8.86	5.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.14	3.94	3.51	3.27	3
	0.001	17.1	11.8	9.73	8.62	7.92	7.43	6.8	6.4	5.56	5.1	4.6
16	0.25	1.42	1.51	1.51	1.5	1.48	1.48	1.46	1.45	1.4	1.37	1.34
	0.1	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.09	2.03	1.89	1.81	1.72
	0.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.49	2.28	2.15	2.01
	0.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	3.89	3.69	3.26	3.02	2.75
	0.001	16.1	11	9	7.94	7.27	6.81	6.19	5.81	4.99	4.54	4.06
20	0.25	1.4	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.42	1.4	1.36	1.33	1.29
	0.1	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2	1.94	1.79	1.71	1.61
	0.05	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.45	2.35	2.12	1.99	1.84
	0.01	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.56	3.37	2.94	2.69	2.42
	0.001	14.8	9.95	8.1	7.1	6.46	6.02	5.44	5.08	4.29	3.86	3.38
30	0.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.37	1.35	1.3	1.27	1.23
	0.1	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.88	1.82	1.67	1.57	1.46
	0.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.16	1.93	1.79	1.62
	0.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.17	2.98	2.55	2.3	2.01
	0.001	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.58	4.24	3.49	3.07	2.59
40	0.25	1.36	1.44	1.42	1.4	1.39	1.37	1.35	1.33	1.28	1.24	1.19
	0.1	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.83	1.76	1.61	1.51	1.38
	0.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.08	1.84	1.69	1.51
	0.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.8	2.37	2.11	1.8
	0.001	12.6	8.25	6.6	5.7	5.13	4.73	4.21	3.87	3.15	2.73	2.23
60	0.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.32	1.3	1.25	1.21	1.15
	0.1	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.77	1.71	1.54	1.44	1.29
	0.05	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.1	1.99	1.75	1.59	1.39
	0.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.63	2.2	1.94	1.6
	0.001	12	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	3.87	3.54	2.83	2.41	1.89
120	0.25	1.34	1.4	1.39	1.37	1.35	1.33	1.3	1.28	1.22	1.18	1.1
	0.1	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.72	1.65	1.48	1.37	1.19
	0.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.91	1.66	1.5	1.25
	0.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.47	2.03	1.76	1.38
	0.001	11.4	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.55	3.24	2.53	2.11	1.54
∞	0.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.28	1.25	1.19	1.14	1
	0.1	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.67	1.6	1.42	1.3	1
	0.05	3.84	3	2.6	2.37	2.21	2.1	1.94	1.83	1.57	1.39	1
	0.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.51	2.32	1.88	1.59	1
	0.001	10.8	6.91	5.42	4.62	4.1	3.74	3.27	2.96	2.27	1.84	1

Exemple :

Pendant leur cuisson, les donuts absorbent de la graisse en quantité variable. On veut tester. À un seuil de 5%, si la quantité absorbée dépend du type de graisse. On prépare donc 4 graisses différentes et on fait cuire 6 donuts par groupe de graisse.

Le tableau des données se présente ainsi :

	Echantillon 1	**Echantillon 2**	**Echantillon 3**	**Echantillon 4**
a = 4	$\bar{x}_{1j}$	$\bar{x}_{2j}$	$\bar{x}_{3j}$	$\bar{x}_{4j}$
	64	*78*	*75*	*55*
	72	*91*	*93*	*66*
	68	*97*	*78*	*49*
	77	*82*	*71*	*64*
	56	*85*	*63*	*70*
	95	*77*	*76*	*68*
n_i	**6**	**6**	**6**	**6**
N = 24				
$\bar{x}_i$	**72**	**85**	**76**	**62**
$\bar{x}_{..}$ **= 73,75**				

Résolution :

1) **Hypothèses** : $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_a$
   H_a : les moyennes des populations ne sont pas toutes égales entre elles
2) **Recherche de t** : comme α = 5%, on a A = 0,05 ; de plus a – 1 = 3 et N – a = 20 ; la valeur de t se trouve donc à la colonne 3 et la ligne 20 avec A = 0,05 : on trouve t = 3,1.
3) **Calcul de T** : on a $CME = \frac{6(72-73,75)^2+6(85-73,73)^2+6(76-73,75)^2+6(62-73,75)^2}{3} = \frac{1636,5}{3} = 545,5$ et $CMI = \frac{(64-72)^2+(72-72)^2+\cdots+(78-85)^2+(91-85)^2+\cdots+(75-76)^2+\cdots+(55-62)^2+\cdots}{20} = \frac{2018}{20} = 100,9$; on obtient ainsi T = $\frac{545,5}{100,9} = 5,41$.
4) **Décision** : comme |T| = 5,41 > t = 3,1, on rejette l'hypothèse nulle et on conclut qu'**il y a une différence significative entre les moyennes**, autrement dit la **quantité absorbée dépend du type de graisse utilisée**.

Test d'indépendance de deux variables ou du chi-carré

Le test d'indépendance du chi-carré vise à déterminer si deux variables observées sur un échantillon sont indépendantes ou non. Les variables étudiées doivent être des variables qualitatives catégorielles.

Les observations des variables X et Y obtenues peuvent être représentées par un tableau à double entrée appelé **table de contingence** :

		Catégories de la variable Y			
		Y_1	...	Y_c	Total
Catégories de la variable X	X_1	n_{11}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
	...	...	...	...	...
	X_r	n_{r1}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
	Total	$n_{.1}$	...	$n_{.c}$	$n_{..}$

1) **Hypothèses :** **H_0 : les deux variables sont indépendantes**
H_a : les deux variables ne sont pas indépendantes
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution du chi-carré qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans les tableaux de la page 16, **à la ligne (r-1)(c-1)**, où **r** et **c** sont respectivement le nombres de catégories des variables X et Y.
3) **Calcul de T :** on doit calculer **T** = $\sum \frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$, où $e_{ij} = \frac{n_{i.} \bullet n_{.j}}{n_{..}}$ sont les effectifs estimés de chaque case de la table de contingence (voir l'exemple pour le calcul effectif des e_{ij}).
4) **Décision :** - **Si |T| > t, alors on rejette l'hypothèse nulle** et donc on accepte l'hypothèse alternative,
- Si |T| ≤ t, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle et donc on rejette l'hypothèse alternative.

Exemple :

On cherche à déterminer si, à un seuil de signification de 5%, le fait de fumer est indépendant du sexe des individus. Les deux variables sont les variables qualitatives catégorielles qui comptent deux catégories chacune :

- pour la variable « sexe » : M ou F
- pour la variable « fumer » : fume ou ne fume pas.

La table de contingence à partir d'un échantillon de 140 personnes est la suivante se présente ainsi :

	fume	**Ne fume pas**	**total**
M	n_{11} = 31	n_{12} = 54	$n_{1.}$ = 85
F	n_{21} = 20	n_{22} = 35	$n_{2.}$ = 55
Total	$n_{.1}$ = 51	$n_{.2}$ = 89	$n_{..}$ = 140

Résolution :

1) **Hypothèses** : H_0 : le fait de fumer est indépendant du sexe des individus
H_a : le fait de fumer n'est pas indépendant du sexe des individus

2) **Recherche de t** : comme α = 5%, on a A = 0,05 ; de plus on a r = c = 2, d'où (r-1)(c-1) = 1 ; ainsi la valeur de t se trouve donc à la colonne 0,05 et la ligne 1 : on trouve t = 3,84.

3) **Calcul de T** : on a $e_{11} = \frac{n_{1.} \bullet n_{.1}}{n_{..}} = \frac{85 \bullet 51}{140} = 30{,}96$, $e_{12} = \frac{n_{1.} \bullet n_{.2}}{n_{..}} = \frac{85 \bullet 89}{140} = 54{,}04$, $e_{21} = \frac{n_{2.} \bullet n_{.1}}{n_{..}} = \frac{55 \bullet 51}{140} = 20{,}04$ et $e_{22} = \frac{n_{2.} \bullet n_{.2}}{n_{..}} = \frac{55 \bullet 89}{140} = 34{,}96$; on obtient ainsi : T = $\frac{(n_{11}-e_{11})^2}{e_{11}} + \frac{(n_{12}-e_{12})^2}{e_{12}} + \frac{(n_{21}-e_{21})^2}{e_{21}} + \frac{(n_{22}-e_{22})^2}{e_{22}}$ = $\frac{(31-30{,}96)^2}{30{,}96} + \frac{(54-5\ \ ,04)^2}{54{,}04} + \frac{(20-20{,}04)^2}{20{,}04} + \frac{(35-34{,}96)^2}{34{,}96} = 0{,}00005 + 0{,}00003 + 0{,}00008 + 0{,}00005 = 0{,}00021.$

4) **Décision** : comme $|\mathrm{T}|$ = 0,000211 < t = 3,84, on ne rejette pas l'hypothèse nulle et on conclut que **les deux variables étudiées sont indépendantes**, autrement dit **le fait de fumer est indépendant du sexe des individus**.

	A =	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
(r-1)(c-1) =								
1		1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.80
2		2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.80
3		4.11	6.25	7.81	9.35	11.30	12.80	16.30
4		5.39	7.78	9.49	11.10	13.30	14.90	18.50
5		6.63	9.24	11.10	12.80	15.10	16.70	20.50
6		7.84	10.60	12.60	14.40	16.80	18.50	22.50
7		9.04	12.00	14.10	16.00	18.50	20.30	24.30
8		10.20	13.40	15.50	17.50	20.10	22.00	26.10
9		11.40	14.70	16.90	19.00	21.70	23.60	27.90
10		12.50	16.00	18.30	20.50	23.20	25.20	29.60
11		13.70	17.30	19.70	21.90	24.70	26.80	31.30
12		14.80	18.50	21.00	23.30	26.20	28.30	32.90
13		16.00	19.80	22.40	24.70	27.70	29.80	34.50
14		17.10	21.10	23.70	26.10	29.10	31.30	36.10
15		18.20	22.30	25.00	27.50	30.60	32.80	37.70
16		19.40	23.50	26.30	28.80	32.00	34.30	39.30
17		20.50	24.80	27.60	30.20	33.40	35.70	40.80
18		21.60	26.00	28.90	31.50	34.80	37.20	42.30
19		22.70	27.20	30.10	32.90	36.20	38.60	43.80
20		23.80	28.40	31.40	34.20	37.60	40.00	45.30
21		24.90	29.60	32.70	35.50	38.90	41.40	46.80
22		26.00	30.80	33.90	36.80	40.30	42.80	48.30
23		27.10	32.00	35.20	38.10	41.60	44.20	49.70
24		28.20	33.20	36.40	39.40	43.00	45.60	51.20
25		29.30	34.40	37.70	40.60	44.30	46.90	52.60
26		30.40	35.60	38.90	41.90	45.60	48.30	54.10
27		31.50	36.70	40.10	43.20	47.00	49.60	55.50
28		32.60	37.90	41.30	44.50	48.30	51.00	56.90
29		33.70	39.10	42.60	45.70	49.60	52.30	58.30
30		34.80	40.30	43.80	47.00	50.90	53.70	59.70
40		45.60	51.80	55.80	59.30	63.70	66.80	73.40
50		56.30	63.20	67.50	71.40	76.20	79.50	86.70
60		67.00	74.40	79.10	83.30	88.40	92.00	99.60
70		77.60	85.50	90.50	95.00	100.00	104.00	112.00
80		88.10	96.60	102.00	107.00	112.00	116.00	125.00
90		98.60	108.00	113.00	118.00	124.00	128.00	137.00
100		109.00	118.00	124.00	130.00	136.00	140.00	149.00

Test d'adéquation ou de conformité du chi-carré

Le test d'adéquation ou de conformité du chi-carré sert à déterminer s'il est correct d'approcher une distribution observée par une loi de probabilité particulière (loir binomiale, loi de Poisson et loi uniforme).
On commence par classer les observations en k classes disjointes d'effectifs respectifs n_i.

1) **Hypothèses :**
   H_0 : la distribution observée peut être approchée par une loi particulière
   H_a : la distribution observée ne peut pas être approchée par une loi particulière
2) **Recherche de t : t** est la valeur de la distribution du chi-carré qui dépend du seuil de signification α du test d'hypothèse : avec **A = α** on lit la **valeur de t** correspondante dans les tableaux de la page 18, **à la ligne k-1**.
3) **Calcul de T :** on doit calculer **T =** $\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$, où $e_i = N \bullet p_i$ et p_i est la probabilité théorique calculée pour chaque classe à l'aide de la formule présumée de la loi statistique (loi uniforme, loi binomiale, loi de Poisson).
4) **Décision :** **- Si $|T| > t$, alors on rejette l'hypothèse nulle,**
   - Si $|T| \leq t$, alors on ne rejette pas l'hypothèse nulle.

Exemple :

On effectue un lancer simultané de quatre pièces de monnaie et on compte le nombre de côtés « face » apparus. Cette expérience est répétée 160 fois. Les résultats sont les suivants :

Nombre de « faces » x_i	Nombre de lancers n_i
0	17
1	52
2	54
3	31
4	6
Total	***N* = 160**

Est-ce que, à un seuil de signification de 5%, la **loi binomiale** fournit-elle une bonne approche pour cette distribution ?

Résolution :

1) **Hypothèses** : H_0 : la distribution observée peut être approchée par une loi binomiale
   H_a : la distribution observée ne peut pas être approchée par une loi binomiale
2) **Recherche de t** : comme α = 5%, on a A = 0,05 ; de plus on a k-1 = 5-1 = 4 ; ainsi la valeur de t se trouve donc à la colonne 0,05 et la ligne 4 : on trouve t = 9,49.
3) **Calcul de T** : on considère chacune des valeurs 0, 1, 2, 3 et 4 comme une classe ; on calcule les probabilités théoriques associées à chacune de ces valeurs en utilisant la formule de la loi binomiale : $P(X = x) = C_x^n \bullet p^x \bullet (1-p)^{n-x}$, où *n* est le nombre de lancers, à savoir 4. Avec *p* = probabilité d'obtenir « face » sur un lancer = $\frac{1}{2}$, on obtient : $p_1 = P(X = 0) = C_0^4 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^0 \bullet \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$, $p_2 = P(X = 1) = \frac{4}{16}$, $p_3 = P(X = 2) = \frac{6}{16}$, $p_4 = P(X = 3) = \frac{4}{16}$, $p_5 = P(X = 4) = \frac{1}{16}$. Comme l'expérience est répétée *N* = 160 fois, on obtient :
   $e_1 = N \bullet p_1 = 160 \bullet \frac{1}{16} = 10$, $e_2 = N \bullet p_2 = 160 \bullet \frac{4}{16} = 40$, $e_3 = N \bullet p_3 = 160 \bullet \frac{6}{16} = 60$, $e_4 = N \bullet p_4 = 160 \bullet \frac{4}{16} = 40$, $e_5 = N \bullet p_5 = 160 \bullet \frac{1}{16} = 10$.

On obtient ainsi T = $\frac{(n_1-e_1)^2}{e_1}+\frac{(n_2-e_2)^2}{e_2}+\frac{(n_3-e_3)^2}{e_3}+\frac{(n_4-e_4)^2}{e_4}+\frac{(n_5-e_5)^2}{e_5}=\frac{(17-\quad)^2}{10}+$
$+\frac{(52-4\quad)^2}{40}+\frac{(54-6\quad)^2}{60}+\frac{(31-40)^2}{40}+\frac{(6-10)^2}{10}=4{,}9+3{,}6+0{,}6+2{,}025+1{,}6=12{,}725.$

4) **Décision** : comme |T| = 12,725 > t = 9,49, on rejette l'hypothèse nulle et on conclut que **la loi binomiale ne fournit pas une bonne approche pour cette distribution (soit les pièces étaient truquées, soit elles n'étaient pas correctement lancées)**.

	A =	0.25	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k-1 =								
1		1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.80
2		2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.80
3		4.11	6.25	7.81	9.35	11.30	12.80	16.30
4		5.39	7.78	9.49	11.10	13.30	14.90	18.50
5		6.63	9.24	11.10	12.80	15.10	16.70	20.50
6		7.84	10.60	12.60	14.40	16.80	18.50	22.50
7		9.04	12.00	14.10	16.00	18.50	20.30	24.30
8		10.20	13.40	15.50	17.50	20.10	22.00	26.10
9		11.40	14.70	16.90	19.00	21.70	23.60	27.90
10		12.50	16.00	18.30	20.50	23.20	25.20	29.60
11		13.70	17.30	19.70	21.90	24.70	26.80	31.30
12		14.80	18.50	21.00	23.30	26.20	28.30	32.90
13		16.00	19.80	22.40	24.70	27.70	29.80	34.50
14		17.10	21.10	23.70	26.10	29.10	31.30	36.10
15		18.20	22.30	25.00	27.50	30.60	32.80	37.70
16		19.40	23.50	26.30	28.80	32.00	34.30	39.30
17		20.50	24.80	27.60	30.20	33.40	35.70	40.80
18		21.60	26.00	28.90	31.50	34.80	37.20	42.30
19		22.70	27.20	30.10	32.90	36.20	38.60	43.80
20		23.80	28.40	31.40	34.20	37.60	40.00	45.30
21		24.90	29.60	32.70	35.50	38.90	41.40	46.80
22		26.00	30.80	33.90	36.80	40.30	42.80	48.30
23		27.10	32.00	35.20	38.10	41.60	44.20	49.70
24		28.20	33.20	36.40	39.40	43.00	45.60	51.20
25		29.30	34.40	37.70	40.60	44.30	46.90	52.60
26		30.40	35.60	38.90	41.90	45.60	48.30	54.10
27		31.50	36.70	40.10	43.20	47.00	49.60	55.50
28		32.60	37.90	41.30	44.50	48.30	51.00	56.90
29		33.70	39.10	42.60	45.70	49.60	52.30	58.30
30		34.80	40.30	43.80	47.00	50.90	53.70	59.70
40		45.60	51.80	55.80	59.30	63.70	66.80	73.40
50		56.30	63.20	67.50	71.40	76.20	79.50	86.70
60		67.00	74.40	79.10	83.30	88.40	92.00	99.60
70		77.60	85.50	90.50	95.00	100.00	104.00	112.00
80		88.10	96.60	102.00	107.00	112.00	116.00	125.00
90		98.60	108.00	113.00	118.00	124.00	128.00	137.00
100		109.00	118.00	124.00	130.00	136.00	140.00	149.00

Remarques :

- Si la question est « est que le numéro de… a une influence sur… », on cherche à tester si la distribution suit une **loi uniforme**. Dans ce cas, tous les p_i sont égaux ($p_i=\frac{1}{nb\ de\ classe}$) et tous les e_i sont égaux ($e_i=N\bullet p_i$)
- Si on cherche à contrôler si la **loi de Poisson** est une bonne approche de la distribution, on a alors $p_i=P(X=i)=\frac{\lambda^k}{k!}\bullet e^{-\lambda}$, où λ est le nombre moyen d'observations.

Coefficient de corrélation des rangs de Spearman

Par corrélation, on entend la relation linéaire qui existe entre deux variables. Le coefficient de corrélation mesure l'intensité de cette relation.
Lorsque l'une et/ou l'autre variable n'est pas représentée sous forme de valeurs mais qu'il est possible d'attribuer un rang au(x) caractère(s) étudié(s), alors on peut mesurer cette intensité par le coefficient de corrélation des rangs de Spearman, noté r_s.
On commence par classer les *n* observations selon leur rang pour les deux variables (x et y). Puis on calcule, pour chaque observation, la différence de rangs d_i. La formule suivante nous donne le coefficient de Spearman : $\boldsymbol{r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}}$.
Les valeurs possibles du coefficient r_s se situent dans l'intervalle [-1 ;1]. Ces deux valeurs extrêmes représentent une relation linéaire parfaite entre les variables, « négative » dans le premier cas, « positive » dans l'autre. Une relation positive signifie que les deux variables varient dans le même sens (si x croît, y croît aussi) ; une relation négative signifie que les deux variables varient en sens inverse (si x croît, y décroît). La valeur de zéro signifie l'absence de relation linéaire.
Remarque : si la série comprend des valeurs ex-aequo, on peut les départager par tirage au sort.

Exemple :

Un dégustateur de vin donne une note de qualité à 10 bouteilles ; les scores vont de 1 à 10, avec la note 1 pour la moins bonne bouteille et la note 10 pour la meilleure. Il s'agit de la variable x. La variable y représente le prix de ces 10 bouteilles de vin. Les résultats sont donnés par :
Résolution :

Bouteille (i)	Qualité (x_i)	Prix (y_i)		Rang de x	Rang de y	d_i	d_i^2
1	10	55		10	10	0	0
2	7	20		7	9	-2	4
3	2	12.50		2	5	-3	9
4	5	11.50		5	4	1	1
5	4	9.50		4	3	1	1
6	3	7.50		3	1	2	4
7	6	15		6	7	-1	1
8	1	8		1	2	-1	1
9	9	16		9	8	1	1
10	8	13		8	6	2	4

On a alors $r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{10} d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(0+4+9+1+1+4+1+1+1+4)}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 26}{10(100-1)} = 1 - \frac{156}{990} =$
$$= 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$
Il y a donc une **forte corrélation entre le prix des bouteilles de vin et leur qualité**. Cette corrélation étant positive, **plus la qualité augmente, plus le prix est élevé**.

Test sur les rangs de Wilcoxon

Le test sur les rangs signés de Wilcoxon sert à tester si deux populations appariées présentent une différence, tout en tenant compte de la grandeur et du sens (positive ou négative) de cette différence.

Soient deux populations appariées dont sont issus deux échantillons de taille *n*. Le premier échantillon comprend les observations X_1, X_2, … , X_n, le deuxième échantillon comprend les observations Y_1, Y_2, … , Y_n. On considère les couples d'observations $(X_1;Y_1)$, $(X_2;Y_2)$, … , $(X_n;Y_n)$ et on calcule la différence en valeur absolue pour chaque paire d'observations : $|d_i| = |X_i - Y_i|$ avec i=1, 2, … , n,

On soustrait de la taille d'échantillon (*n*) le nombre de paires dont la différence est nulle. On obtient ainsi une nouvelle valeur que l'on nomme par *m*.

On classe les m paires par ordre croissant des $|d_i|$, le rang 1 allant à la plus petite différence et le rang m à la plus grande différence. On note par R_i le rang de la paire $(X_i; Y_i)$, pourvu du signe de la différence d_i.

La statistique du test est ensuite calculée par la somme des rangs associés à des différences positives : ***T*** = $\boldsymbol{\sum R_i}$ pour *i* tel que $d_i > 0$.

Si une ou plusieurs paires d'observations présentent la même différence absolue, on leur attribue un rang moyen qui est égal au rang initial des ex-aequo auquel on ajoute la moitié du nombre d'ex-aequo diminué de 1. Dans ce cas la statistique du test est calculée par : $\boldsymbol{T_z = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} {R_i}^2}}}$.

Comme tout test d'hypothèses, il faut maintenant exprimer les différentes hypothèses. Pour le test de Wilcoxon, ces hypothèses sont basées sur la médiane des différences, notée d_m. Nous avons alors les trois cas suivants :

Cas 1 **H_0 : $\boldsymbol{d_m = 0}$**
H_a : $\boldsymbol{d_m > 0}$ (cas unilatéral à droite : les valeurs de la population des Y sont supérieures à celles de la population des X)

Cas 2 **H_0 : $\boldsymbol{d_m = 0}$**
H_a : $\boldsymbol{d_m < 0}$ (cas unilatéral à gauche : les valeurs de la population des Y sont inférieures à celles de la population des X)

Cas 3 **H_0 : $\boldsymbol{d_m = 0}$**
H_a : $\boldsymbol{d_m \neq 0}$ (cas bilatéral : les valeurs de la population des Y sont différentes à celles de la population des X)

Voici les règles de décision lorsque c'est la statistique ***T*** = $\boldsymbol{\sum R_i}$ qui est utilisée et que ***m* est inférieur ou égal à 20**. Ces règles sont différentes selon les cas 1, 2 et 3 ci-dessus :

Cas 1 **on rejette H_0 si *T* > $\boldsymbol{w_{1-\alpha}}$**
Cas 2 **on rejette H_0 si *T* < $\boldsymbol{w_{\alpha}}$**
Cas 3 **on rejette H_0 si *T* > $\boldsymbol{w_{1-\alpha}}$ ou si T < $\boldsymbol{w_{\alpha}}$**

α étant le seuil de signification et $\boldsymbol{w_\alpha}$et $\boldsymbol{w_{1-\alpha}}$ étant les valeurs dans les tables de Wilcoxon de la page 20**.**

Si c'est la statistique $\boldsymbol{T_z} = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{\sqrt{\sum_{I=1}^{m} {R_i}^2}}$ *qui est utilisée ou si* ***m >20****, alors la valeur de la table de Wilcoxon peut être approximée par la valeur de la loi normale de la page 23.*

Nous avons alors les nouvelles règles de décisions :

Cas 1 ***on rejette H₀ si*** $\boldsymbol{T_z}$ ***> t avec A = 1 - α***

Cas 2 ***on rejette H₀ si*** $\boldsymbol{T_z}$ ***< t avec A = α***

Cas 3 ***on rejette H₀ si*** $\boldsymbol{T_z}$ ***> t avec A = 1 -*** $\frac{\alpha}{2}$ ***ou si*** $\boldsymbol{T_z}$ ***< t avec A =*** $\frac{\alpha}{2}$***.***

Exemples :

1) On fait passer le même test de connaissances à 8 couples de frères et sœurs. Nous désirons faire un test bilatéral au seuil de signification α = 5% afin de déterminer s'il y a une différence significative entre les résultats des frères et sœurs.

Les résultats en nombre de points obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

Familles	Frère (X_i)	Sœur (Y_i)	d_i	Rang des $\lvert d_i \rvert$	R_i
1	60	58	-2	2	-2
2	45	49	4	4	4
3	69	68	-1	1	-1
4	30	36	6	5	5
5	42	34	-8	6	-6
6	53	53	0	-	-
7	56	56	0	-	-
8	62	65	3	3	3

Comme les couples 6 et 7 ne présentent pas de différence, on a *m* = 8 – 2 = 6. Les d_i étant tous différents, il n'y a pas de nécessité de calculer des rangs moyens. La statistique correspondante est donc la valeur de T : $T = \sum R_i$ pour i tel que $d_i > 0$, d'où *T* = 4 + 5 + 3 = 12.

Pour le test que nous voulons faire, nous avons les hypothèses suivantes :

H₀ : $d_m = 0$

Hₐ : $d_m \neq 0$

et on rejette H₀ si *T* > $w_{1-\alpha}$ ou si T < w_α.

Puisque nous calculons *T* et que $m \leq 20$, nous cherchons les valeurs de *w* dans la table de Wilcoxon de la page 22 : la table en haut à droite avec m = 6 nous donne $w_\alpha = 0$ et $w_{1-\alpha} = 21$.

Comme *T* = 12 n'est ni supérieur à 21 ni inférieur à 0, **nous ne pouvons donc pas rejeter H₀** et concluons qu'**il n'y a pas de différence significative entre les résultats des frères et sœurs**.

2) Pour illustrer le cas où nous avons des différences identiques, changeons quelque peut les résultats pour les familles 7 et 8. Voici le nouveau tableau :

Familles	Frère (X_i)	Sœur (Y_i)	d_i	Rang des $\lvert d_i \rvert$	R_i
1	60	58	-2	2	-2
2	45	49	4	4	4
3	69	68	-1	1	-1
4	30	36	6	5	5
5	42	34	-8	6	-6
6	53	53	0	-	-
7	56	57	1	2	2
8	62	61	-1	2	-2

Cette fois, seule la famille 6 présente une différence de 0 ; la valeur de *m* est donc de 7.

Les familles 3, 7 et 8 ont la même différence absolue, il faut donc calculer un rang moyen :

$$\text{rang moyen} = 1 + \frac{1}{2}(3-1) = 2$$

Nous calculons maintenant la statistique T_z : $T_z = \frac{\sum_{i=1}^{m} R_i}{\sqrt{\sum_{I=1}^{m} {R_i}^2}} = \frac{-4+5-2+6-7+2-2}{\sqrt{16+25+4+36+49+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{138}} = -0{,}17$

Comme nous désirons faire un test bilatéral au seuil de signification α = 5%, nous avons A = 1 - $\frac{\alpha}{2}$ = 1 - $\frac{0{,}05}{2}$ = 1 – 0,025 = 0,975 ou A = $\frac{\alpha}{2}$ = 0,025.

Les valeurs correspondantes pour la loi normale (voir table page 23) sont :

- pour A = 0,975, t = 1,96 et
- pour A = 0,025 = 1 – 0,975 = - 1,96

Comme T_z = - 0,17 n'est ni supérieur à 1,96 ni inférieur à – 1,96, **nous ne pouvons donc pas rejeter H_0** et concluons à nouveau qu'**il n'y a pas de différence significative entre les résultats des frères et sœurs**.

unilatéral: α=0.05
bilatéral: α=0.10

m	α	1 - α
5	0	15
6	2	19
7	3	25
8	5	31
9	8	37
10	10	45
11	13	53
12	17	61
13	21	70
14	25	80
15	30	90
16	35	101
17	41	112
18	47	124
19	53	137
20	60	150

unilatéral: α=0.025
bilatéral: α=0.05

m	α	1 - α
5		
6	0	21
7	2	26
8	3	33
9	5	40
10	8	47
11	10	56
12	13	65
13	17	74
14	21	84
15	25	95
16	29	107
17	34	119
18	40	131
19	46	144
20	52	158

unilatéral: α=0.01
bilatéral: α=0.02

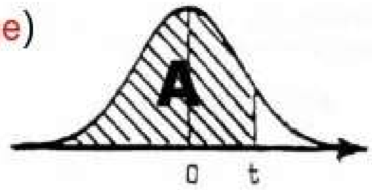
m	α	1 - α
5		
6		
7	0	28
8	1	35
9	3	42
10	5	50
11	7	59
12	10	68
13	12	79
14	16	89
15	19	101
16	23	113
17	27	126
18	32	139
19	37	153
20	43	167

unilatéral: α=0.005
bilatéral: α=0.01

m	α	1 - α
5		
6		
7		
8	0	36
9	1	44
10	3	52
11	5	61
12	7	71
13	10	81
14	13	92
15	16	104
16	19	117
17	23	130
18	27	144
19	32	158
20	37	173

A est lu à l'intérieur du tableau (dans le cadre rouge)

t est lu sur les bords de la table (dans le cadre bleu)



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Test de Kruskal-Wallis

Le test de Kruskal-Wallis est un test non para-métrique qui est utilisé lorsque l'on veut **déterminer s'il existe une différence entre plusieurs échantillons qui sont issus de populations indépendantes**. Il est le correspondant non-paramétrique du test de Fisher.

Hypothèses : **H_0 : il n'y a pas de différence entre les k populations**
H_a : au moins une des populations est différente des autres

La procédure comprend tout d'abord le classement de toutes les observations X_{ij} sans tenir compte des échantillons auxquels elles appartiennent. Puis on attribue le rang 1 à las plus petite valeur, le rang 2 à la deuxième valeur, ainsi de suite jusqu'au rang ***N*** qui correspond au nombre total d'observations. On calcul des rangs moyens si c'est nécessaire de la même façon que pour le test de Wilcoxon.

Le test statistique ***T*** est alors défini par : $\boldsymbol{T = \left(\frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1)}$, où $\boldsymbol{R_i}$ correspond à la somme des rangs attribués aux observations de l'échantillon i et $\boldsymbol{n_i}$ la taille de l'échantillon i.

Pour des $\boldsymbol{n_i}$ **> 5** ou **k > 3**, la statistique *T* du test de Kruskal-Wallis a une distribution asymptotique égale à celle du chi-carré ; la règle de décision est la suivante :

On rejette H_0 si T > t, où t est la valeur dans la table de la page 18 avec A = α et k-1 est 1 de moins que le nombre de populations.

Pour des $\boldsymbol{n_i}$ petits, on dispose de la table page 25 ; la règle de décision est la suivante :

On rejette H_0 si T > t, où t est le résultat lu à la ligne correspondant aux tailles des échantillons et à la colonne du α considéré.

Exemple :

Nous allons reprendre l'exemple du test de Fisher de la page 16 et voir si nous aboutissons au même résultat. Il s'agit, à un seuil de 5%, de tester 4 types de graisse en faisant cuire des donuts. Les quantités de graisse absorbées sont résumées dans le tableau suivant :

Graisse 1	Graisse 2	Graisse 3	Graisse 4
64	78	75	55
72	91	93	66
68	97	78	49
77	82	71	64
56	85	63	70
95	77	76	68

Les hypothèses sont :
H_0 : il n'y a pas de différence entre les 4 graisses
H_a : au moins une des graisses est différente des autres.
On classe les 24 observations par ordre croissant. On obtient un nouveau tableau avec entre parenthèses le rang de chaque observation en tenant compte des rangs moyens. En bas de chaque échantillon, il y a la somme des rangs attribués à cet échantillon.

Graisse 1	Graisse 2	Graisse 3	Graisse 4
64 (5.5)	78 (17.5)	75 (13)	55 (2)
72 (12)	91 (21)	93 (22)	66 (7)
68 (8.5)	97 (24)	78 (17.5)	49 (1)
77 (15.5)	82 (19)	71 (11)	64 (5.5)
56 (3)	85 (20)	63 (4)	70 (10)
95 (23)	77 (15.5)	76 (14)	68 (8.5)
R_1 = 67.5	R_2 = 117	R_3 = 81.5	R_4 = 34

On calcule T : $\boldsymbol{T} = \left(\frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1) = \left(\frac{12}{24(24+1)} \bullet \frac{67.5^2+117^2+81.5^2+34^2}{6}\right) - 3(24+1)$ = 11,81

La taille des échantillons étant supérieure à 5, la valeur dans le table du chi-carré avec k-1 = 4-1 = 3 et A = α = 0,05 est t = 7,81.

Comme T = 11,81 > 7,81 = t, on **rejette H_0** et on conclut qu'**au moins une des graisses est différente des autres**, ce qui est la même conclusion qu'avec le test de Fisher.

Taille des échantillons	∝ = 5 %	∝ = 1 %
3, 2, 2	4.71	
3, 3, 1	5.10	
3, 3, 2	5.22	6.26
3, 3, 3	5.60	6.50
4, 2, 1	4.94	
4, 2, 2	5.15	6.30
4, 3, 1	5.21	
4, 3, 2	5.42	6.35
4, 3, 3	5.73	6.75
4, 4, 1	4.93	6.67
4, 4, 2	5.45	6.90
4, 4, 3	5.60	7.14
4, 4, 4	5.70	7.60
5, 2, 1	5.00	
5, 2, 2	5.10	6.40
5, 3, 1	4.91	6.42
5, 3, 2	5.25	6.82
5, 3, 3	5.66	7.03
5, 4, 1	4.92	6.90
5, 4, 2	5.27	7.12
5, 4, 3	5.63	7.44
5, 4, 4	5.62	7.75
5, 5, 1	5.00	7.08
5, 5, 2	5.27	7.30
5, 5, 3	5.64	7.55
5, 5, 4	5.64	7.80
5, 5, 5	5.72	7.98