Les **surfaces minimales**

LA NATURE EST ÉCONOME

L'intérêt que les mathématiciens portent aux surfaces minimales vient d'une réflexion plus générale qui remonte à l'Antiquité : pourquoi la nature préfère une forme à une autre ? Comment en effet expliquer que les planètes sont sphériques, les

alvéoles d'abeilles hexagonales et les structures cristallines polyédriques ? Considérant l'Univers harmonieux, les Grecs tentaient de le décrire à l'aide de formes idéales, c'est-à-dire d'après la géométrie. Cependant, c'est aux XVIIe et XVIIIe siècles que sera élaboré un principe général régissant la nature. Cela débute avec les travaux de savants comme les frères Jacques et Jean Bernoulli, Christiaan Huygens et Pierre de Fermat sur les plus courts chemins et les chemins de moindre temps. Ces principes, s'appliquant en particulier à la mécanique et à l'optique, seront ensuite généralisés

par ***Gottfried Leibniz*** en un « principe de moindre action », selon lequel la nature agit toujours avec une économie de moyens. En d'autres termes, l'Univers ne fait jamais rien de superflu et agit avec le maximum d'efficacité. C'est dans ce contexte que deux surfaces minimales sont découvertes : la caténoïde et l'hélicoïde droit.

Un siècle plus tard, le physicien belge Joseph Plateau mènera d'importants travaux théoriques et expérimentaux sur le sujet à l'aide de films de savon.

Dans les années 80, l'informatique permettra d'effectuer d'autres progrès sur les surfaces minimales, grâce notamment aux travaux de Celso Costa, David Hoffman et William Meeks (avec la contribution informatique de James Hoffman).

UNE COURBURE MOYENNE NULLE

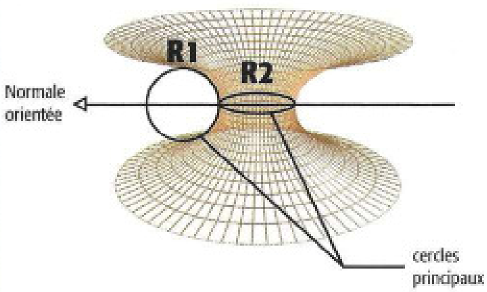
Une surface est minimale quand son aire est plus petite que celle de toutes les surfaces voisines

s'appuyant sur le même contour. En 1760, Joseph Louis de Lagrange établit une équation différentielle des surfaces minimales qui sera plus tard élargie par le géomètre français Jean-Baptiste Meusnier. Même si cette équation ne permet pas de trouver de nouvelles surfaces minimales, elle offre toutefois une caractérisation géométrique : une surface est minimale si en tout point régulier sa courbure moyenne est nulle.

Dans le cas d'un cercle, la courbure est caractérisée par l'inverse du rayon (1/r) et désignée par « K ». Donc, plus le rayon sera petit, plus la courbure sera forte. Pour les autres surfaces complexes courbées, en chaque point P d'une surface, on peut en général définir une normale orientée, perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point. Par cette normale passe une infinité de plans, appelés plans normaux. Chacun de ces plans coupe la surface, créant ainsi des sections normales de la surface. à chaque section normale correspond un cercle qui épouse le mieux la surface et dont le centre O se trouve sur la normale. La courbure en un point de cette surface est définie comme la moyenne des inverses des rayons de deux cercles (R1 et R2) tangents à la surface. La courbure sera positive si l'orientation du vecteur OP est la même que celle de la normale, négative dans le cas contraire.

En général, il existe un plan normal pour lequel le rayon d'un de ces cercles définit la courbure minimale et un autre plan pour lequel le rayon d'un autre cercle définit la courbure maximale. Ces deux plans, appelés plans principaux, sont mutuellement orthogonaux, comme l'a montré Euler. La courbure moyenne de la surface est obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la courbure minimale et de la courbure maximale (on les additionne puis on divise le résultat par deux). Une surface est donc minimale quand ses deux sections normales principales ont une courbure nulle (cas du plan) ou quand elles ont des courbures qui s'annulent (identiques mais où l'une est positive et l'autre négative, dans le cas des autres surfaces). Ainsi, au voisinage de chacun de ses points, une surface minimale non plane ressemble à une selle de cheval parfaitement symétrique.

La courbure moyenne d'une surface complexe courbée



À LA RECHERCHE DES SURFACES MINIMALES

À la suite de la découverte du calcul

infinitésimal par Gottfried Leibniz, les frères Jacques et ***Jean Bernoulli*** vont développer le calcul des variations qui consiste à rechercher des extrema (minima et maxima) sur une surface ou sur une courbe.

C'est dans ce contexte que les mathématiciens et géomètres vont intensivement s'intéresser aux surfaces minimales. Euler et Meusnier découvriront les deux premières – la caténoïde et l'hélicoïde droit –, ouvrant la voie aux travaux théoriques de Lagrange, Monge, Legendre quelques années plus tard, et aux nombreuses découvertes du XIXe siècle.

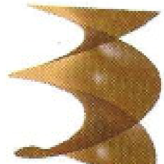
LA CATÉNOÏDE

C'est Euler qui, en 1744, découvre la première surface minimale (hormis le plan) : la caténoïde, qui est une surface engendrée par une chaînette que l'on fait tourner autour d'un axe. Autrement dit, la caténoïde est une surface de révolution dont la méridienne est la chaînette, la chaînette étant la courbe que décrit un fil suspendu librement par ses deux extrémités. L'une des propriétés de la chaînette est d'être brachystochrone, c'est-à-dire qu'elle représente la courbe de descente la plus rapide pour un point pesant sur le fil. La caténoïde est la seule surface de révolution non plane qui soit minimale. C'est également la forme que prend un film de savon entre deux anneaux circulaires parallèles que l'on aura au préalable trempé dans une solution savonneuse. Toutefois, si l'on écarte trop les deux anneaux l'un de l'autre, le film de savon se rompt pour former un disque sur chaque anneau. Par contre, à une certaine distance proche, deux caténoïdes différentes seront susceptibles de s'appuyer sur eux, mais une seule est stable, l'autre étant plus incurvée.

Les premières surfaces minimales

La caténoïde

L'hélicoïde



L'HÉLICOÏDE

Trente ans après Euler, Jean-Baptiste Meusnier poursuit les recherches sur les surfaces minimales et en trouve une deuxième : l'hélicoïde droit. En fait, l'hélicoïde, qui ressemble à un ***escalier en colimaçon***, était

déjà une forme connue, mais c'est Meusnier qui a découvert que sa courbure moyenne était nulle. L'hélicoïde droit est, avec le plan, la seule surface minimale qui soit réglée, c'est-à-dire qu'elle est engendrée par le déplacement d'une droite appelée génératrice. Le principe de construction est simple. Il suffit de prendre un segment de droite (génératrice) perpendiculaire à un axe et de le faire tourner à vitesse constante autour de cet axe, tandis que le point d'intersection entre le segment de droite et l'axe se déplace à vitesse constante le long de l'axe. Au siècle suivant, le mathématicien allemand Heinrich Scherk montrera comment on peut obtenir l'hélicoïde par la transformation continue d'une caténoïde. Pour cela, il faut couper la caténoïde suivant une méridienne et séparer les bords de telle sorte qu'on lui fasse subir une torsion. Ce qui est intéressant, c'est que toutes les surfaces intermédiaires obtenues lors de cette transformation sont aussi minimales.

LE SAVON AU SECOURS DES MATHÉMATICIENS

Entre 1850 et 1873, Joseph Plateau a étudié les surfaces minimales à l'aide de films de savon. En fait, il s'agit d'un outil idéal car les films de savon choisissent en général spontanément la surface minimale pour relier les différentes parties d'un contour sur lequel ils s'appuient. Cela s'explique par la tension superficielle qui traduit un principe plus général : celui de la minimalisation de l'énergie d'un système. Étant donné que l'énergie potentielle est proportionnelle à l'aire d'une surface donnée, un film de savon sera en équilibre stable (qui utilise une énergie potentielle minimale) si sa surface est la plus petite par rapport à toute autre subissant les mêmes contraintes. D'autre part, caractériser, en géométrie, une surface minimale en raison de sa courbure moyenne nulle, équivaut à dire en physique que la surface minimale doit avoir une pression identique sur les deux faces. Cela nous conduit à distinguer, d'une part, les surfaces stables (d'énergie potentielle minimale, comme une bulle de savon à courbure moyenne constante et différente de zéro, avec une pression intérieure plus importante que la pression extérieure) et, d'autre part, les surfaces de courbure moyenne nulle, associées à des états stationnaires de l'énergie potentielle de tension superficielle.

Surfaces célèbres

1744
Euler découvre la caténoïde, première surface minimale.

1776
Meusnier découvre l'hélicoïde droit.

1835
Découverte de la surface de Scherk.

1864
Découverte de la surface d'Enneper.

1865
Découverte de la surface de Schwarz.

1868
Découverte de la surface de Riemann.

1970
Schoen découvre la gyroïde.

1980
Luquesio Jorge et Meeks découvrent la trinoïde.

1982
Découverte de la surface de Costa, Hoffman et Meeks.

Le cable de bordure frontale **le plus long**

Longueur de l'unique cable de bordure frontale du stade olympique de Munich

435
mètres

DES FILMS DE SAVON AUX MEMBRANES BIOLOGIQUES

Les films de savon et leur assemblage en 2D (les bulles de savon) ou en 3D (« mousses ») sont depuis longtemps, utilisés comme modèle pour l'étude des cellules et des tissus biologiques. En effet, il existe une forte analogie structurelle entre le film de savon et la membrane phospholipidique des cellules vivantes. De fait, les membranes biologiques, comme les films de savon, sont constituées de molécules aux têtes hydrophiles, chargées négativement, associées à des queues hydrophobes, chargées positivement. Par la loi de l'attraction, la tête hydrophile est tournée vers le milieu intérieur cellulaire mais aussi vers le milieu extérieur, tous les deux aqueux et chargés positivement. La queue hydrophobe elle, est tournée vers l'intérieur de la membrane cellulaire, chargée négativement. Dans un film de savon, la situation est similaire : les têtes hydrophiles sont au contact de l'eau qui contient des ions positifs en solution, les queues hydrophobes sont au contact de l'air. Par ailleurs, dans une bulle de savon, les queues hydrophobes se disposent vers l'extérieur et l'intérieur du film de savon puisqu'il y a de l'air des deux côtés. Un film de savon et une membrane cellulaire ont tous les deux une structure en bicouche. Dans les deux cas, ce sont les queues hydrophobes de la bicouche qui s'opposent à l'étirement et maintiennent ainsi l'intégrité physique de la membrane.
Cette analogie structurelle entre les membranes biologiques et les films de savon va, par conséquent, être accompagnée d'une similarité géométrique. Les films de savon consituent donc, par leurs propriétés physiques, un modèle pratique pour l'étude des propriétés d'agencement des cellules dans un organisme vivant.

De ses travaux sur les films de savon, Joseph Plateau a tiré des lois. L'une d'entre elles dit que si l'on applique un film sur une surface libre, il forme nécessairement un angle de 90 ° par rapport à celle-ci. Une autre dit que les surfaces minimales ne peuvent se rencontrer le long d'une ligne que par trois, formant ainsi entre elles des angles de 120 °. Pour illustrer ces lois, étudions le comportement d'un film de savon. Prenons un dispositif expérimental, dans lequel 4 petits axes en acier (des épingles ou des clous) relient deux plaques de plexiglass (ou de verre) distantes l'une de l'autre de 1 à 2 cm. Lorsqu'on trempe ces plaques dans une solution savonneuse, un film de savon va relier les quatre axes en se disposant spontanément suivant les lignes d'un réseau minimum. Ce dernier résulte du calcul du plus court trajet possible (ou surface minimale) entre ces 4 axes. On remarque que le film de savon se comporte bien d'après les lois énoncées par Plateau : le film forme un angle de 90 ° avec la surface de la plaque, et les lignes constitutives du film de savon (A, B et C) forment toujours un angle de 120 ° entre elles.

LE PROBLÈME DE PLATEAU

Au cours de ses travaux, Joseph Plateau s'était rendu compte qu'au moins un film de savon pouvait s'appuyer sur tout contour fermé simple de forme quelconque, à la condition que celui-ci ne soit pas trop grand. Toutefois, il voulait savoir si ce problème résolu de façon physique pouvait être résolu mathématiquement, une question déjà évoquée par Lagrange. C'est ainsi qu'il pose un problème qui porte encore son nom : peut-on déterminer avec un modèle mathématique qu'il existe au moins une surface minimale s'appuyant sur une courbe fermée donnée ? Grâce à l'outil des nombres et fonctions complexes, les mathématiciens vont commencer à trouver certaines solutions.

Résolution de cas particuliers

Les premiers progrès relatifs à ce problème sont réalisés sur les cas particuliers plus simples où le contour est formé de lignes droites. En 1860-1861, le mathématicien allemand Bernhard Riemann étudie différents contours, comme par exemple deux droites infinies qui ne sont pas dans le même plan, trois droites placées de façon quelconque dans l'espace ou encore un quadrilatère dont les côtés sont aussi les arêtes d'un tétraèdre régulier. Cependant, ses solutions ne seront publiées que tardivement, après la présentation des résultats obtenus par Karl Weierstrass sur le même type de sujet et confirmant ceux de Riemann. En 1867, sans connaître les travaux de Bernhard Riemann sur ce même problème, Hermann Schwarz est le premier à résoudre le problème de Plateau pour le cas où le contour n'est pas un plan, en utilisant un quadrilatère formé de quatre des six côtés d'un tétraèdre.

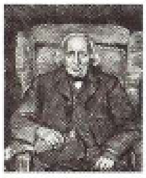
Comportement d'un film de savon

Solution générale

Pour résoudre le problème de Plateau dans le cas général où le contour est une courbe quelconque, il faut attendre 1931, date à laquelle le jeune mathématicien américain Jesse Douglas apporte une réponse pour le cas spécifique du disque. Peu de temps après et de façon indépendante, le mathématicien hongrois Tibor Radó apportera également une solution mais avec une approche tout à fait différente. Ainsi, il est prouvé qu'il existe toujours au moins une surface minimale pour un contour fermé donné, mais on ne sait pas encore combien il y en a, ni comment les déterminer.

LA FORMULE DE WEIERSTRASS

L'analyse complexe, en développement au XIXe siècle, va permettre à ***Weierstrass*** de trouver en 1866 une



formule de représentation capable de décrire, en principe, n'importe quelle surface minimale. Néanmoins, il est difficile avec cette formule de déterminer quelle forme géométrique aura la surface en question. Entre autres, de savoir si elle est plongée ou immergée. Par exemple, la surface d'Enneper est dite immergée car elle se recoupe, alors que les surfaces de Scherk, Riemann et Schwarz sont appelées plongées car elles ne se recoupent jamais. Reste que la méthode de Weierstrass est satisfaisante pour des petites portions de surface et que l'équation de Weierstrass démontre qu'il existe une grande quantité de surfaces minimales.

SURFACES MINIMALES PÉRIODIQUES

C'est en travaillant sur le problème de Plateau, que Schwarz va découvrir deux principes importants : 1) si une portion de la frontière d'une surface minimale s'appuie sur une droite, son image symétrique par rapport à cette droite est aussi une surface minimale, et, de plus, la réunion de ces deux surfaces forme une surface minimale ; 2) si une surface minimale rencontre un plan à angle droit, son image symétrique par rapport à ce plan est une surface minimale, la réunion de ces deux surfaces formant une surface minimale. À partir de ces constatations ainsi que des lois de Plateau, il fut établi que l'on pouvait étendre à l'infini des surfaces minimales par symétries successives. On les a appelées surfaces minimales périodiques. Grâce à ces 2 principes, Schwarz construira deux nouvelles surfaces minimales triplement périodiques : la première s'appuie sur un quadrilatère et la deuxième, connue sous le nom de surface de Gergonne, s'appuie sur deux diagonales orthogonales situées sur deux faces opposées d'un cube. Bien d'autres surfaces minimales périodiques vont être découvertes par la suite, comme la gyroïde trouvée par Alan Schoen en 1970 et qui est la seule à posséder trois jonctions. En effet, jusque dans les années 80, les seules surfaces minimales non périodiques connues étaient le plan et la caténoïde.

TOPOLOGIE ET INFORMATIQUE

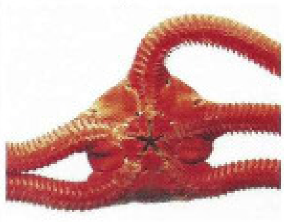
La topologie et l'informatique vont révolutionner la vision et l'étude des surfaces minimales. Les deux vont permettre de découvrir de nouvelles familles de surfaces minimales et de réaliser ce qu'il était impossible de faire avec des films de savon, en raison de leur manque de stabilité : étudier des surfaces sans bord (complètes) en les étendant vers l'infini et faire des trous en enlevant un ou plusieurs points. Ainsi, on arrive à obtenir de nouvelles surfaces minimales grâce à certaines transformations. On peut compliquer des surfaces minimales en ajoutant des « anses » ou des « tunnels ». En 1980, Luquesio Jorge et William Meeks s'inspirent de la caténoïde en lui ajoutant une troisième extrémité en forme d'entonnoir : cette nouvelle surface minimale sera baptisée trinoïde. Elle est équivalente à une sphère moins trois points. Toutefois, les surfaces de ce type sont immergées car elles se recoupent. Il faut souligner que tous ces progrès n'auraient pas eu lieu sans l'informatique graphique car, comme on l'a dit précédemment, on ne peut pas savoir si une surface obtenue avec l'équation de Weierstrass est immergée ou plongée. Ce n'est qu'en 1984 qu'un jeune informaticien américain, James Hoffman, va inventer un langage informatique – le Visual Programming Language (VPL) – permettant de visualiser les surfaces minimales calculées par les mathématiciens.

LA SURFACE DE COSTA-HOFFMAN-MEEKS

En 1961, Robert Osserman établit un certain nombre de conditions nécessaires pour obtenir une surface minimale complète et plongée, autre que le plan et la caténoïde : il faut qu'elle soit munie de k poignées (c'est-à-dire un tore ou « anneau » à k trous) moins r points. Vingt ans plus tard, Jorge et Meeks vont préciser le type de formes qu'il faut chercher : ces surfaces, quand on s'éloigne vers l'infini, doivent avoir des nappes assez plates, comme la caténoïde, et parallèles (contrairement à la trinoïde). Un élève de Jorge, le Brésilien Celso Costa, utilise les formules de Weierstrass pour imaginer une surface équivalente à un tore à un trou moins trois points. Elle comporte donc trois nappes parallèles mais on n'en sait pas plus sur le reste de sa forme, en l'occurrence si elle se coupe ou non au voisinage de l'origine. En étudiant cette surface, David Hoffman se rend compte qu'elle comprend deux droites orthogonales et que, selon le principe de Schwarz, la surface est symétrique par rapport à chacune de ses droites. Ainsi, il suffit de prendre une partie de la surface pour savoir s'il n'y a pas d'intersections, ce qu'il va démontrer peu de temps après, et de vérifier que les symétries n'en introduisent pas de nouvelles, ce qui est le cas. À sa demande, J. Hoffman produira une image de la surface. David Hoffman et Meeks n'en restent pas là. En fait, ils veulent savoir s'il existe d'autres surfaces construites sur le même principe et équivalentes à un tore à k trous moins trois points. C'est le cas et il y en a même une infinité que l'on peut obtenir par déformations successives. D'autres surfaces plongées, cette fois à quatre nappes, voire une infinité, furent découvertes ultérieurement et ce domaine de recherche est encore aujourd'hui très actif.

L'INTÉRÊT DES SURFACES MINIMALES

Dès qu'il y a membrane, cloison ou interface entre deux milieux différents, l'étude des surfaces minimales (et de leurs cousines, les surfaces à courbure moyenne constante non nulle) est d'un grand intérêt. Par exemple, en biologie, on s'est intéressé aux similitudes qui existaient entre certains types de surfaces minimales périodiques et les cloisons séparant matière organique et inorganique dans le ***squelette des échinodermes*** (embranchement



d'animaux marins comprenant, entre autres, les étoiles de mer, les ophiures, les oursins, les crinoïdes et les holothuries).
De même, les physiciens des solides ont utilisé des surfaces minimales comme modèle d'organisations moléculaires ou d'interfaces. C'est ainsi que des chercheurs américains ont trouvé de surprenantes similarités entre des images de surfaces minimales triplement périodiques et des structures complexes d'interface tridimensionnelle entre deux polymères.
En cristallographie, l'étude des surfaces minimales peut aussi être fructueuse. Par exemple, les cristaux de zéolithe possèdent une structure de silicone, d'aluminium et d'atomes d'oxygène, et les espaces restants sont remplis d'eau. Une fois ces cristaux chauffés, l'eau s'évapore et laisse un squelette cristallin très poreux dont les unités de construction tétraédriques ont la forme d'une surface minimale de Schwarz.
Il existe également un autre domaine où les surfaces minimales peuvent être d'une grande aide : l'architecture. Il suffit de rappeler un exemple bien connu du grand public : le toit du ***stade olympique de Munich***, ainsi que les toits du stade athlétique et de la

piscine olympique, conçus au début des années 70 par l'architecte allemand Frei Otto. Ces structures minimales ont été spécialement choisies dans le but d'utiliser une quantité minimale de matériaux.