# Chapitre 6

# Tableaux de signes et inéquations

## 6.1. Le domaine de définition d'une fonction réelle

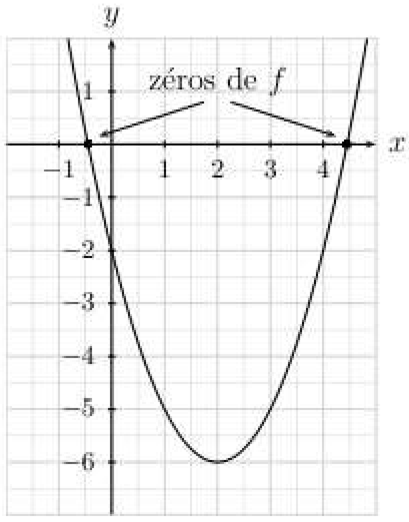
Il s'agit du plus grand ensemble de nombres sur laquelle la fonction réelle $f(x)$ est définie. En général, on note $D$ ou $D_f$ pour le domaine de définition de la fonction $f$ et dans ce cas la fonction $f$ se note $f : D \to \mathbb{R}$.

**Exemples**

1. Le domaine de définition de $f(x) = x^2$ est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Le domaine de définition de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (car on ne doit pas diviser par 0).
3. Le domaine de définition de $h(x) = \dfrac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$ est $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ (car on ne doit pas diviser par 0).

## 6.2. Les zéros d'une fonction

**Définition**




Soit $f : D \to A$ une fonction réelle ($D, A \subset \mathbb{R}$).

Les *zéros* de $f$ sont les éléments de $D$ qui sont envoyés sur 0 par la fonction $f$. L'*ensemble des zéros de $f$* est :

$$Z_f = \{x \in D : \underbrace{f(x) = 0}_{\text{équation à résoudre pour trouver les zéros de } f}\}$$

**Exemples**

1. L'ensemble des zéros de la fonction donnée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x) = x^2 - 4x - 2$, est :

   $$Z_f = \left\{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\right\} \qquad \text{(merci à Viète)}$$

2. L'ensemble des zéros de $g(x) = \dfrac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$ est $Z_g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 4\}$.

## 6.3. La droite réelle

On représente les nombres réels par une droite, appelée la *droite réelle*.


### 6.3.1. Les intervalles

Les *intervalles* sont des notations simples et efficaces pour décrire certains sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Ils sont notamment utilisés lors de résolution d'inéquations (voir page 5).

Dans le tableau ci-dessous, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que $a < b$, chacune des lignes décrit le même sous-ensemble de trois façons équivalentes.

| Les huit types d'intervalles | | |
|---|---|---|
| Sous-ensemble | Intervalle | Représentation graphique |
| $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ | $[a, b]$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ | $[a, b[$ ou $[a, b)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ | $]a, b]$ ou $(a, b]$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ | $]a, b[$ ou $(a, b)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : x > b\}$ | $]b, \infty[$ ou $(b, \infty)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant b\}$ | $[b, \infty[$ ou $[b, \infty)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ | $]-\infty, a[$ ou $(-\infty, a)$ |  |
| $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ | $]-\infty, a]$ ou $(-\infty, a]$ |  |

Il est aussi possible d'utiliser l'intervalle $]-\infty, \infty[$ pour décrire l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$, mais dans ce cas cela perd le côté pratique et simple.

## 6.4. Tableau de signes d'une fonction continue

**Définition**

On dit qu'une fonction $f$ est *continue* si on peut dessiner son graphe (au-dessus de son domaine de définition) sans lever le crayon.

**Tableau de signes**

Le but d'un *tableau de signes* d'une fonction est de pouvoir indiquer le plus simplement possible lorsque la fonction est positive (son graphe est en dessus de l'axe des $x$) ou négative (son graphe est en dessous de l'axe des $x$).

Pour faire un tableau de signes, on utilise le fait qu'une fonction CONTINUE ne peut changer de signe que lorsque l'un des deux cas suivants se produit.

1. La fonction a un zéro.
2. Un nombre réel n'est pas dans le domaine de définition de la fonction

Ainsi pour établir le tableau de signes d'une fonction CONTINUE, on procède en trois étapes :

1. On commence par FACTORISER l'expression fonctionnelle de la fonction.
2. Puis on cherche le domaine de définition et les zéros de la fonction. Ce qui permet de trouver les valeurs où un changement de signes peut se produire. On note ces valeurs dans le tableau de signes en laissant une colonne vide à gauche et à droite de ces valeurs.
3. Il reste ensuite à trouver le signe de la fonction entre ces valeurs (la méthode la plus rapide (et ne nécessitant pas la calculatrice) est expliquée sur la page suivante).

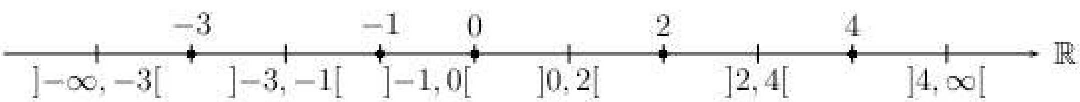
Pour bien comprendre, construisons le tableau de signes de la fonction déjà factorisée :

$$f(x) \ = \ \frac{x^2\,(x+3)\,(x-4)}{(x+1)^2\,(x-2)}$$

On voit immédiatement que le domaine de définition de $f$ est $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ et que l'ensemble des zéros de $f$ est $Z_f = \{-3, 0, 4\}$. Le tableau de signes est le suivant :

| $x$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\lightning$ | $+$ | $0$ | $+$ | $\lightning$ | $-$ | $0$ | $+$ |

La première ligne (celle des $x$) est une façon plus ciblée de représenter la droite réelle.




De sorte qu'on ait une partition de $\mathbb{R}$ (une colonne par ensemble) :

$\mathbb{R} = \,]-\infty, -3[ \cup \{-3\} \cup \,]-3, -1[ \cup \{-1\} \cup \,]-1, 0[ \cup \{0\} \cup \,]0, 2[ \cup \{2\} \cup \,]2, 4[ \cup \{4\} \cup \,]4, \infty[$

La deuxième ligne (celle de $f(x)$) indique si la fonction est nulle, négative (symbole $-$), positive (symbole $+$) ou non définie (symbole $\lightning$).

**La méthode la plus rapide pour compléter les signes d'un tableau de signes**

Pour simplifier, on va raisonner sur la base de l'exemple précédent (et ceci sans calculatrice). On commence par regarder le signe de $f(x)$ lorsque $x \in ]-\infty, -3[$ (cela correspond à la deuxième colonne du tableau). En utilisant la règle des signes, on a :

$$f(\text{ un } x \text{ plus petit que } -3\ ) \ = \ \frac{+\ -\ -}{+\ -} \ = \ -$$

Ainsi la fonction est négative lorsque $x \in ]-\infty, -3[$ (il est peut être plus aisé de penser à un nombre extrêmement loin dans les négatifs.

Ensuite, on remonte la droite réelle vers les nombres positifs. Pour trouver le signe correspondant à $f(x)$ pour $x \in ]-3, -1[$, on peut tester avec un nombre quelconque dans cet intervalle, comme $-2$ par exemple. On a :

$$f(\ -2\ ) \ = \ \frac{+\ +\ -}{+\ -} \ = \ +$$

On remarque ainsi que $f(-2)$ est positif. Néanmoins, si on observe plus attentivement ce qui s'est passé, on remarque que seul le signe en haut au milieu a changé. C'est le signe de $(x+3)$. Ce n'est pas un hasard :

> DANS UN TABLEAU DE SIGNES, SEUL LE TERME RESPONSABLE DE LA PRÉSENCE DE LA VALEUR CORRESPONDANTE DANS LE TABLEAU EST RESPONSABLE D'UN ÉVENTUEL CHANGEMENT DE SIGNE !

Voici comment on peut raisonner pour trouver les signes :

| On cherche ... | On trouve ... | Pourquoi l'a-t-on trouvé |
|---|---|---|
| Le premier signe tout à gauche | la fonction est négative | on a calculé le signe de $f(x)$ pour une valeur de $x$ plus petite que $-3$ |
| Si $f(x)$ change de signe en $-3$ | le signe change (la fonction est positive) | on sait que $(x+3)$ change de signe en $-3$ |
| Si $f(x)$ change de signe en $-1$ | le signe ne change pas (la fonction est positive) | on sait que $(x+1)^2$ ne change pas de signe |
| Si $f(x)$ change de signe en 0 | le signe ne change pas (la fonction est positive) | on sait que $x^2$ ne change pas de signe |
| Si $f(x)$ change de signe en 2 | le signe change (la fonction est négative) | on sait que $(x-2)$ change de signe en 2 |
| Si $f(x)$ change de signe en 4 | le signe change (la fonction est positive) | on sait que $(x-4)$ change de signe en 4 |

Avec cette méthode, on a même un moyen pour vérifier si on a fait une erreur (en fait un nombre impair d'erreurs). En effet, il suffit de vérifier le signe tout à droite en calculant le signe de $f(x)$ pour une valeur de $x$ plus grande que 4.

À titre indicatif, voici le graphe de cette fonction (le lecteur devrait s'apercevoir que faire un tableau de signes est beaucoup plus rapide que d'esquisser le graphe de la fonction).

Cette fonction a deux asymptotes verticales et une asymptote oblique (le comportement asymptotique des fonctions sera étudié en deuxième année).