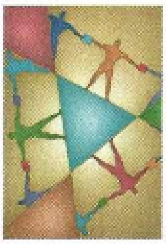
Triangle : théorèmes et propriétés

MESURE DE L'ESPACE

La géométrie, comme son nom l'indique, a fait ses premières apparitions pour répondre à un besoin pratique de mesurer l'espace, aussi bien pour le découpage des parcelles de terrain que pour la construction de certains édifices. On rencontre déjà en Égypte ancienne les débuts d'une science géométrique offrant de multiples propositions sur les propriétés du triangle. La tradition veut que la géométrie grecque naisse vers le VIe siècle avant J.C avec Thalès de Milet et qu'elle se développe avec Pythagore de Samos au Ve siècle avant J.C. Ces deux philosophes, incontournables lors de l'étude du triangle, ont laissé des théorèmes portant leurs noms respectifs.

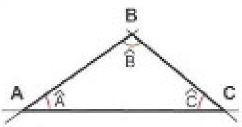
QU'EST-CE QU'UN TRIANGLE ?

Définition



Un ***triangle*** peut être défini comme une figure géométrique plane formée par trois points non alignés et par l'ensemble des trois segments qui relient ces points. Il est également possible de définir le triangle comme un polygone (figure plane formée par une ligne brisée fermée) à trois côtés.

Par convention, on nomme un triangle par trois lettres successives de l'alphabet (ex : ABC, IJK ou MNO). Dans un ***triangle ABC***, les trois points A, B et C sont les sommets du triangle et les segments qui relient ces trois points [AB], [BC] et [AC] sont appelés les côtés du triangle.



Le triangle de sommets A, B et C peut s'appeler de six manières différentes : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ou CBA. Le triangle dispose également de trois angles qui portent les noms des sommets respectifs coiffés d'un accent circonflexe.

Ex : À qui peut aussi s'écrire BÂC.

Un angle est dit aigu si sa mesure est inférieure à 90°, droit si sa mesure vaut 90° et obtus lorsque cette mesure dépasse 90°.

Propriétés

• En géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.

Dès lors, un triangle ne peut pas présenter plus d'un angle droit ou obtus. Un triangle est donc constitué de deux angles aigus et son nom varie selon la nature du troisième angle. Si celui-ci est également aigu, le triangle est dit acutangle, s'il est obtus, on parle de triangle obtusangle et s'il est droit, le triangle est alors triangle rectangle.

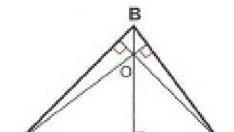
• Dans un triangle, la longueur de n'importe quel côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Cette propriété est connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Dans un triangle ABC, nous avons donc :

AC<AB+BC, BC<AB+AC et AB<AC+BC.

DES DROITES REMARQUABLES

On retrouve dans n'importe quel triangle quatre droites particulières : les hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices. Chacune de ces droites existe en trois exemplaires puisqu'elles sont spécifiques aux trois côtés ou aux trois angles du triangle. Chacune d'entre elles a ses propriétés.

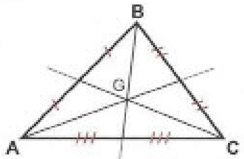
La hauteur



Une ***hauteur*** d'un triangle est une droite perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé à ce côté. On appelle pied de la hauteur, l'intersection de la hauteur et du côté opposé. Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre. Par convention, on nomme ce point O.

La médiane

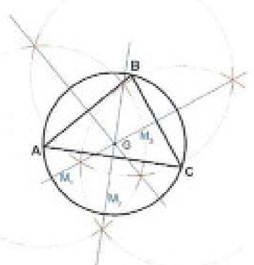
Une ***médiane*** d'un triangle est une droite qui passe par le milieu d'un côté et par le sommet opposé. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé le centre de gravité (nommé G). Toute parallèle à un côté d'un triangle est partagée en deux segments de même longueur par la médiane issue du sommet opposé.



La médiatrice

Une ***médiatrice*** d'un triangle est une médiatrice d'un de ses côtés, c'est-à-dire une droite qui coupe perpendiculairement un de ses côtés en son milieu. Tous les points d'une médiatrice d'un segment sont à égale distance des extrémités de ce segment. Les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

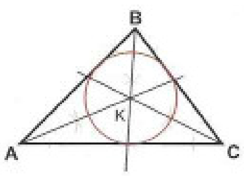
Le cercle circonscrit est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.



Comment construire une médiatrice ?

Dans un triangle ABC, pour tracer la médiatrice du côté [AB], tracer un cercle de centre A et un cercle de centre B de même rayon et se coupant. Les deux points d'intersections sont à égale distance de A et B. Tracer à présent la droite qui joint ces deux points, vous obtenez la médiatrice de [AB].

La bissectrice



Une ***bissectrice*** d'un triangle est une bissectrice d'un de ses angles, c'est-à-dire une demi-droite issue d'un des sommets partageant l'angle en deux parties égales. Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle appelé cercle inscrit dans le triangle.

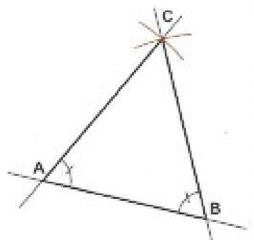
Comment construire une bissectrice ?

Dans un triangle ABC, pour tracer la bissectrice de l'angle, tracer un cercle de centre A qui coupe [AC] et [AB] en deux points M et M'. Tracer ensuite deux arcs de cercle de centre M et M' de rayon identique. Tracer à présent la droite qui joint le sommet A au point d'intersection des deux arcs, vous obtenez la bissectrice de l'angle.

DES TRIANGLES PARTICULIERS

Toutes les définitions et propriétés que nous avons vues jusqu'à maintenant sont valables pour n'importe quel triangle. Il existe cependant des triangles particuliers qui ont des caractéristiques et des propriétés supplémentaires.

Le triangle isocèle



Un ***triangle isocèle*** est un triangle qui a deux côtés de même longueur. Dans un triangle isocèle, le sommet dont sont issus les deux côtés égaux est appelé sommet principal du triangle. Le côté qui n'a pas la même longueur que les deux autres, celui opposé au sommet principal, est appelé base du triangle.

Propriétés du triangle isocèle

Les angles associés à la base du triangle isocèle sont de même mesure.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi bissectrice de l'angle relatif au sommet principal et médiatrice et médiane relatives à la base.

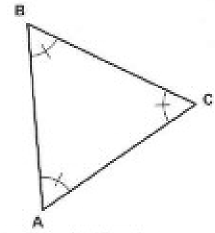
Ainsi, dans un triangle ABC isocèle en B, la hauteur issue de B est également la bissectrice de l'angle B ainsi que la médiane et la médiatrice relatives au côté [AC].

Comment construire un triangle isocèle ?

Tracer un segment [AC] puis deux arcs de cercle de centre A et C de même rayon. On note B le point d'intersection des arcs de cercle. Tracer [AB] et [BC], on obtient un triangle isocèle en C.

Le triangle équilatéral

Un ***triangle équilatéral*** est un triangle qui a trois côtés égaux.



Propriétés du triangle équilatéral

Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, ils mesurent tous 60°.

Toute hauteur est aussi bissectrice de l'angle considéré et médiane et médiatrice relatives au côté opposé à l'angle considéré.

Comment construire un triangle équilatéral ?

Tracer un segment [AB] puis deux arcs de cercles de centre A et B et rayon AB. On note C le point d'intersection des deux arcs. Tracer [AC] et [BC], on obtient un triangle équilatéral ABC.

Le triangle rectangle

Comme nous l'avons vu au début de cette fiche, le triangle rectangle est un triangle qui présente un angle droit, les deux autres angles étant forcément aigus. Le côté opposé à l'angle droit est conventionnellement appelé hypoténuse, les deux autres côtés sont appelés côtés de l'angle droit. Le triangle rectangle est le triangle dans lequel s'illustre le célèbre théorème de Pythagore que nous étudierons par la suite.

Propriétés du triangle rectangle

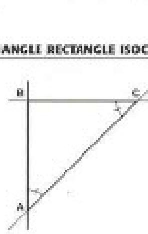
Les angles aigus du triangle rectangle sont complémentaires, c'est-à-dire que leur somme vaut 90°.

Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Comment tracer un triangle rectangle ?

Tracer un segment [AB] puis une perpendiculaire à [AB] qui passe par B. Sur cette perpendiculaire on place ensuite un point C. Tracer le segment [BC], on obtient un triangle rectangle en B.

Le triangle rectangle isocèle



Un triangle peut être ***rectangle et isocèle***. Dans ce cas les deux côtés égaux sont issus du sommet où se situe l'angle droit et les deux angles aigus mesurent 45°.

La démarche de construction est la même que celle du triangle

Quelques dates

VIe siècle av. J.C

Naissance de la géométrie grecque.

447 av. J.C

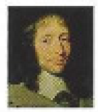
Construction du Parthénon à Athènes.

300 av. J.C

Euclide démontre les théorèmes de Thalès et de Pythagore dans Les Éléments.

1654

Présentation du triangle de Pascal.



1745

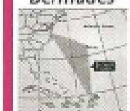
Réalisation de la première carte de France par triangulation.

1958

Présentation du triangle de Penrose aussi appelé tribarre ou tripoutre.

Le triangle le plus mystérieux

Le triangle des Bermudes



Plus de

140

avions et navires ont disparus dans cette zone.

rectangle en plaçant le point C de façon à ce que AB=AC.

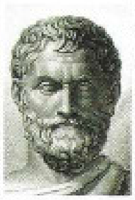
Le triangle d'or

Le triangle d'or est un triangle isocèle dont le rapport du côté sur la base est égal au nombre d'or. Ce nombre est la valeur d'une proportion que l'on peut qualifier de naturelle. Les Égyptiens puis les Grecs ont très vite été inspirés par ce nombre synonyme d'harmonie et d'esthétique. On le note ϕ et sa valeur exacte est $(1+\sqrt{5})/2$ soit approximativement 1,618033… Il existe deux types de triangle d'or : celui dont le rapport côté/base vaut ϕ et que l'on appelle aussi triangle d'argent et celui dont le rapport base/côté vaut ϕ. Dans le premier cas, le triangle d'or est un triangle isocèle aigu et ses angles mesurent 72°, 72° et 36°, dans le deuxième cas, c'est un triangle isocèle obtus dont les mesures d'angles sont 36°, 36° et 108°.
On retrouve le nombre d'or dans de nombreux domaines, en géométrie bien sûr, mais également en peinture et en architecture. Il semblerait que le sculpteur et architecte grec Phidias se

soit attaché à respecter cette proportion divine lors de la construction du ***Parthénon à Athènes***.
En effet, le rapport entre la largeur et la hauteur de l'édifice correspond au nombre d'or, et le toit coiffant ce monument présente les proportions d'un triangle d'or.

THÉORÈMES

Les deux théorèmes majeurs dans l'étude du triangle portent les noms de deux grands philosophes et mathématiciens grecs, Pythagore de Samos et ***Thalès de Milet***.

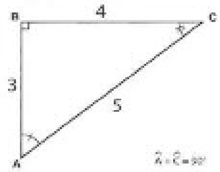


Curieusement ces théorèmes n'ont pas été découverts par Thalès et Pythagore puisqu'ils étaient déjà connus des Babyloniens environ mille ans auparavant. Les deux hommes se sont néanmoins penchés sur la démonstration de ces théorèmes et l'on raconte que Thalès appliqua le théorème qui porte aujourd'hui son nom pour mesurer la

hauteur de la ***grande pyramide de Kheops***.

Le théorème de Pythagore

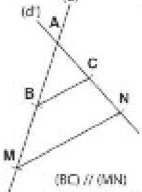
Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. Autrement dit, dans un triangle ABC rectangle en A, $BC^2=AB^2+AC^2$.
Ce théorème permet de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle lorsque l'on connaît la longueur des deux autres.



La réciproque du théorème de Pythagore permet quant à elle de démontrer qu'un triangle est rectangle ou ne l'est pas. On l'énonce de la façon suivante : Si dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle. Ainsi, si $AB^2+AC^2=BC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A.

Le théorème de Thalès

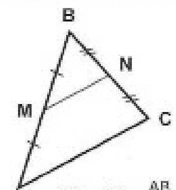
La configuration de Thalès est constituée de deux triangles ayant deux côtés en commun, et donc un sommet commun, les troisièmes côtés étant parallèles. Deux configurations sont possibles : soit un triangle est contenu dans le deuxième (notre exemple), soit les deux triangles sont opposés par le sommet. Ainsi considérons deux droites (d) et (d') sécantes en A, B et M deux points de (d) et C et N deux points de (d'). Selon le théorème de Thalès, si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors AM/AB=AN/AC=MN/BC.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Le ***théorème de Thalès*** permet de calculer des longueurs. Pour pouvoir l'utiliser, il faut avoir des parallèles et connaître des longueurs de segments. La réciproque du théorème de Thalès permet quant à elle de démontrer que deux droites sont parallèles ou non. On l'énonce de la façon suivante : Si dans un triangle ABC, on a deux points M et N qui appartiennent respectivement aux segments [AB] et [AC] tels que AM/AB=AN/AC, alors (MN) est parallèle à (CD).

Le théorème des milieux

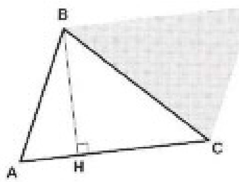


$$MA = MB = \frac{AB}{2}$$

Le ***théorème des milieux*** est un cas particulier de la réciproque du théorème de Thalès. Dans un triangle, si un segment a pour extrémités les milieux de deux côtés, il est alors parallèle au troisième côté et sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté. Ainsi, dans un triangle ABC, si M et N sont les milieux respectifs de [AB] et [AC] alors (MN) est parallèle à (BC) et MN=BC/2.
Le théorème des milieux permet de montrer que deux droites sont parallèles, de calculer et comparer des longueurs mais aussi de montrer qu'un point est le milieu d'un segment. En effet, si M est le milieu de [AB] et (MN) est parallèle à (BC) alors N est le milieu de [AC].

AIRE D'UN TRIANGLE

L'***aire d'un triangle*** (A_t) s'obtient en calculant la moitié du produit de la longueur d'un côté (c) par la longueur de la hauteur associée (h) :
$A_t= (c.h)/2$. Il est possible de retrouver cette formule en considérant le triangle comme un demi parallélogramme.
Puisque la mesure de l'aire d'un parallélogramme (A_p) vaut $A_p= c.h$ (c : la longueur de la base, et h : la longueur de la hauteur) et que l'aire du triangle en vaut la moitié, on retrouve alors $A_t= A_p/2= (c.h)/2$.



$$A = \frac{AC \times BH}{2}$$

Pour calculer l'aire d'un triangle, il est également possible d'utiliser la formule d'Héron selon laquelle $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi périmètre du triangle et a, b et c les longueurs des trois côtés du triangle.
Le cas du triangle rectangle est particulier. Puisqu'un triangle rectangle correspond à la moitié d'un rectangle, il suffit, pour calculer son aire, de calculer le demi produit des longueurs des côtés de l'angle droit.

APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Comme l'ensemble des figures géométriques, le triangle et ses propriétés ont donc été très vite utilisés pour mesurer l'espace et calculer des distances inconnues.
Le principe de la triangulation se fonde sur ces propriétés et est toujours utilisé de nos jours pour se repérer dans l'espace. Le système de géolocalisation GPS en reprend le principe.

La triangulation

La triangulation est un procédé qui permet de mesurer des distances et des angles en disposant de trois points distincts et non alignés, c'est-à-dire le schéma d'un triangle virtuel.
Une telle configuration permet en effet d'utiliser les propriétés du triangle et ainsi de calculer des données inconnues. La triangulation est utilisée dans de nombreux domaines tels que l'astronomie mais aussi la navigation ou bien l'armement pour le calcul des trajectoires des missiles ou des fusées par exemple.
La triangulation repose sur des égalités trigonométriques et nécessite donc des données initiales. En connaissant la longueur d'un côté et les mesures de deux angles du triangle, il est ensuite possible de calculer la longueur des deux autres côtés en utilisant notamment la loi du sinus selon laquelle, dans un triangle ABC, BC/sin A = AC/sin B = AB/sin C = 2R (avec R rayon du cercle inscrit). La formule d'Al Kashi permet également un tel calcul. Toujours dans un triangle ABC, cette formule expose l'égalité suivante :
$BC^2 = AC^2+AB^2 - 2AC.BC.\cos A$.
Sur Terre, une grande distance est en fait assimilable à un arc de cercle qu'il n'est pas évident de mesurer. Le principe de la triangulation est donc de découper cet arc de cercle en plus petits segments, en divisant l'espace en plusieurs triangles dont les sommets se trouvent de part et d'autre de l'axe à mesurer. En calculant les angles et en mesurant la longueur d'un des côtés, la triangulation permet, en appliquant les règles trigonométriques vues précédemment, de calculer toutes les autres mesures et ainsi obtenir la longueur de chacun des segments constituant l'axe à mesurer. C'est ce procédé qui a permis à Jacques et César Cassini d'établir, en 1745, une

carte de France bien plus précise qu'auparavant.
Les points de repère délimitant les triangles virtuels se devaient d'être en hauteur afin de pouvoir voir, depuis un sommet, le repère suivant et ainsi calculer avec précision les mesures d'angles. En 1751, c'est une nouvelle fois par triangulation que l'astronome Joseph Jérôme Le François de Lalande et l'abbé Nicolas Louis de La Caille ont calculé avec précision la distance Terre-Lune en observant la Lune au même moment à Berlin et au Cap en Afrique du Sud.
En mer, le commandant d'un navire peut également connaître sa position en utilisant le principe de triangulation. Après avoir mesuré les angles par rapport au nord de deux points éloignés (phares ou clochers), il lui suffit de tracer sur une ***carte maritime***

les droites passant par les points considérés et ayant l'orientation calculée. L'intersection de ces deux droites indique la position du navire.

Le système GPS

De nombreux progrès ont été réalisés dans le domaine de la mesure de l'espace et de la localisation géographique, mais même les dernières technologies utilisent toujours le principe de la triangulation. Le ***GPS*** (*Global Positioning System*, que l'on peut traduire par « système de localisation mondial ») en est un parfait exemple.

Ce système qui est, à l'origine, l'œuvre de l'armée américaine, a vu le jour lors de la guerre froide dans les années 1960 mais ce n'est qu'au milieu des années 1990 que le système est devenu totalement exploitable puisqu'il nécessitait la mise en orbite de nombreux satellites (24 actuellement).
En permanence, les satellites envoient des signaux au récepteur GPS sur Terre. Celui-ci calcule la distance qui le sépare des satellites et par triangulation peut déterminer sa position précise. Les signaux de trois satellites permettent au récepteur de définir sa latitude et sa longitude et l'intervention d'un quatrième satellite permet, en plus, de préciser son altitude. L'offre de GPS ne cesse de se développer avec une quantité d'informations proposées toujours plus riche. Du petit modèle portable au modèle embarqué avec écran couleur et guidage en 3D, chacun peut à présent trouver celui correspondant à ses besoins.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

En géométrie dans l'espace, le triangle est à la base de nombreuses figures géométriques appelées polyèdres.
Un polyèdre peut être défini de façon simplifiée comme une figure en trois dimensions à plusieurs côtés et dont les faces planes sont des polygones.
Comme il existe une multitude de polyèdres constitués de triangles, nous nous intéresserons ici aux trois polyèdres réguliers à faces triangulaires faisant partie des cinq polyèdres de Platon. On parle de polyèdre régulier lorsque le polyèdre considéré présente des faces identiques et des sommets de même mesure.
Le ***tétraèdre*** est le plus simple des polyèdres. Il est constitué de 4 faces triangulaires. Le tétraèdre dispose de 4 sommets et de 6 arêtes.
L'***octaèdre*** est constitué de 8 faces triangulaires. Il correspond à deux pyramides à base carrée réunies par la base. Ce polyèdre dispose de 6 sommets et de 12 arêtes.
L'***icosaèdre***, enfin, est le dernier des polyèdres réguliers à faces triangulaires. Il présente 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes.
Les deux autres polyèdres de Platon sont le cube, formé de 6 carrés et le dodécaèdre, formé de 12 pentagones.