La **trigonométrie**

UNE HISTOIRE DE TRIANGLES

Le terme de trigonométrie vient du grec *trigon* (triangle) et *metron* (mesure).
La trigonométrie est une branche des mathématiques ; elle est née de tables astronomiques et se définit traditionnellement comme la mesure des angles et des distances dans les triangles et par extension d'une figure géométrique quelconque.
La trigonométrie ordinaire ne traite en général que de figures planes mais elle a été élargie à l'espace à trois dimensions avec le développement de la trigonométrie sphérique. Ses méthodes et ses formules servent aujourd'hui dans tous les domaines de mesure : géodésie, astronomie et dans tous les autres domaines utilisant la géométrie (***dessin industriel*** par

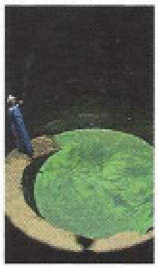
exemple) ou les sciences physiques (propagation des ondes…). À ses débuts, la trigonométrie n'était qu'un outil de l'astronomie. Son histoire y est intimement liée et s'étale sur plusieurs siècles, prenant ses racines dans des cultures très diverses. Dans l'Encyclopédie (1751) de Diderot et d'Alembert, la trigonométrie est définit comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ».
Et c'est ainsi qu'elle est le plus souvent enseignée et connue d'un large public, pourtant, la trigonométrie n'est pas, à ses origines, un outil de calcul du triangle, mais du cercle.

HISTOIRE ET APPLICATIONS : DE L'ANTIQUITÉ À NOS JOURS

On considère couramment les Babyloniens (-2000 av. J.-C.) comme la première civilisation à utiliser la trigonométrie. C'est du moins de cette époque que datent les premières traces de tables de données astronomiques utilisant ces notions. À cette époque, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde et de l'univers et est indissociable de l'astronomie. Les Babyloniens utilisaient une numération sexagésimale (base 60) qui contribuera plus tard à partager le cercle en 360°. Cependant, ils ne sont pas les seuls à utiliser la trigonométrie, on en trouve des traces aussi dans l'Égypte antique, en Chine ou dans la vallée de l'Indus. Les ancêtres des tables et des fonctions tangente et cotangente sont ainsi issues de la mesure de l'ombre d'un bâton en fonction de la hauteur du soleil (heure). Mais ce sera finalement la fonction « corde » qui s'apparente au sinus qui servira réellement de base au développpement de la trigonométrie. C'est tout d'abord en Inde que se développe cette notion de « corde » (segment de droite dont les extrémités se trouvent sur un cercle). Ainsi entre 800 et 500 av. J.-C. le sinus de $\pi/4$ (45°) est correctement calculé comme $1/\sqrt{2}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné.

La trigonométrie chez les Grecs

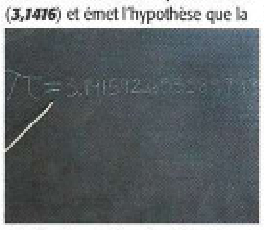
Il semblerait que les Grecs aient hérité des travaux précédents avant de les mener plus en avant. Ératosthène de Cyrène (-276 ; -196) et Aristarque de Samos (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. ***Ératosthène*** se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la Terre avec une précision remarquable (seulement



3% d'erreur). Hipparque de Nicée (-190 ; -120 av. J.-C.) établit les premières tables trigonométriques de la fonction « corde » qu'il utilise pour des mesures de géodésie et d'astronomie. Il évalue ainsi la distance de la Terre à la Lune à 400 000 km (soit seulement 2% d'erreur !). Plus tard, Menelaos d'Alexandrie (98 ap. J.-C.) sera le premier à faire de la trigonométrie une science indépendante de l'astronomie ou de la stéréométrie (science traitant de la mesure des solides). Ses livres sur le calcul des cordes et sur les sphériques forment le premier traité de trigonométrie sphérique. Le théorème de Ménélaos, applicable dans le plan comme dans l'espace permet de rechercher l'alignement de trois points appartenant respectivement à trois droites formant un triangle.
Le grec Ptolémée (env. 100 ; env. 160) poursuit dans l'Almageste les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de calculs trigonométriques. Ptolémée y explique comment construire une table de cordes et en fournit une allant de 0,5° à 180° par pas de 0,5°. Son influence tant mathématique qu'astronomique et géographique perdurera jusqu'au XVIe siècle.
Le théorème de Ptolémée porte sur les quadrilatères inscrits dans un cercle et donne une formule développant $\sin(a \pm b)$.

La trigonométrie indienne

Dans le monde indien, les premiers traités théoriques sont les siddhantha. On les date généralement du début du Ve siècle sans aucune certitude. Pour la première fois, il y est fait mention de la notion de sinus à la place de la corde et de sinus verse (c'est-à-dire 1 – cosinus). C'est le mathématicien Aryabhata (476 ; 550) qui va systématiser les résultats de ces traités d'astronomie. Il en tire des tables de sinus et de sinus verse et introduit la trigonométrie hors du cercle en retrouvant le sinus dans le triangle rectangle. Il calcule par ailleurs une valeur très précise de π (***3,1416***) et émet l'hypothèse que la



rotation journalière du ciel est le fruit d'une rotation de la Terre autour de son axe, hypothèse qui ne sera pas reprise par ses successeurs. La trigonométrie poursuit son chemin dans le monde indien grâce au développement d'autres outils mathématiques. Au XIIe siècle, ils introduisent la trigonométrie sphérique (Bhaskara en 1150).

La trigonométrie arabe

Dans le monde arabe, le développement de la trigonométrie est d'abord fondée sur les traductions des travaux grecs et indiens. La spécificité des travaux arabes réside notamment dans le développement de tables de tangentes et cotangentes (correspondant respectivement aux ombres d'un gnomon horizontal fixé sur un mur vertical et aux ombres d'un gnonom vertical).
Les mathématiciens arabes les plus connus pour leur travaux de trigonométrie sont certainement Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850), Mohammed al Battani (850 ; 929), Mohammed Abu-l-Wafa (940 ; 998), Ibn Yunus (950 ; 1009) et Al Biruni (973 ; 1048).
Ils connaissent les relations entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique et établissent des formules de trigonométrie encore enseignées aujourd'hui sur les sinus d'une somme ou d'une différence.
Au XIe siècle, le monde musulman franchit un pas important en élaborant le théorème des sinus qui permet de se passer du théorème de Ménélaos en faisant passer le nombre de quantités nécessaires à la démonstration de l'alignement de point de 6 à 4. En trigonométrie plane, dans un triangle ABC, on a $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$.
C'est au XIIIe siècle que la trigonométrie commence à se détacher réellement de l'astronomie sous l'influence de Nasir al-Din Tusi.

La trigonométrie moderne et occidentale

En Occident, c'est à la Renaissance que la trigonométrie prend son essor et ses caractéristiques modernes. Des mathématiciens et astronomes allemands établissent des tables trigonométriques extrêmement précises, au prix d'une masse de calcul incroyable. Avec l'invention des logarithmes par l'Écossais John Napier (1550 ; 1617) et leur amélioration par l'Anglais Henry Briggs (1556 ; 1631), les calculs deviennent plus rapides et plus simples. En France, François Viète (1540 ; 1603) établit de nombreuses formules de trigonométrie afin de faciliter les calculs. Un premier travail qui pose d'ailleurs les bases de son œuvre ultérieure : créer un véritable langage mathématique en formalisant les calculs grâce à l'emploi de lettres et de symboles (algèbre) et développer la notion d'équation et les règles pour les résoudre. C'est en 1595 que véritablement, le terme de trigonométrie devient un nom commun pour désigner le domaine de connaissance relatif aux angles et rapports de longueurs des triangles. Ce terme vient de l'ouvrage du mathématicien silésien Bartholomäus Pitiscus, *Trigonometriæ sive de dimensione triangulorum libri quinque*, dans lequel il présente les tables de trigonométrie les plus précises du XVIe siècle. Au cours des siècles suivants, la trigonométrie a continué son développement, trouvant des applications de plus en plus nombreuses dans les sciences émergentes : tous les domaines de la physique et des mesures par exemple. Après des siècles de recherches pour obtenir des valeurs les plus exactes possibles des sinus, cosinus et autres tangentes, un mathématicien australien a exposé en 2005, une version simplifiée des rapports trigonométriques avec l'emploi de nombres rationnels (sans virgule). Cette trigonométrie qui s'inspire des travaux de simplification utilisés pour les premiers jeux vidéos, se fonde sur les notions de quadrance (carré de la distance) à la place de l'emploi des racines carrées et la notion d'ouverture à la place d'angle.
Les principales applications de cette théorie de Wildeberg résident dans l'allègement des calculs informatiques pour les logiciels de cartographie et de conception assistée par ordinateur ainsi que pour les jeux vidéos.

À LA BASE DE TOUTE SCIENCE DE MESURE

Les formules de trigonométrie ont servi très rapidement à mesurer de nombreuses distances inaccessibles facilement et à établir des cartes précises, notamment par la méthode de la triangulation. La trigonométrie est à la base même de la cartographie. En effet, les premières cartes précises et à l'échelle ont été établies grâce à la méthode de la triangulation. Cette méthode consiste à mesurer précisément une première distance entre un point A et un point B. Ensuite grâce à un appareil de mesure des angles (***théodolite*** par exemple), on

mesure l'angle entre le point B et un troisième point C facilement repérable comme une tour, un arbre, un clocher. On fait de même en se plaçant en B. Grâce aux sinus, on connait les mesures AC et BC. En assemblant ainsi un grand nombre de triangles, l'espace est entièrement déterminé en limitant au maximum les mesures et les déplacements. En 1790, l'Assemblée constituante décide de mettre au point un système universel de poids et de mesure. L'unité de longueur choisie est le dix-millionième d'un quart de méridien terrestre : le mètre. Pour établir ce mètre, deux astronomes, Delambre et Méchain sont chargés de mesurer précisément l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone, deux villes au niveau de la mer dont les latitudes sont connues. Ils utiliseront la triangulation (115 triangles) pour

Des chiffres célèbres

360°

Ce sont les Sumériens qui ont créé la division du cercle en 360°. Ils sont la seule culture connue à avoir utilisé un système de compte sexagésimal (base 60) pour une raison encore inconnue aujourd'hui.

40 000 km

Circonférence de la Terre calculée par Ératosthène au IIIe siècle av. J.-C. soit une erreur de seulement 80 km.

400 000 km

Distance Terre-Lune calculée par Hipparque de Nicée au Ier siècle av. J.-C. soit une erreur de seulement 2%.

$\pi/5$

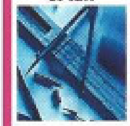
C'est l'angle relié au nombre d'or (ϕ). En effet, $\cos \pi/5 = \phi/2$. $\pi/5$ équivaut à 36°.

36 pouces soit presque 92 cm

C'est la taille des plateaux circulaires des 2 plus grands théodolites jamais construits : une demi-tonne chacun, des graduations si précises qu'il fallait 5 microscopes pour les lire.

L'inventeur des notations

Albert Girard inventa les abréviations sin, cos et tan



en **1626**

établir ces longueurs et leur travail s'étalera de 1792 à 1798.

BASES DE LA TRIGONOMÉTRIE PLANE

Mesure des angles

Il existe trois unités de mesures des angles : le degré, le radian et le grade. Les deux premières sont les plus courantes :

- le degré est issu de la division du cercle en 360 partie (travail en base 60), il se note 1° ;
- le radian est issu d'une division du cercle en fonction de son rayon, il se note 1 rad.

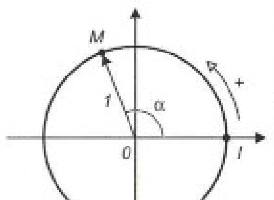
Pour avoir quelques repères on a ainsi :
angle nul = 0° = 0 rad
angle droit = 90° = $\pi/2$ rad
angle plat = 180° = π rad
angle plein = 360° = 2π rad.

Mesure d'un arc de cercle

Dans un système en radian, le périmètre P d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$, l'angle au centre correspondant à ce périmètre est alors 2π rad. Si on considère un arc de ce cercle L défini par un angle au centre α, on peut déduire par une simple règle de trois $L = r\alpha$ en radian exprimé en degré cela donne la formule $L = \pi r\alpha/180$.

Cercle trigonométrique

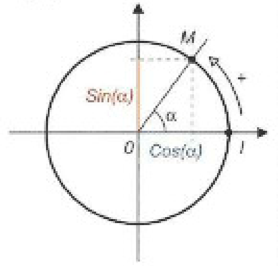
On appelle cercle trigonométrique, un cercle dont le centre est l'origine de deux axes orthonormés, de rayon 1 et orienté dans le sens positif (c'est-à-dire le sens trigonométrique, ou encore le sens inverse des aiguilles d'une montre). Le point I de coordonnées (1 ; 0) est l'origine des arcs. Si nous graduons le cercle depuis I, il définit un axe des abscisses curvilignes. Comme nous l'avons vu précédemment, IM, avec M un point quelconque du cercle, vaut α, l'angle au centre mesuré en radian (puisque le rayon r vaut 1).



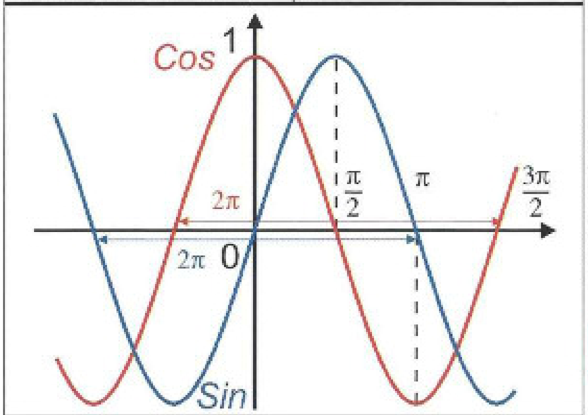
Il existe alors une infinité de nombres qui sont les abscisses curvilignes du point M : α ou $\alpha+2\pi$ ou $\alpha+4\pi$ etc. On note alors $IM = \alpha+k2\pi$ où k est un nombre entier.

LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Soit M, le point d'abscisse curviligne α, la coordonnée des abscisses sur l'axe orthonormé correspond à cosinus de α, notée $\cos(\alpha)$ et la coordonnée des ordonnées correspond au sinus de α, notée $\sin(\alpha)$. On observe sur le graphique que les nombres $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont compris entre -1 et +1. Pour les angles négatifs ou supérieurs à un tour complet, on se ramène à la valeur principale de l'angle, c'est-à-dire un angle positif compris dans le premier tour et dont l'abscisse curviligne est égale à celle de l'angle cherché. On peut aussi éclairer les nombres sinus et cosinus par la notion de projection. Ainsi, lorsque l'on projette orthogonalement l'image d'un segment de droite sur une autre droite, le segment projeté a une longueur qui est fonction de l'angle entre la droite projeté et la droite de projection. Le sinus est le complément du cosinus, il correspond à la projection orthogonale du segment précité sur un axe perpendiculaire à celui de la

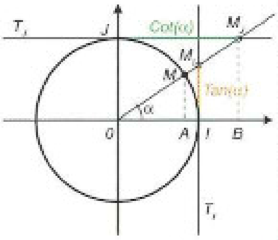


première projection. En lisant sur le graphique on trouve aisément un certain nombre de valeurs exactes des sinus et cosinus ou en raisonnant avec un système de figures géométriques inscrites dans le cercle trigonométrique on trouve d'autres valeurs des sinus et cosinus qui permettent de construire les courbes des fonctions sinus et cosinus. En toute logique, les fonctions sont



périodiques avec une période de 2π. Les courbes de sinus et cosinus sont appelées des sinusoïdes.

LES FONCTIONS TANGENTE ET COTANGENTE



Soit M le point d'abscisse curviligne α. Soient (T_I) et (T_J) les droites tangentes au cercle aux points I et J. Soient M_I et M_J les points d'intersection entre la demi-droite [OM) et les tangentes (T_I) et (T_J). L'ordonnée du point M_I est appelée la tangente de α, notée $\tan(\alpha)$. L'abscisse du point M_J est appelée la cotangente de α, notée $\cot(\alpha)$. En appliquant le théorème de Thalès aux trois triangles OAM, OIM_I et OBM_J on trouve les relations entre les trois fonctions trigonométriques de base, c'est à dire
$\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ et
$\cot(\alpha) = 1/\tan(\alpha) = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)$.
On obtient alors facilement les courbes des deux fonctions tangente et cotangente. Toutes deux sont elles aussi périodiques avec une période de 2π.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

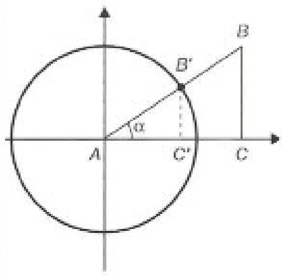
Du cercle trigonométrique on tire aisément quelques formules de base :
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$.
Si deux angles sont complémentaires alors le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre (en radian la somme de deux angles complémentaires vaut $\pi/2$)
$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha)$.
D'après le théorème de Pythagore, on identifie aussi aisément que :
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
Afin de faciliter les calculs, un certain nombre de règles ont été mises en évidence et sont des formules utiles

- Somme de deux angles :
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\alpha) + \tan(\beta)/1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)$.
- Différence de deux angles :
$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha) - \tan(\beta)/[1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)]$.
- Angle double :
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\tan(2\alpha) = 2\tan(\alpha)/1 - \tan^2(\alpha)$.
- Demi-angle :
$\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{1-\cos(\alpha)/2}$
$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{1+\cos(\alpha)/2}$
$\tan(\alpha/2) = \pm\sqrt{1-\cos(\alpha)/1+\cos(\alpha)}$.

LA TRIGONOMÉTRIE DANS LES TRIANGLES

Triangle rectangle

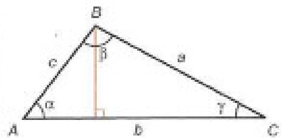
Considérons un triangle ABC, rectangle en C et plaçons-le dans un repère trigonométrique, son hypoténuse coupe le cercle trigonométrique en B' ; B' est donc le point d'abscisse curviligne α. Notons C' la projection de B' sur l'axe horizontal. Alors les triangles ABC et AB'C' sont semblables et l'on peut leur appliquer le théorème de Thalès.



Cela permet de trouver les rapports trigonométriques du triangle rectangle :
$\sin(\beta)$ = côté opposé/hypoténuse = BC/AB
$\cos(\beta)$ = côté adjacent/hypoténuse = AC/AB
$\tan(\beta)$ = côté opposé/côté adjacent = $\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ = BC/AC.

Triangle quelconque

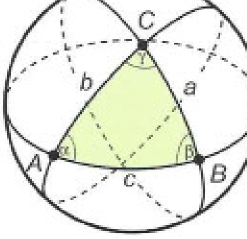
En coupant un triangle quelconque en deux triangles rectangles on trouve des relations trigonométriques dans un



triangle quelconque. On obtient ainsi ce que l'on nomme le théorème du sinus $a/\sin(\alpha) = b/\sin(\beta) = c/\sin(\gamma)$.
On y trouve aussi ces formules à retenir :
$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos(\gamma)$
$a^2 + c^2 = b^2 + 2ac\cos(\beta)$
$b^2 + c^2 = b^2 + 2ac\cos(\alpha)$.

LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

La trigonométrie sphérique est un ensemble de relations analogues à celles de la trigonométrie plane (euclidienne) mais elle porte sur les angles et les distances repérés sur une sphère. Les règles habituelles de la trigonométrie plane n'y sont plus applicables ; les segments de droites deviennent des arcs de grands cercles.



Soit trois points A, B, C d'une sphère, ils définissent un triangle sphérique, c'est-à-dire la plus petite portion d'une sphère limitée par 3 grands cercles (cercles centrés sur le centre de la sphère et de mêmes rayons qu'elle). Les côtés de ce triangle qui sont des arcs sont nommés respectivement a, b et c pour BC, AC et AB.

On note α l'angle (toujours sur la surface de la sphère) du triangle au sommet A, β pour le sommet B et γ pour le sommet C.
On considère les longueurs a, b et c comme des angles. La relation la plus importante de la trigonométrie sphérique est la suivante :
$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$.
Elle relie la longueur d'un côté à celles des deux autres et à son angle.
Un triangle sphérique est déterminé par ses trois angles (contrairement au triangle euclidien). Il y existe une analogie parfaite entre longueurs des côtés et angles aux sommets.
On peut ainsi y retrouver la formule des sinus : $\sin(a)/\sin(\alpha) = \sin(b)/\sin(\beta) = \sin(c)/\sin(\gamma)$.

APPLICATIONS PRATIQUES

Les fonctions trigonométriques sont importantes dans d'autres domaines que celui de l'étude des triangles. Outre les applications évidentes dans des domaines liés à la mesure comme l'astronomie, la géodésie, la géographie ou l'***architecture***, les fonctions

trigonométriques de par leur périodicité peuvent servir à modéliser de nombreux phénomènes comme la propagation des ondes (son, lumière) ou tout signal vérifiant certaines propriétés. Ces phénomènes sont alors traduits par une somme de fonctions sinus et cosinus de différentes fréquences. Les fonctions sinus et cosinus apparaissent aussi dans la description du mouvement harmonique simple, concept important en physique. Elles sont alors utilisées pour décrire les projections sur un espace à une dimension d'un mouvement circulaire uniforme comme celui d'un ***satellite***

autour de la Terre par exemple.
En biologie, on retrouve ainsi les fonctions sinusoïdales dans la description de nombreux phénomènes naturels : cycle de migration du plancton, variations de la température de l'eau dans un fleuve, évolution d'une population animale…

Ainsi la ***trigonométrie*** dans son acception moderne est-elle présente dans tous les domaines scientifiques.