Trigonométrie

§ 1. Trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, lorsqu'on connaît deux côtés, on peut connaître le troisième par le **théorème de Pythagore**.

Dans un triangle, si l'on connaît deux angles, on peut connaître le troisième en utilisant la relation qui dit que la **somme des angles d'un triangle** vaut toujours 180°.

Si on connaît un côté et un angle d'un triangle rectangle, il n'y a qu'une manière de construire le triangle. Cela signifie qu'il y a des liens entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle.

L'étude de ces liens s'appelle la **trigonométrie dans le triangle rectangle**.

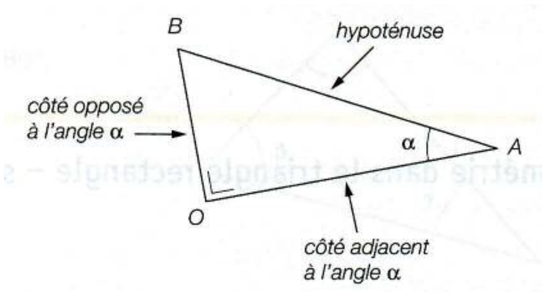
§ 2. Terminologie dans le triangle rectangle

Dans ce triangle rectangle en O:

AB est l'**hypoténuse**;

AO est le **côté adjacent à l'angle** α (il est collé à celui-ci);

OB est le **côté opposé à l'angle** α (il est en face de celui-ci).



§ 3. Sinus, cosinus et tangente

Les relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle font intervenir trois nouveaux objets mathématiques: le **sinus**, le **cosinus** et la **tangente**.

Lorsqu'on connaît la valeur d'un angle, par exemple 68°, il est facile d'obtenir la valeur du sinus, du cosinus et de la tangente de cet angle en utilisant la machine à calculer:

sinus de 68° = sin(68) = [68][sin], les touches encadrées correspondant aux touches de la machines à calculer; on obtient sin(68) = 0,927183855 ≃ 0,93;

cosinus de 68° = cos(68) = [68][cos] = 0,374606593 ≃ 0, 37;

tangente de 68° = tan(68) = [68][tan] = 2,475086853 ≃ 2,48.

On remarque que les résultats de sinus, cosinus et tangente sont des nombres à virgule qui ne se termine le plus souvent pas. On est obligé d'arrondir leurs résultats.

Lorsqu'on connaît la valeur du sinus, du cosinus ou de la tangente d'un angle, il est possible d'obtenir la valeur de l'angle correspondant avec la calculatrice:

si sin(α) = 0,42, on a alors $\alpha = \sin^{-1}(0,42) =$ [0,42][2*nd*][sin= 24,83458749° ≃ 24,83°;

si cos(α) = 0,65, on a alors $\alpha = \cos^{-1}(0,65) =$ [0,65][2*nd*][sin] = 49,45839813° ≃ 49,46°;

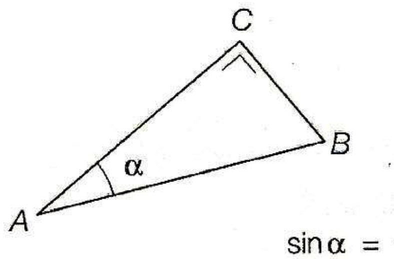
si tan(α) = 1,33, on a alors $\alpha = tan^{-1}(1,33) =$ [1,33][2*nd*][tan]= 53,06123727° ≃ 53,06°.

§ 4. Relations entre les angles et les côtés de triangles rectangles

- le sinus d'un angle aigu est égal au rapport

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

sin-op-hyp : $\text{sinus} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$



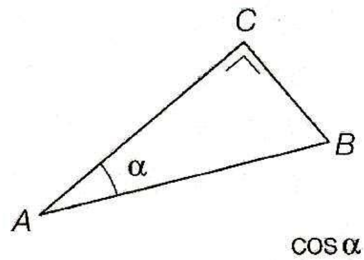
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

Voici les relations entre les angles et les côtés de triangles rectangles:

- le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

cos-adj-hyp : $\text{cosinus} = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

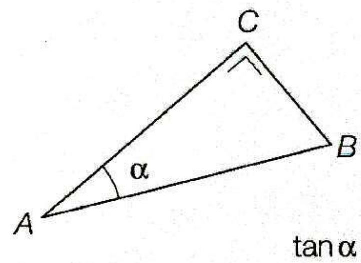


$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

- la tangente d'un angle aigu est égale au rapport

$$\frac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$$

tan-op-adj : $\text{tangente} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$$

§ 5. Calculs avec les formules de trigonométrie

Voici quelques exemples de calcul avec les formules de trigonométrie.

Exemple 1:

Calculer *AB* dans le triangle ci-contre:

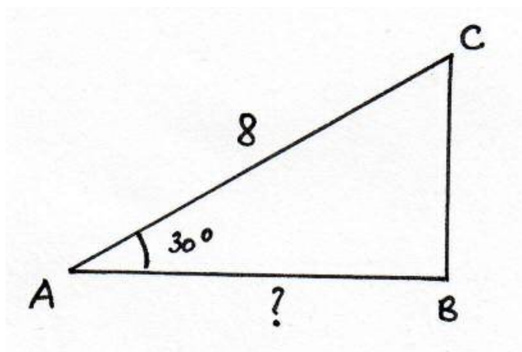
En regardant le triangle depuis l'angle de 30°, on a que *AC* est l'hypoténuse et *AB* est le côté adjacent.

On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, l'hypoténuse et le côté adjacent.

C'est la formule pour le cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{adjacent}{hyponétuse}$.

On a donc: $\cos(30) = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{8}$, d'où l'on déduit que:

$AB = 8 \cdot \cos(30) = 8 \cdot 0,866 = 6,93$.



Exemple 2:

Calculer BC dans le triangle ci-contre:

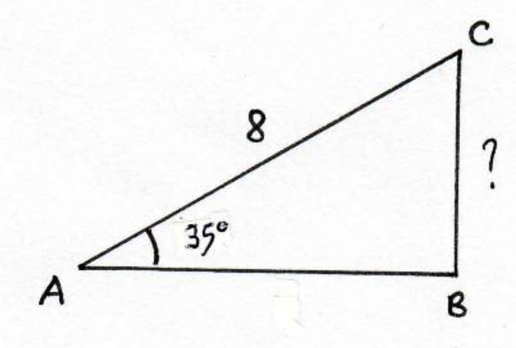
En regardant le triangle depuis l'angle de 35°, on a que AC est l'hypoténuse et BC est le côté opposé.

On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, l'hypoténuse et le côté opposé.

C'est la formule pour le sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

On a donc: $\sin(35) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{8}$, d'où l'on déduit que:

$BC = 8 \cdot \sin(35) = 8 \cdot 0,574 = 4,59$.



Exemple 3:

Calculer AB dans le triangle ci-contre:

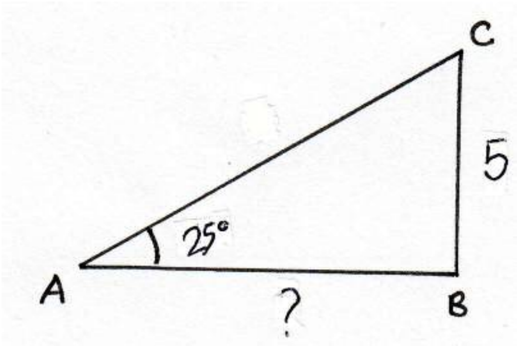
En regardant le triangle depuis l'angle de 25°, on a que AB est le côté adjacent et BC est le côté opposé.

On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, le côté adjacent et le côté opposé.

C'est la formule pour la tangente: $\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$.

On a donc: $\tan(25) = \frac{5}{BC}$.

En multipliant par BC, puis en divisant par tan(25), on obtient: $BC = \frac{5}{\tan(25)} = \frac{5}{0,466} = 10,72$..



Exemple 4:

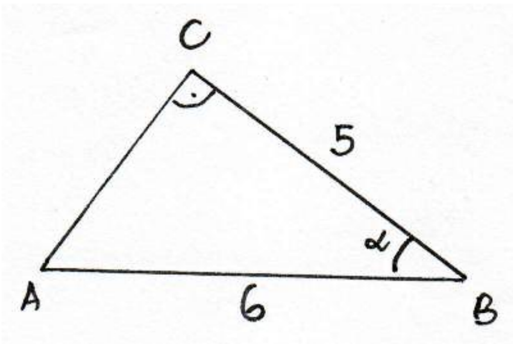
Calculer α dans le triangle ci-contre:

En regardant le triangle depuis l'angle α, on a que AB est l'hypoténuse et BC est le côté adjacent.

On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, l'hypoténuse et le côté adjacent.

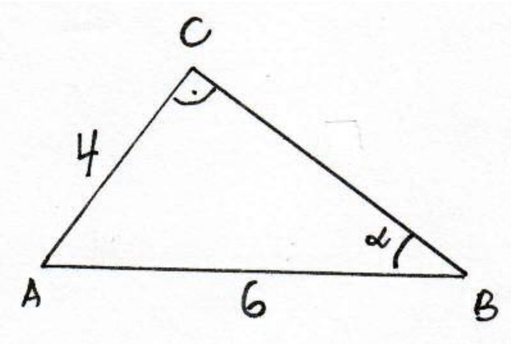
C'est la formule pour le cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

On a alors: $\cos(\alpha) = \frac{5}{6}$, et, donc, $\alpha = \cos^{-1}(\frac{5}{6}) = 33,56°$.



Exemple 5:

Calculer α dans le triangle ci-contre:



En regardant le triangle depuis l'angle α, on a que *AB* est l'hypoténuse et *AC* est le côté opposé.

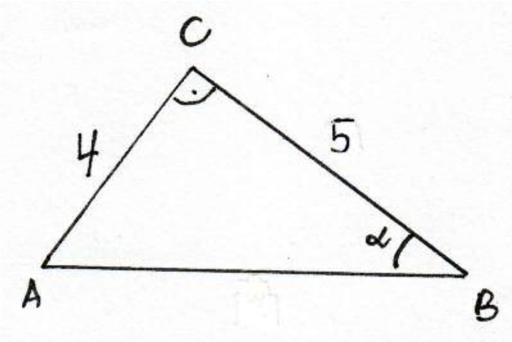
On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, l'hypoténuse et le côté opposé.

C'est la formule pour le sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{hypoténuse}}$.

On a alors: $\sin(\alpha) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, et, donc, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{2}{3}) = 41,81°$.

Exemple 6:

Calculer α dans le triangle ci-contre:



En regardant le triangle depuis l'angle α, on a que *AC* est le côté opposé et *BC* le côté adjacent.

On doit donc prendre la formule qui fait intervenir l'angle, le côté opposé et le côté adjacent.

C'est la formule pour la tangente: $\tan(\alpha) = \frac{\textit{opposé}}{\textit{adjacent}}$.

On a alors: $\tan(\alpha) = \frac{4}{5}$, et, donc, $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{5}) = 38,66°$.

§ 6. Utilisations de la trigonométrie

La trigonométrie dans le triangle rectangle est utilisée à chaque fois que l'on cherche la valeur d'un angle à partir de la mesures de ses côtés ou vice-versa.

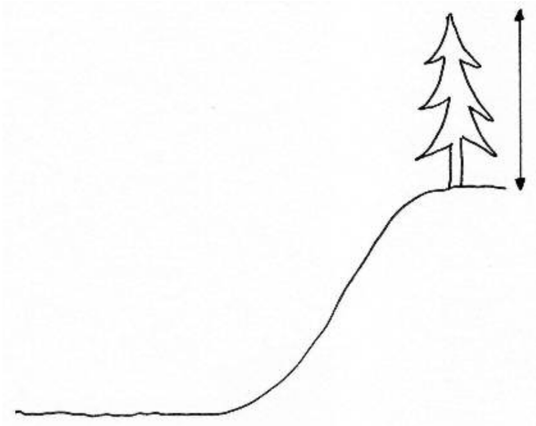
La seule chose qu'il faut faire très attention est que la trigonométrie ne s'applique **que** dans le cas des triangles rectangles.

Si on a pas de triangle rectangle à priori, il faut observer la figure ou le dessin et isoler un triangle rectangle adéquat afin de pouvoir utiliser la trigonométrie.

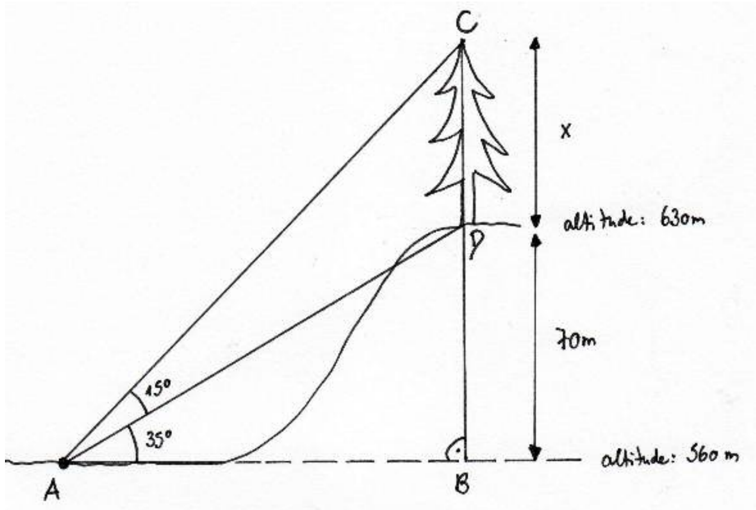
Exemple:

On aimerait savoir la hauteur d'un arbre qui se trouve sur une montagne sans avoir besoin d'escalader la montagne:

On sait que l'altitude du sommet de la montagne (où se trouve l'arbre) est de 630 m et que l'altitude du bas de la montagne est de 560 m. La hauteur de la montagne est donc de 70m.



Grâce à un appareil adéquat, on arrive à mesurer les angles suivants:



Le triangle ABD est un triangle rectangle dans lequel on connaît l'angle $\widehat{BAD}$ (35°) et le côté *BD* (70 m). Il nous faut calculer le côté *AB* (afin qu'on puisse ensuite l'utiliser dans le triangle ABC).

Dans le triangle rectangle ABD, *AB* est le côté adjacent et *BD* est le côté opposé. En utilisant la formule avec la tangente, on a: $\tan(\alpha) = \frac{opposé}{adjacent}$, c'est-à-dire $\tan(35) = \frac{70}{AB}$.

Par multiplication par *AB*, puis division par $\tan(35)$, on obtient:

$$AB = \frac{70}{\tan(35)} = \frac{70}{0{,}7} = 100.$$

Ainsi la distance *AB* vaut 100 m.

Utilisons maintenant le triangle ABC qui est aussi un triangle rectangle. On connaît le côté *AB* (100 m) et l'angle $\widehat{BAC}$ (35°+15° = 50°). Il nous faut calculer le côté *BC* (afin qu'on puisse ensuite en déduire la hauteur de l'arbre qui est CD).

Dans le triangle rectangle ABD, *AB* est le côté adjacent et *BC* est le côté opposé. En utilisant la formule avec la tangente, on a: $\tan(\alpha) = \frac{opposé}{adjacent}$, c'est-à-dire $\tan(50) = \frac{BC}{100}$.

Par multiplication par 100, on obtient: $BC = 100 \cdot \tan(50) = 100 \cdot 1,192 = 119,2$.

Ainsi la distance *BC* vaut 119,2 m.

Comme *BC* = *BD* + *CD*, on trouve que *CD* = *BC* - *BD* = 119,2 - 70 = 49,2 m.

Ainsi la hauteur de l'arbre est de **49,2 m**.