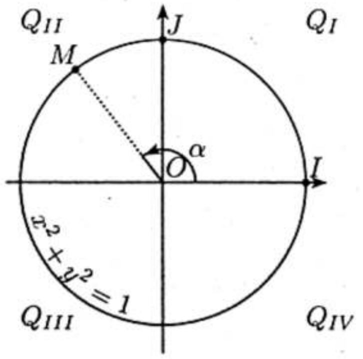
Trigonométrie

3.1 Introduction

Trigonométrie est issu du grec **trigônon** qui signifie triangle. Ainsi la trigonométrie s'intéresse-t-elle à la mesure des triangles. La trigonométrie est en fait l'étude des propriétés des fonctions circulaires des angles et des arcs : sinus, cosinus, et tangente. Apparue au II ème siècle avant J.C. par l'astronome grec **Hipparque** à la suite des astronomes Babyloniens, elle s'est imposée comme un outil essentiel aux géomètres, architectes, astronomes et autres spécialistes de tous temps, leur venant efficacement en aide dans le calcul des distances. Cependant, plus récemment, la trigonométrie a fait son apparition dans un autre domaine des mathématiques, l'analyse, et s' est également imposée rapidement comme un puissant outil d'analyse des fonctions réelles et complexes dont les retombées en mathématiques et en physique sont nombreuses.

3.2 Cercle trigonométrique et mesures des angles

3.2.1 Cercle trigonométrique



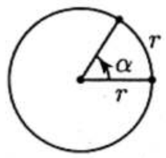
Soit un système d'axes orthonormé. Le cercle c centré en $O(0,0)$ et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**. Son équation cartésienne est $c : x^2 + y^2 = 1$.
A chaque angle α on fait correspondre l'unique point M du cercle tel que l'angle $\sphericalangle IOM = \alpha$. A l'angle nul correspond le point I et à 90° le point J.
Les quadrants sont numérotés Q_I, Q_{II}, Q_{III} et Q_{IV} comme sur le dessin ci-contre. Le périmètre d'un cercle est donné par $2\pi r$. Comme le rayon du cercle trigonométrique est 1, son périmètre est $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

3.2.2 Mesure d'un angle en radian

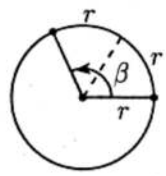
Soit le cercle trigonométrique. A tout nombre réel x on fait correspondre le point M tel que :

a. L'arc IM a une longueur x (comme si on enroulait une ficelle de longueur x)
b. Si $x > 0$, l'arc IM est orienté positivement (sens contraire des aiguilles d'une montre) et si $x < 0$, l'arc IM est orienté négativement.

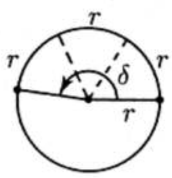
Le nombre x est appelé mesure en **radians** de l'angle $\sphericalangle IOM$ Pratiquement, le quotient $\frac{arc}{rayon}$ est la mesure en radians de l'angle. En particulier, un angle de 1 radian (1 rad) est un angle dont l'arc a la longueur du rayon. Sur le cercle trigonométrique, comme le rayon vaut 1, nous avons : angle = arc.



$\alpha = 1$ radian.



$\beta = 2$ radians.



$\delta = 3$ radians.

► **Exemple :**

Trouver la mesure en radians d'un angle α qui correspond à un arc de 24 m sur un cercle de 6 m de rayon.

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{\text{arc}}{\text{rayon}} = \frac{24}{6} = 4 \text{ rad}$$

3.2.3 Mesure d'un angle en degré

Un degré (°) s'obtient en divisant la circonférence d'un cercle en 360 parties égales.

▶ **Exemple :**

Trouver la mesure en degré d'un angle α qui correspond à un arc de 24 m sur un cercle de 6 m de rayon.

$$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cong 37,70\text{m} \;\Rightarrow\; 37,70\text{m} \equiv 360° \;\Rightarrow\; 24\text{m} \equiv 360 \cdot 24 : 37,70 \cong 229,2°$$

3.2.4 Formules de conversion

La circonférence du cercle trigonométrique étant de 2π, on a :

$$\begin{array}{lcll}
360° & \longleftrightarrow & 2\pi \text{ radians} & \cong \;6.28 \text{ radians} \\
180° & \longleftrightarrow & \pi \text{ radians} & \cong \;3.14 \text{ radians} \\
1° & \longleftrightarrow & \frac{\pi}{180} \text{ radians} & \cong \;0.0175 \text{ radians} \\
1 \text{ rad} & \longleftrightarrow & (\frac{180}{\pi})° \text{ degrés} & \cong \;57.2958° \text{ degrés}
\end{array}$$

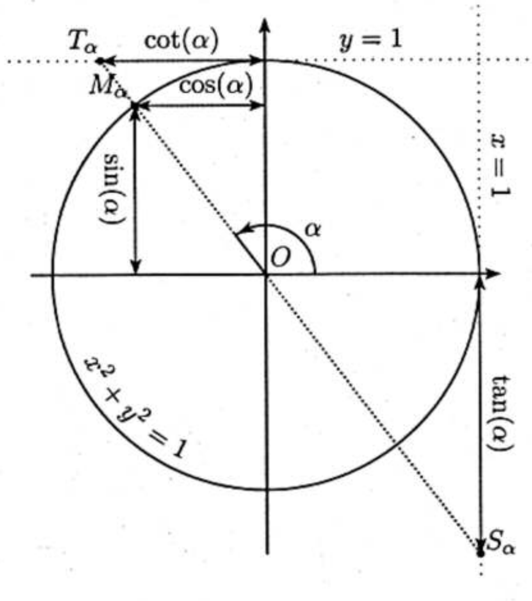
▶ **Exemples :**

a. $125° \equiv \dfrac{25\pi}{36}$ rad b. $80° \equiv \dfrac{4\pi}{9}$ rad c. 0.8 rad $\equiv 45.84°$ d. $\dfrac{\pi}{5}$ rad $\equiv 36°$

3.3 Fonctions trigonométriques

3.3.1 Définitions

Soient M_α un point sur le cercle trigonométrique, T_α l'intersection entre la droite linéaire passant par M_α et la droite $y = 1$ et S_α l'intersection entre la droite linéaire passant par M_α et la droite $x = 1$. Les fonctions trigonométriques sont alors définies de la manière suivante :



Le **cosinus** de α, noté $\cos(\alpha)$, est l'abcisse du point M_α.
Le **sinus** de α, noté $\sin(\alpha)$, est l'ordonnée du point M_α. Les coordonnées de M_α sont donc $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.
La tangente de α, notée $\tan(\alpha)$, est l'ordonnée du point S_α. Les coordonnées de S_α sont donc $(1; \tan(\alpha))$.
La cotangente de α, notée $\cot(\alpha)$, est l'abcisse du point T_α. Les coordonnées de T_α sont donc $(\cot(\alpha); 1)$.

3.3.2 Signes des fonctions trigonométriques

Le signe des fonctions trigonométriques évolue en fonction des différents quadrants de la manière suivante :

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\alpha = 0°$	1	0	0	$\varnothing$
$\alpha \in Q_I$	+	+	+	+
$\alpha = 90°$	0	1	$\varnothing$	0
$\alpha \in Q_{II}$	-	+	−	−

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\alpha = 180°$	-1	0	0	$\varnothing$
$\alpha \in Q_{III}$	−	−	+	+
$\alpha = 270°$	0	-1	$\varnothing$	0
$\alpha \in Q_{IV}$	+	−	−	−

3.3.3 Valeurs exactes

Dans le quadrant I, les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ ont des cosinus, des sinus, des tangentes et des cotangentes déterminables par réflexion géométrique sur des triangles particuliers (cf. exercices). A l'aide de ces valeurs, on peut déduire d'autres valeurs exactes.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

▶ **Exemple :**

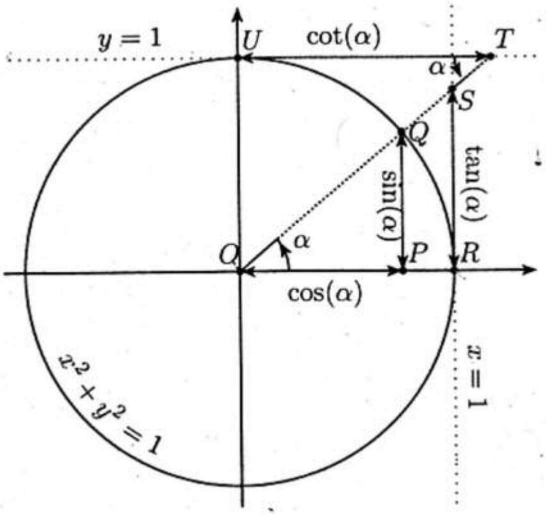
$\cos(495°) = \cos(135°) = -\cos(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.3.4 Relations fondamentales

▶ **Notation :** $\cos^n(\alpha) = (\cos(\alpha))^n$. Idem pour les autres fonctions trigonométriques.

On peut utiliser le théorème de Pythagore sur le triangle OPQ et on obtient alors :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$



En comparant les triangles semblables OPQ et ORS on a

$$\frac{\tan(\alpha)}{1} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

donc

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

En comparant les triangles semblables ORS et OUT on a

$$\frac{1}{\cot(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{1}$$

et donc

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

3.3.5 Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

A l'aide d'un raisonnement géométrique sur le cercle trigonométrique, on peut obtenir des relations entre différents arcs. En voici quelques exemples.

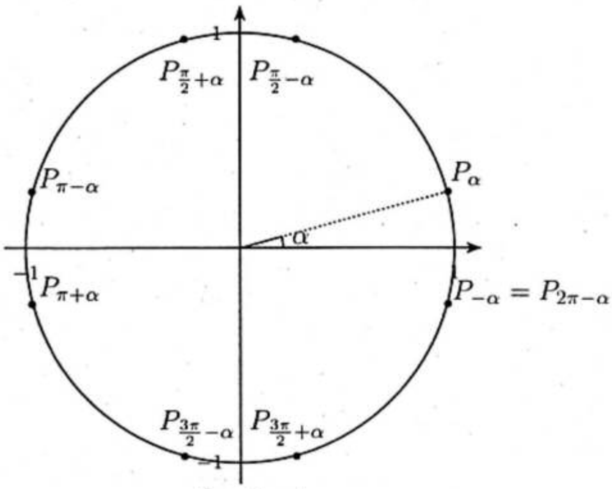
a. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ On dit que le cosinus est une fonction **paire**.

b. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ On dit que le sinus est une fonction **impaire**.

c. $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ On dit que la tangente est une fonction **impaire**.

d. $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$ On dit que la cotangente est une fonction **impaire**.

e. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$



f. $-\cos(-\alpha) = \begin{cases} \cos(\pi + \alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) \end{cases}$

g. $\cos(-\alpha) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{cases}$

h. $-\cos(-\alpha) = \begin{cases} \sin(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{cases}$

i. $-\sin(-\alpha) = \begin{cases} \sin(-\alpha) \\ \sin(\pi + \alpha) \end{cases}$

j. $\sin(\alpha) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{cases}$

k. $-\sin(-\alpha) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{cases}$

3.3.6 Graphe des fonctions trigonométriques

> L'unité utilisée sur l'axe des x pour le graphe d'une fonction trigonométrique est les radians. Réglez donc votre calculatrice.

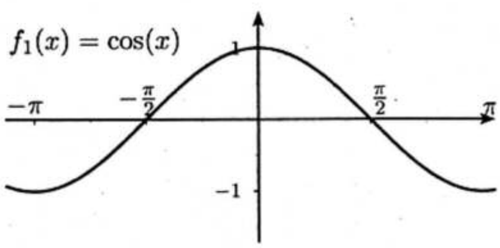
$f_1 : D \longrightarrow A$

$x \longmapsto f_1(x) = \cos(x)$

$D = \mathbb{R} \qquad A = f_1(D) = [-1; 1]$

P : fonction 2π périodique car

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$



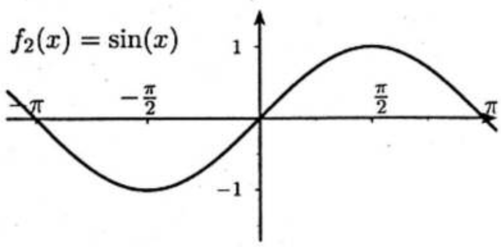
$f_2 : D \longrightarrow A$

$x \longmapsto f_2(x) = \sin(x)$

$D = \mathbb{R} \qquad A = f_2(D) = [-1; 1]$

P : fonction 2π périodique car

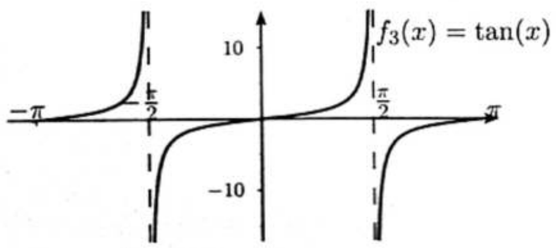
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



$$f_3 : D \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto f_3(x) = \tan(x) \qquad A = f_3(D) = \mathbb{R}$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

P : fonction π périodique car

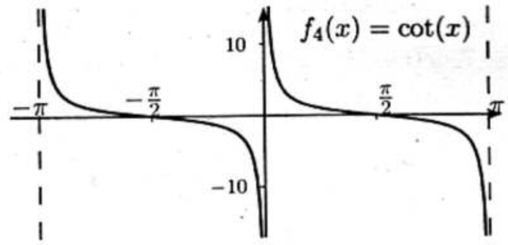
$\tan(x + \pi) = \tan(x)$



$$f_4 : D \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto f_4(x) = \cot(x) \qquad A = f_4(D) = \mathbb{R}$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

P : fonction π périodique car

$\cot(x + \pi) = \cot(x)$



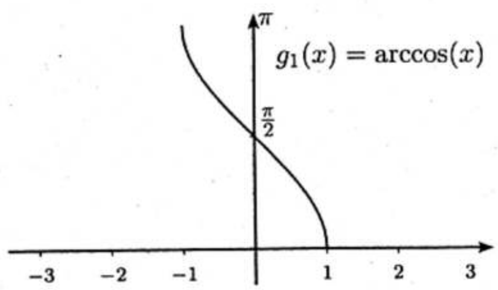
3.3.7 Graphe des fonctions trigonométriques réciproques

En restreignant les domaines de définition et les images de cosinus, sinus et tangente, on en fait des bijections. Elles possèdent donc chacune une fonction réciproque.

Notée $\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$, la fonction g_1 « **arc cosinus** » associe à tout nombre $x \in [-1;1]$ un angle $y \in [0;\pi]$ tel que :

$$\cos(y) = x \Leftrightarrow y = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$

$$g_1 : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$$
$$x \longmapsto g_1(x) = \arccos(x) = \cos^{-1}(x)$$

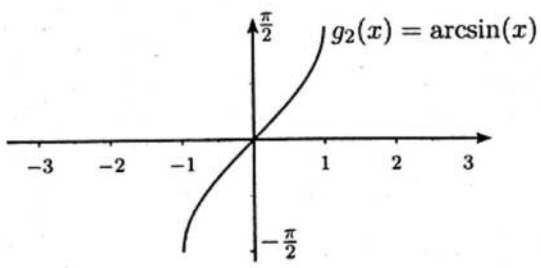


Par périodicité et symétrie de la fonction cosinus, les autres « angles-réponses » peuvent être déduits de la solution donnée par la calculatrice.

Notée $\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$, la fonction g_2 « **arc sinus** » associe à tout nombre $x \in [-1;1]$ un angle $y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que :

$$\sin(y) = x \Leftrightarrow y = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$$

$$g_2 : [-1;1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}]$$
$$x \longmapsto g_2(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$$

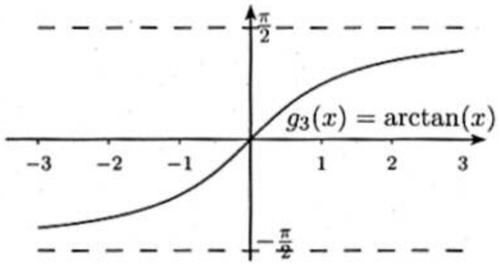


Par périodicité et symétrie de la fonction sinus, les autres « angles-réponses » peuvent être déduits de la solution donnée par la calculatrice.

Notée $\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$, la fonction g_3 « **arc tangente** » associe à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ un angle $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\tan(y) = x \Leftrightarrow y = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} g_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto g_3(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x) \end{aligned}$$

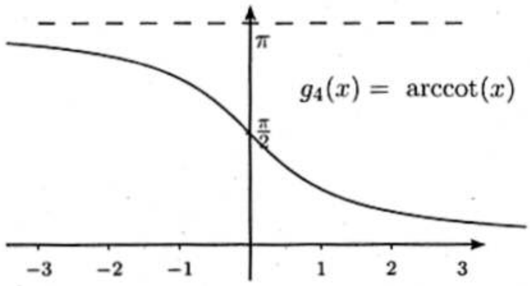


Par périodicité et symétrie de la fonction tangente, les autres « angles-réponses » peuvent être déduits de la solution donnée par la calculatrice.

Notée $\operatorname{arccot}(x)$ ou $\cot^{-1}(x)$, la fonction g_4 « **arc cotangente** » associe à tout nombre $x \in \mathbb{R}$ un angle $y \in [\,0\,;\,\pi\,]$ tel que :

$$\cot(y) = x \Leftrightarrow y = \operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} g_4 : \mathbb{R} &\longrightarrow [0;\pi] \\ x &\longmapsto g_4(x) = \operatorname{arccot}(x) = \cot^{-1}(x) \end{aligned}$$

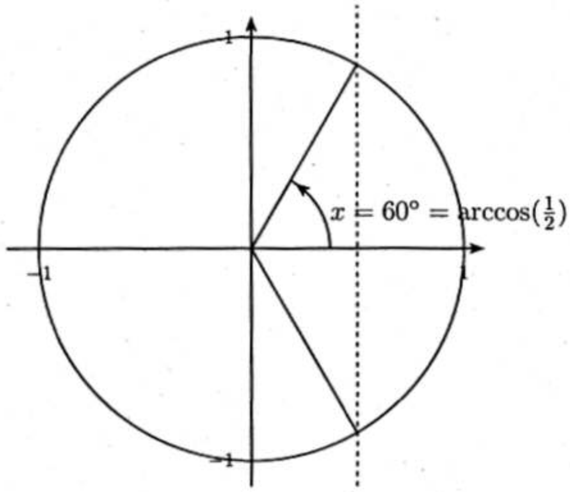


Par périodicité et symétrie de la fonction cotangente, les autres « angles-réponses » peuvent être déduits de la solution donnée par la calculatrice.

► **Exemples :**

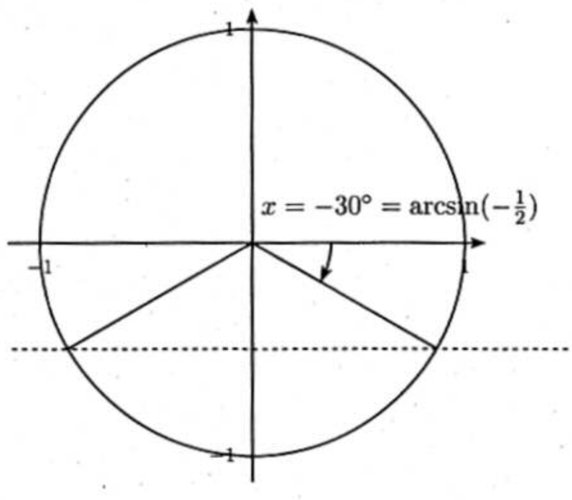
a. $\cos(x) = 0,5 \;\Rightarrow\; x = \cos^{-1}(0,5) = 60°$, mais aussi $-60°$ car $\cos(x) = \cos(-x)$.
Ainsi les angles x tels que $\cos(x) = 0,5$ appartiennent à

$$S = \begin{cases} 60° + k \cdot 360°, \; k \in \mathbb{Z} \\ -60° + k \cdot 360°, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



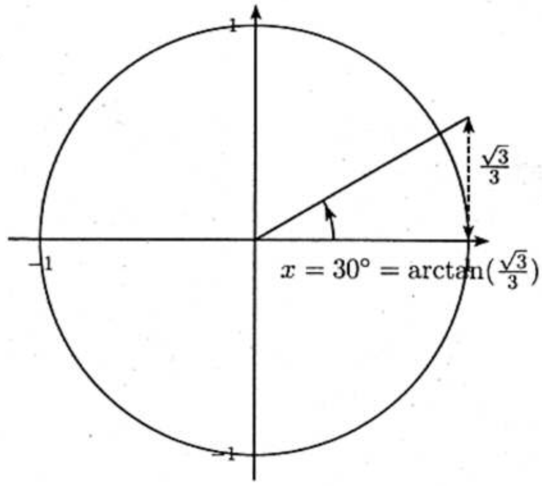
b. $\sin(x) = 0,5 \;\Rightarrow\; x = \sin^{-1}(0,5) = -30°$, mais aussi $210°$ car $\sin(x) = \cos(180° - x)$.
Ainsi les angles x tels que $\sin(x) = -0,5$ appartiennent à

$$S = \begin{cases} -30° + k \cdot 360°, \; k \in \mathbb{Z} \\ 210° + k \cdot 360°, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



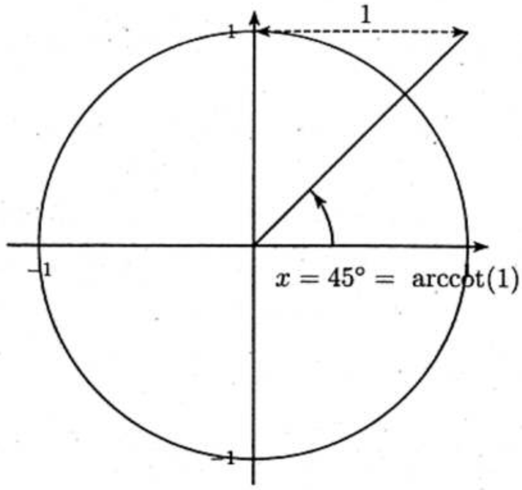
c. $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 30°$, mais aussi 210° car $\tan(x) = \tan(180° + x)$.
Ainsi les angles x tels que $\sin(x) = -0,5$ appartiennent à

$$S = \begin{cases} 30° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z} \\ 210° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



d. $\cot(x) = 1 \Rightarrow x = \cot^{-1}(1) = 45°$, mais aussi 225° car $\cot(x) = \cot(180° + x)$.
Ainsi les angles x tels que $\cot(x) = 1$ appartiennent à

$$S = \begin{cases} 45° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z} \\ 225° + k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

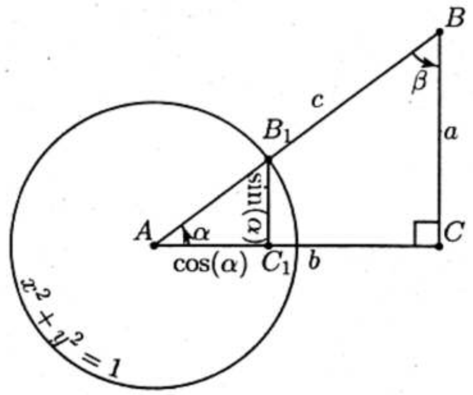


3.4 Trigonométrie dans les triangles

3.4.1 Les triangles rectangles

Soit un triangle rectangle ABC, de côtés a, b et c, c étant l'hypoténuse du triangle. Superposons ce triangle au cercle trigonométrique. On obtient alors deux triangles semblables, le triangle ABC et le triangle AB_1C_1. On en déduit alors les relations suivantes :

$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{a}{c}$$
$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{b}{c}$$
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$



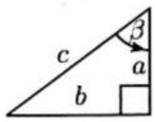
Appelons : "hyp" l'hypoténuse du triangle, ici c, "opp" le côté opposé à l'angle α, ici a et enfin "adj" le côté adjacent à l'angle α, ici b. Les formules trigonométriques dans un triangle rectangle sont alors les suivantes :

$$\begin{array}{lcll} \sin(\alpha) & = & \dfrac{\text{"opposé"}}{\text{"hypoténuse"}} & \text{"sin – opp – hyp"} \\ \cos(\alpha) & = & \dfrac{\text{"adjacent"}}{\text{"hypoténuse"}} & \text{"cos – adj – hyp"} \\ \tan(\alpha) & = & \dfrac{\text{"opposé"}}{\text{"adjacent"}} & \text{"tan – opp – adj"} \end{array}$$

► **Exemples :**

a. Que vaut $\cos(\beta)$?

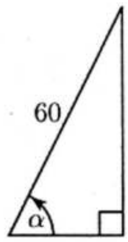
$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \left(\neq \frac{b}{c} \right)$$



b. Que valent les côtés si $\alpha = 72°$?

$$\text{opp} = \sin(72°) \cdot 60 \cong 57,06$$

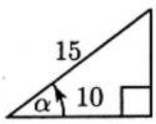
$$\text{adj} = \cos(72°) \cdot 60 \cong 18,54$$



c. Que vaut $\alpha°$?

$$\cos(\alpha) = \frac{10}{15}$$

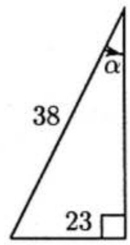
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{15}\right) \cong 48,2°$$



d. Que vaut $\alpha°$?

$$\sin(\alpha) = \frac{23}{38}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{23}{38}\right) \cong 37,3°$$



3.4.2 Calcul de l'aire d'un triangle quelconque

Nous allons maintenant généraliser les résultats trouvés pour les triangles rectangles aux triangles quelconques. Le but est de trouver une méthode pour calculer tous les éléments d'un triangle quelconque étant donnés 3 éléments (côtés, angle, aire, etc. . .) Commençons par trouver une formule pour calculer l'aire d'un triangle ABC quelconque. Notons h_B la hauteur du triangle issue du sommet B.

On a alors :

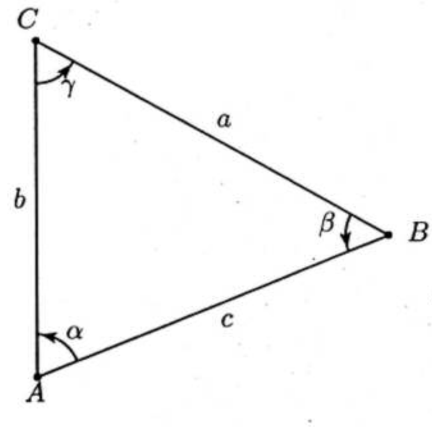
$$\text{Aire} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{bc \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

De manière analogue, on obtient

$$\text{Aire} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2}$$

et

$$\text{Aire} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{bc \cdot \sin(\pi - \beta)}{2} = \frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2}$$



3.4.3 Théorème du sinus

Soit R, le rayon du cercle circonscrit au triangle quelconque ABC On peut observer alors les relations suivantes
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

Preuve :

Par ce qui précède on a :

$$\frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{ac \cdot \sin(\beta)}{2} \Rightarrow ab \cdot \sin(\gamma) = ac \cdot \sin(\beta) \Rightarrow \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

et

$$\frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{bc \cdot \sin(\alpha)}{2} \Rightarrow ab \cdot \sin(\gamma) = bc \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

On en déduit donc que

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

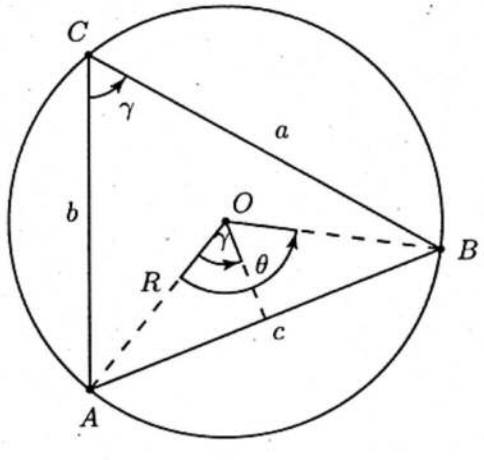
Le centre du cercle circonscrit se trouve à l'intersection des médiatrices du triangle ABC. Par le théorème de l'angle inscrit, on la relation $\theta = 2\gamma$. Dans le triangle AOB, on a la relation

$$\sin(\gamma) = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Au total, on a bien :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

□



Cas particulier :

Si $\alpha = 90°$, (triangle rectangle) on a $\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin(\beta)}$, c'est-à-dire, $\sin(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$.

3.4.4 Théorème du cosinus

Le théorème du cosinus est un résultat généralisé du théorème de Pythagore.

Dans un triangle quelconque, on a les relations suivantes

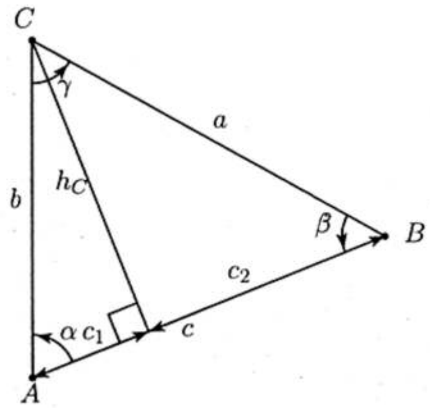
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Preuve :

$$c = c_1 + c_2 \qquad \frac{c_1}{b} = \cos(\alpha) \qquad \frac{h_C}{b} = \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= h_C^2 + c_2^2 \\ &= (b\sin(\alpha))^2 + (c - b\cos(\alpha))^2 \\ &= b^2\sin^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) \\ &= \left(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

On montre les autres formules de manière analogue.



□

Cas particulier :
Si $\alpha = 90°$, on a $a^2 + b^2 = c^2$. On retrouve le théorème de Pythagore.

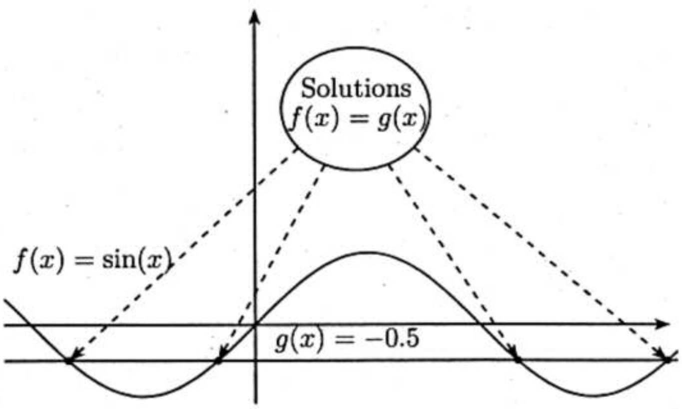
3.5 Equations trigonométriques

Les formules trigonométriques sont des égalités qui sont valables quel que soit l'angle qui intervient. Les équations trigonométriques sont des relations qui sont vraies que pour certains angles.

► **Exemples :**

a. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$ est une formule trigonométrique.
b. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ est une équation dont les solutions sont $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Nous avons déjà rencontré et résolu quatre équations trigonométriques de base : $\cos(x) = 0,5$ puis $\sin(x) = -0,5$ et $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et enfin $\cot(x) = 1$. On peut représenter graphiquement les solutions d'un équation trigonométrique. Sur le graphe ci-contre, on peut lire les solutions de l'équation $\sin(x) = -0,5$. Le but de cette section est de trouver des méthodes numériques pour résoudre des équations.
Il n'existe pas une liste exhaustive de techniques pour résoudre une équation trigonométrique. Pour résoudre une équation trigonométrique, il faut parfois faire plusieurs opérations algébriques pour se ramener à des équations simples. Nous nous proposons ici de résoudre certaines équations dans un cas général puis de voir quelques exemples.



3.5.1 Equations simples

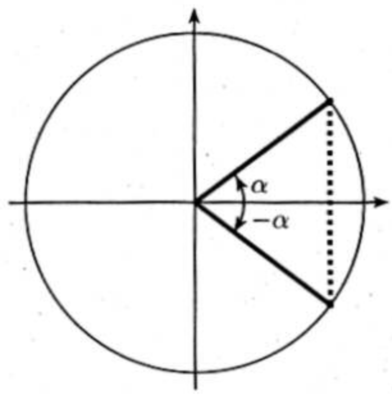
► Les équations de la forme

$$\cos(\alpha) = a$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cette solution vient de l'observation suivante : le cosinus d'un angle α est le même que le cosinus d'un angle de $2\pi - \alpha$.



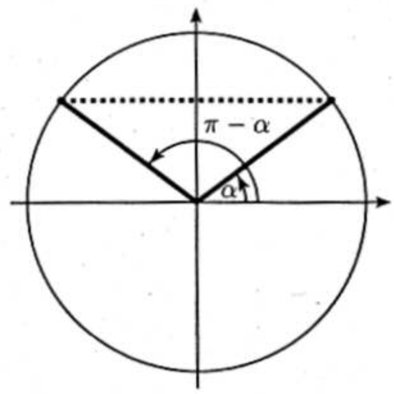
► Les équations de la forme

$$\sin(\alpha) = a$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cette solution vient de l'observation suivante : le sinus d'un angle α est le même que le sinus d'un angle de $\pi - \alpha$.



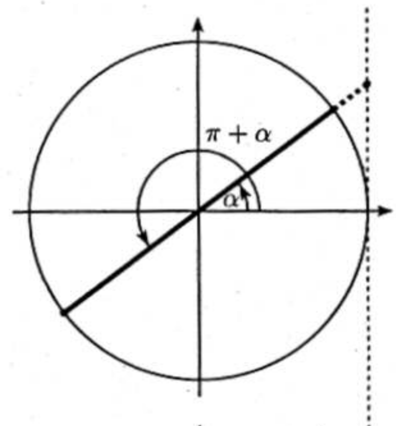
► Les équations de la forme

$$\tan(\alpha) = a$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\alpha = \tan^{-1}(a) + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Cette solution vient de l'observation suivante : la tangente d'un angle α est la même que la tangente d'un angle de $\pi + \alpha$.



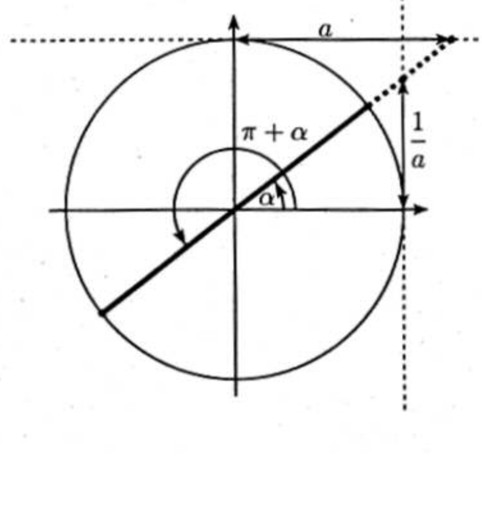
► Les équations de la forme

$$\cot(\alpha) = a$$

peuvent s'écrire sous la forme $\tan(\alpha) = \frac{1}{a}$ et se résolvent de la manière suivante :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Comme avant, cette solution vient de l'observation suivante : la tangente d'un angle de α est la même que la tangente d'un angle de $\pi + \alpha$.



3.5.2 Egalités de sinus, cosinus, tangentes et cotangentes

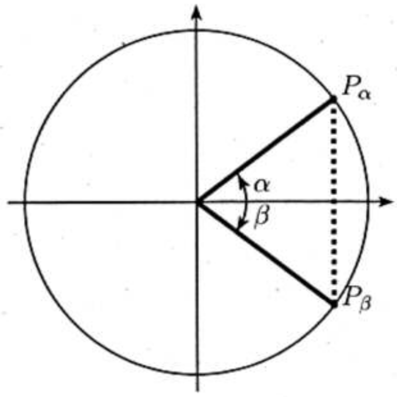
► Les équations de la forme

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta)$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\beta + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En effet, les cosinus sont égaux si les points P_α et P_β sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe O_x.



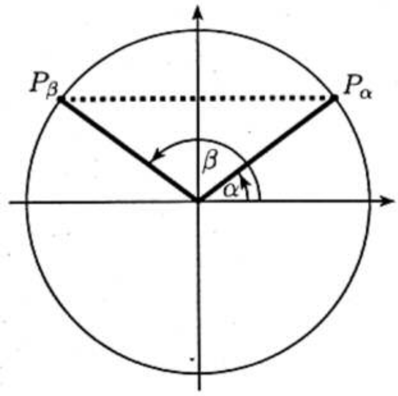
► Les équations de la forme

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta)$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \beta = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En effet, les sinus sont égaux si les points P_α et P_β sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe O_y.



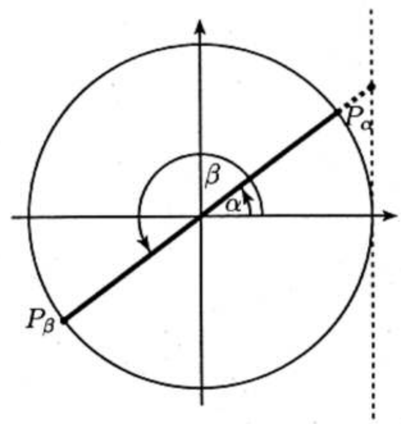
► Les équations de la forme

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta)$$

se résolvent de la manière suivante :

$$\alpha = \beta + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

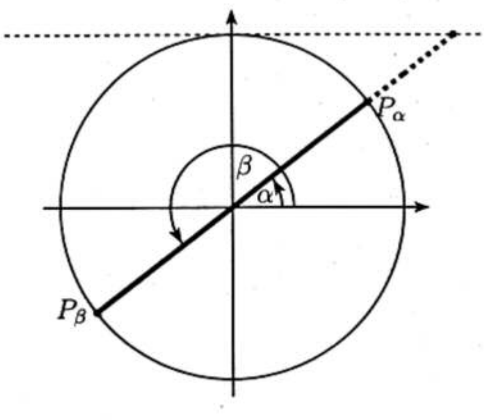
En effet, les tangentes sont égales si les points P_α et P_β sont confondus ou symétriques par rapport à l'origine.



► Les équations de la forme $\cot(\alpha) = \cot(\beta)$ se résolvent de la manière suivante :

$$\alpha = \beta + k \cdot \pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

En effet, comme avant, les cotangentes sont égales si les points P_α et P_β sont confondus ou symétriques par rapport à l'origine.



3.5.3 Exemples

▶ $\cos(4x) = 0.5 \Rightarrow 4x = 60°$

$$\begin{aligned} \text{a) } 4x &= 60° + k \cdot 360° \\ &\Rightarrow x = 15° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{b) } 4x &= 300° + k \cdot 360° \\ &\Rightarrow x = 75° + k \cdot 90°,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

▶ $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(5x)$

$$\begin{aligned} \text{a) } 5x &= 3x + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ 2x &= \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ &\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{b) } 5x &= \pi - 3x - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ 8x &= \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ &\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

▶ $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{3}\sin(x) = \cos(x) \\ &\Rightarrow \sin(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cos(x) \\ &\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Rightarrow x = 30° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

▶ $6\cos^2(x) = 5\sin(x)$

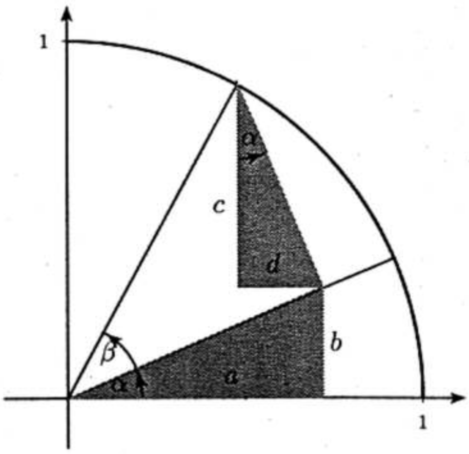
$$\begin{aligned} &\Rightarrow 6\left(1 - \sin^2(x)\right) = 5\sin(x) \\ &\Rightarrow 6\sin^2(x) + 5\sin(x) - 6 = 0 \\ &\Rightarrow 6u^2 + 5u - 6 = 0 \qquad (u = \sin(x)) \\ &\Rightarrow u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } u_2 = -\frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \sin(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{impossible} \\ &\Rightarrow \sin(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

3.6 Formules d'addition des angles

On se propose de calculer $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$. Avant toutes choses, il faut savoir que :

$$\cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha) + \cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin(\alpha) + \sin(\beta)$$



Dans le triangle « a-b » : On connaît α et l'hypoténuse $\cos(\beta)$. $a = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ (cos-adj-hyp) et $b = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ (sin-opp-hyp).
Dans le triangle « c-d » : On connaît l'hypoténuse $\sin(\beta)$ et un angle α. $c = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ (cos-adj-hyp) et $d = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ (sin-opp-hyp).
A partir des expressions de a, b, c et d, nous obtenons les **formules d'addition :**

$$\cos(\alpha + \beta) = a - d \qquad \sin(\alpha + \beta) = b + c$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Ces formules d'addition sont valables pour tous les angles α et β.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

De ces formules on en déduit $\cos(\alpha-\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+(-\beta)) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)\\ &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+(-\beta)) &= \cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta)\\ &= -\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\end{aligned}$$

et donc

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

De même (cf. exercices) on en déduit le formules de duplication :

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

De ces formules, en divisant par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$, on peut encore déduire la $\tan(\alpha\pm\beta)$:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}+\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\cdot\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan(\alpha)+\tan(-\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(-\beta)} = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\end{aligned}$$

et donc :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

► **Exemples :**

Ces formules permettent de calculer des valeurs exactes :

$$\cos(75°) = \cos(30°+45°) = \cos(30°)\cos(45°) - \sin(30°)\sin(45°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

$$\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \sin(30°)\cos(45°) + \cos(30°)\sin(45°) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$\tan(75°) = \frac{\tan(30°)+\tan(45°)}{1-\tan(30°)\tan(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+12}{6} = 2+\sqrt{3}$$

3.7 Différence de cosinus ou sinus

On se propose de trouver une formule de calcul pour évaluer une différence de sinus ou de cosinus.

$$\cos(p) - \cos(q) = ...$$

$$\sin(p) - \sin(q) = ...$$

Pour trouver ces formules, on cherche deux nombres α et β de sorte que $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$. De tels nombres existent, ils valent :

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad \beta = \frac{p-q}{2}$$

Ainsi :

$$\cos(p) = \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(q) = \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

et donc

$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\alpha)\sin(\beta) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

De même,

$$\sin(p) = \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\sin(q) = \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

et donc

$$\boxed{\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\alpha)\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

3.8 Formule des physiciens

La formule des physiciens permet de justifier la propriété suivante :

« La somme de deux sinusoïdes de même fréquence est encore une sinusoïde. »

La forme des physiciens s'écrit sous la forme suivante :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi)$$

Cette formule dit que pour toute paire de nombre a et b, il existe une amplitude A et un déphasage φ vérifiant l'égalité précédente. Pour trouver les relations entre a, b, A et φ, on développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} A\cos(x-\varphi) &= A(\cos(x)\cos(\varphi) + \sin(x)\sin(\varphi)) \\ &= \underbrace{A\cos(\varphi)}_{a}\cos(x) + \underbrace{A\sin(\varphi)}_{b}\sin(x) \end{aligned}$$

La formule est correcte si l'on a $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$.Autrement dit, pour que la formule soit correcte, il faut choisir

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi \text{ tel que } \cos(\varphi) = \tfrac{a}{A} \text{ et } \sin(\varphi) = \tfrac{b}{A}$$

En résumé, la formule des physiciens est la suivante :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = A\cos(x - \varphi)$$

$$\text{Avec } A = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos(\varphi) = \frac{a}{A},\ \sin(\varphi) = \frac{b}{A}$$

► **Exemple :**

On souhaite démontrer l'égalité suivante :

$$\cos(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(x) + \cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos(x) + \cos(x)\cdot\frac{1}{2} + \sin(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) \\ &= \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\uparrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \\ \left.\begin{array}{l} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{6} \end{array}}$$