# Chapitre 6

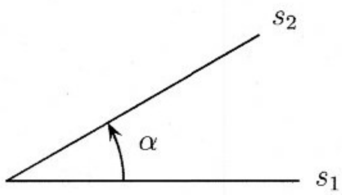
# Trigonométrie

## 6.1 Le cercle trigonométrique

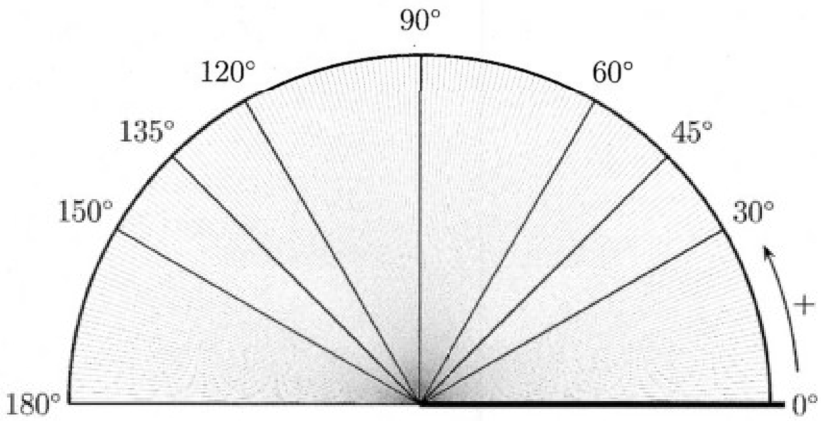
### 6.1.1 Les angles

Développée par les Grecs il y a plus de 2000 ans, la trigonométrie est une partie des mathématiques qui s'occupe des relations entre les longueurs et les angles des triangles. Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

Un angle est une grandeur permettant de décrire l'amplitude d'une rotation. On utilise très souvent les lettres grecques $\alpha$ (alpha), $\beta$ (bêta), $\gamma$ (gamma), $\varphi$ (phi), $\psi$ (psi) ou $\theta$ (thêta) pour nommer les angles.

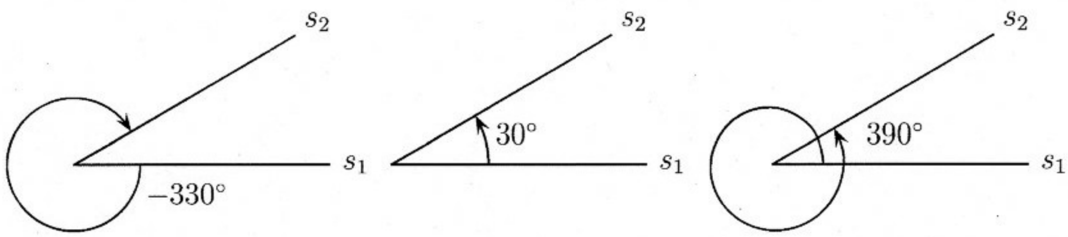



Afin de résoudre des problèmes ayant attrait à l'astronomie, les Babyloniens ont divisé le disque en 360 parties égales identifiant un *degré* [°]. On mesure le nombre de degrés depuis la demi-droite de référence du 0° dans le *sens trigonométrique* (sens contraire de celui des aiguilles d'une montre).




On peut mesurer les angles à l'aide d'un *rapporteur*.

Attention, à une même situation peuvent correspondre plusieurs angles (une infinité !). En effet, on peut faire autant de tours que l'on veut dans un sens comme dans l'autre. Par exemple, voici trois façons d'amener le segment $s_1$ sur le segment $s_2$ par une rotation.




Voici quelques uns des angles correspondant à la situation ci-dessus.

$$\ldots, -1050°, -690°, -330°, 30°, 390°, 750°, 1110°, \ldots$$

Ces angles sont les mêmes à un multiple de 360° près, ce qui correspond à un tour.

**Définition**

Un angle $\alpha$ est dit

c) *aigu* si $\alpha > 0°$ et $\alpha < 90°$ ;

d) *droit* si $\alpha = 90°$ ;

e) *obtus* si $\alpha > 90°$ et $\alpha < 180°$ ;

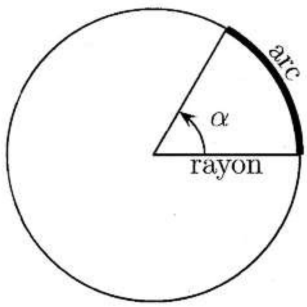
f) *plat* si $\alpha = 180°$.

## Les radians

Lorsqu'on trace un arc de cercle comme montré ci-contre, les mathématiciens ont remarqué que le nombre

$$\alpha = \frac{\text{longueur d'arc}}{\text{rayon du cercle}}$$

est indépendant de la grandeur du rayon. En munissant ce nombre d'un signe selon le sens de parcours de l'arc de cercle, on obtient un angle en *radians*.




**Cas particulier** Lorsque le rayon du cercle vaut 1, le radian est exactement la longueur de l'arc de cercle (sans oublier le signe indiquant le sens de parcours).

### Relation entre les degrés et les radians

Sur un cercle de rayon 1, 360° correspondent à un tour complet, donc à un arc de cercle de longueur $2\pi$ (c'est le périmètre du cercle de rayon 1). Ainsi 360° correspondent à $2\pi$ radians. De même, 180° correspondent à $\pi$ radians et 90° correspondent à $\frac{\pi}{2}$ radians.

$$2\pi \longleftrightarrow 360° \qquad \boxed{\pi \longleftrightarrow 180°} \qquad \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow 90°$$

**Remarque**

La mesure d'un angle en radians étant un rapport de longueurs, un radian est juste un nombre sans unités.

**Attention**

Sauf mention explicite (par le symbole °), un angle est toujours exprimé en radians.

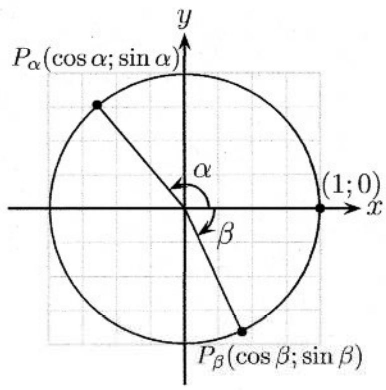
### 6.1.2 Le cercle trigonométrique

**Définition**

Dans le plan, le cercle centré à l'origine de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*.

**Le cosinus et le sinus d'un angle**

À chaque angle $\alpha$, on trouve un unique point $P_\alpha$ sur le cercle trigonométrique qui correspond à la rotation d'angle $\alpha$ du point extrême droit du cercle (dont les coordonnées sont $(1;0)$) centrée à l'origine (dont les coordonnées sont $(0;0)$). Ce point a deux coordonnées. On définit le *cosinus de l'angle* $\alpha$, noté $\cos(\alpha)$, comme étant la première coordonnée de ce point $P_\alpha$ et le *sinus de* $\alpha$, noté $\sin(\alpha)$, comme étant sa deuxième coordonnée.




Par exemple, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ou $\alpha = 90°$), on trouve $P_{\frac{\pi}{2}}(0;1)$. Ainsi, on a $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. On voit de même que $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$, car $P_{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$.

On peut donc déjà déterminer quelques valeurs pour $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\alpha)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\sin(\alpha)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

**Relation fondamentale entre le cosinus et le sinus**

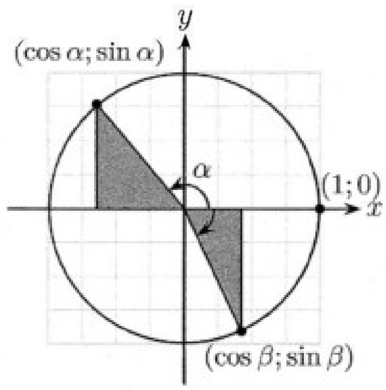
Quelque soit l'angle $\alpha$, on a la formule suivante :

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1}$$

Cette formule permet de déterminer le cosinus (au signe près) lorsque seul le sinus est connu, ou vice-versa.

**Preuve**

Pour n'importe quel angle $\alpha$, on peut dessiner un triangle. S'il n'est pas dégénéré, il s'agit d'un triangle rectangle d'hypoténuse 1 dont le côté horizontal est de longueur $|\cos(\alpha)|$ et le côté vertical est de longueur $|\sin(\alpha)|$.




On trouve donc par Pythagore, la formule désirée :

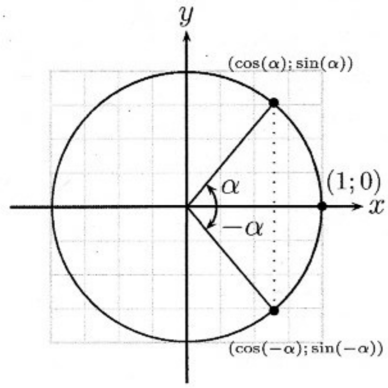
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Si le triangle est dégénéré, la relation ci-dessus est évidente. $\square$

### 6.1.3 Formules de symétrie

#### La symétrie d'axe horizontal $y = 0$

Lorsqu'à un angle $\alpha$, on associe l'angle $-\alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe horizontal.



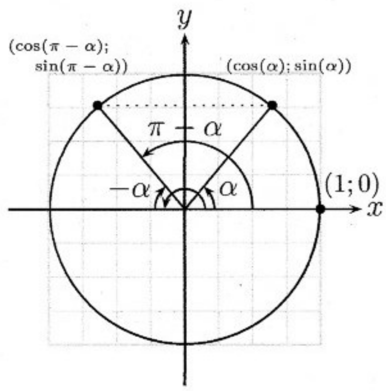

Cette symétrie ne change pas la première coordonnée d'un point du plan, mais elle change le signe de la deuxième coordonnée.

D'où les *formules de symétrie pour l'axe horizontal* $y = 0$ suivantes.

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)}$$

#### La symétrie d'axe vertical $x = 0$

Lorsqu'à un angle $\alpha$, on associe l'angle $\pi - \alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe vertical.



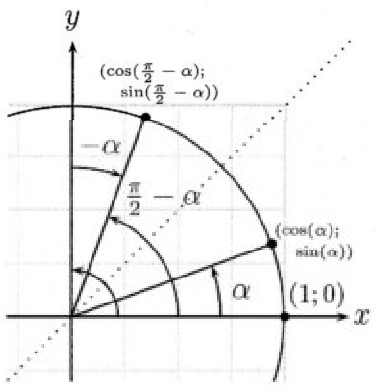

Cette symétrie change le signe de la première coordonnée d'un point du plan, mais elle ne change pas la deuxième coordonnée.

D'où les *formules de symétrie pour l'axe vertical* $x = 0$ suivantes.

$$\boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)}$$

#### La symétrie d'axe diagonal $y = x$

Lorsqu'à un angle $\alpha$, on associe l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, les points correspondants sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe diagonal.




Cette symétrie échange les coordonnées (la première devient la deuxième et vice-versa).

D'où les *formules de symétrie pour l'axe diagonal* $y = x$ suivantes.

$$\boxed{\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)}$$
$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)}$$

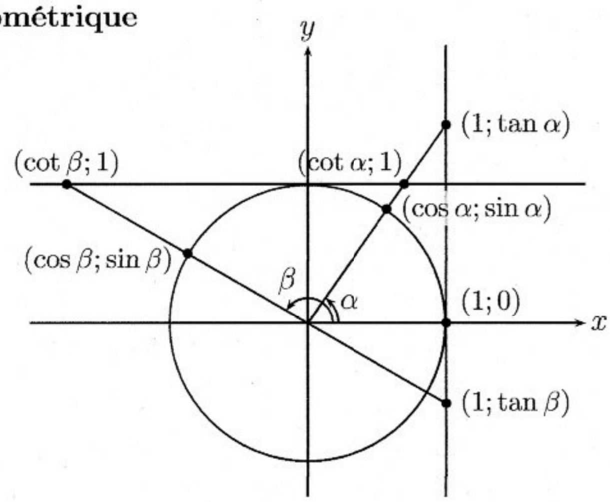
### 6.1.4 Les fonctions tangente et cotangente

**Définition**

On définit les fonctions réelles *tangente* et *cotangente* comme suit

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

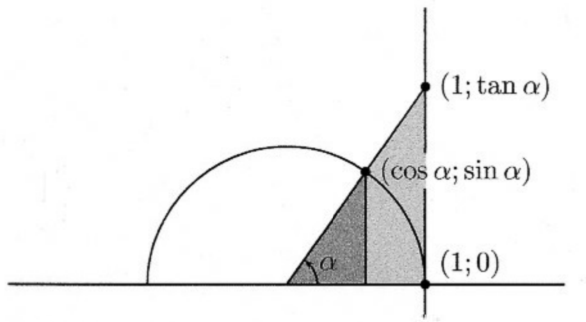
**Interprétation géométrique**




On remarque que $\tan(\alpha)$ est la hauteur du point d'intersection entre la droite passant par $(0,0)$ et $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ avec la droite verticale tangente au cercle trigonométrique au point $(1;0)$. D'où son appellation de tangente.

**Preuve de l'interprétation géométrique pour la formule de la tangente**

On exhibe à partir du dessin deux triangles semblables.




Les triangles gris foncé et gris clair (sous le gris foncé) sont semblables. Ainsi, en multipliant les longueurs des trois côtés du petit triangle par le même facteur, appelé *facteur d'homothétie*, on doit pouvoir trouver les longueurs des trois côtés du grand triangle. On voit que le facteur d'homothétie est $\frac{1}{\cos(\alpha)}$. Ainsi la hauteur du grand triangle vaut

$$\tan(\alpha) = \underbrace{\sin(\alpha)}_{\substack{\text{hauteur du} \\ \text{petit triangle}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cos(\alpha)}}^{\text{facteur d'homothétie}} = \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}_{\substack{\text{hauteur du} \\ \text{grand triangle}}}$$

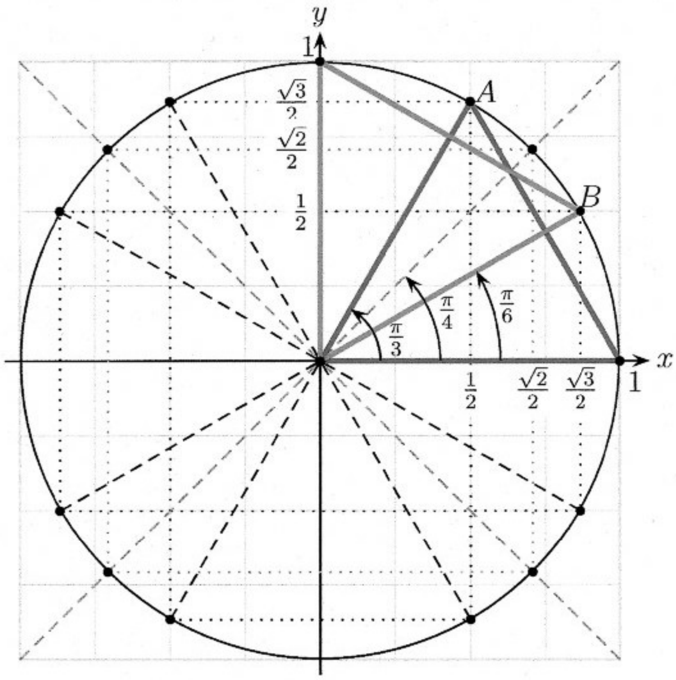
$\square$

## 6.2 Valeurs des fonctions trigonométriques

Les colonnes grisées sont à savoir par cœur en toute circonstance !

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\alpha)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ | $0$ |
| $\sin(\alpha)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ | $1$ |
| $\tan(\alpha)$ | $0$ | $2-\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ | ↯ |

Pour s'en souvenir, le lecteur pourrait juger utile d'avoir en tête le schéma suivant.




Sur une montre, on voit

les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$

### Preuve des valeurs grisées

1. On considère le triangle rouge de sommets $(0,0)$, $A(\frac{1}{2}; y)$ et $(1;0)$. Par symétrie d'axe vertical $x=\frac{1}{2}$, on affirme que le côté gauche est de même longueur que le côté droit ; cette longueur est égale au rayon du cercle trigonométrique qui vaut 1. Le triangle est donc équilatéral, et ses angles valent $\frac{\pi}{3}$. Grâce au théorème de Pythagore, on montre facilement que $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par définition, on a $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Grâce à la symétrie d'axe diagonal $y=x$, on passe du triangle rouge au triangle vert de sommets $(0,0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$ et $(0;1)$. Ainsi l'angle qui définit le point $B$ sur le cercle trigonométrique vaut $\frac{\pi}{6}$ (car le triangle vert est équilatéral, donc ses angles valent $\frac{\pi}{3}$). Par définition, on a $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.
3. Quant à $\cos(\frac{\pi}{4})$ et à $\sin(\frac{\pi}{4})$, ils ont la même valeur, notée $x$, que l'on trouve grâce à la relation $\cos^2(\frac{\pi}{4})+\sin^2(\frac{\pi}{4})=1$ qui est équivalente à $x^2+x^2=1$, c'est-à-dire $x^2=\frac{1}{2}$ et ainsi, comme $x$ est positif, on obtient $x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## 6.3 Les triangles rectangles

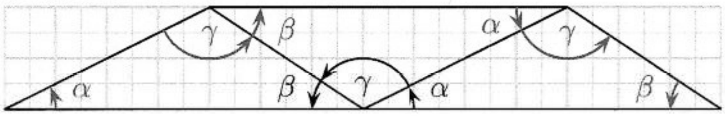
On va tout d'abord étudier dans quels cas on peut trouver toutes les longueurs des côtés des triangles rectangles sans s'occuper des angles. Ensuite, on fera de même, mais en utilisant l'information supplémentaire que les angles nous apportent.

**Convention** Les angles d'un triangle sont toujours compris entre 0 et $\pi$.

### Théorème sur les triangles quelconques

La somme des angles d'un triangle quelconque vaut $\pi$.
Donc si on connaît deux angles d'un triangle, on peut en déduire le troisième angle.

### Preuve par contemplation

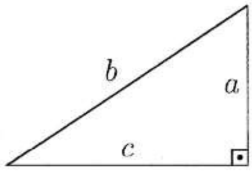



**Définition** Un triangle qui a un angle droit est appelé *triangle rectangle*.

### Théorème de Pythagore

On considère le triangle rectangle ci-contre. Les longueurs des côtés de ce triangle satisfont la relation de Pythagore :

$$a^2 + c^2 = b^2$$

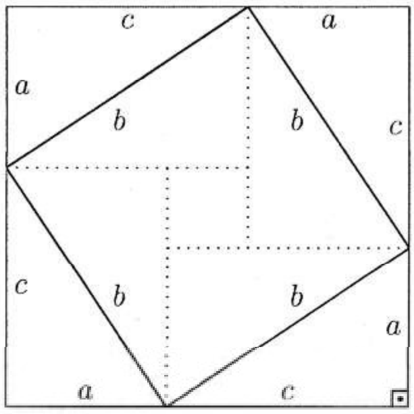



### Preuve

On construit un grand carré en disposant le même triangle rectangle dans chaque coin. On obtient ainsi un grand carré de côté $a + c$ dans lequel se trouve un petit carré de côté $b$ (puisque la somme des deux angles non droits du triangle rectangle vaut $\frac{\pi}{2}$).

L'aire de ce grand carré peut être calculée de deux façons différentes. On peut aussi dire qu'il s'agit de l'aire du petit carré plus l'aire des quatre triangles.

$$(a+c)^2 = b^2 + 4 \cdot \frac{ac}{2} \iff a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2ac$$
$$\iff a^2 + c^2 = b^2 \qquad \square$$




### En résumé

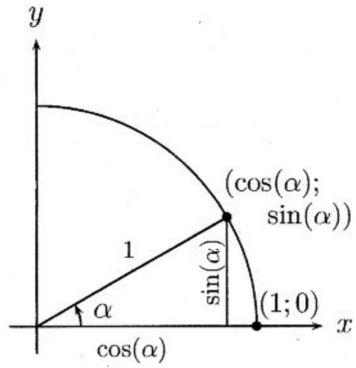
Le théorème de Pythagore permet de déterminer les longueurs de tous les côtés d'un triangle rectangle si deux de ces longueurs sont déjà connues.

Néanmoins, si seulement une longueur d'un côté est connue, le théorème de Pythagore est inutilisable, même si un angle (différent de l'angle droit) est aussi connu.

On a donc besoin de mettre en relation les angles et les longueurs des côtés dans un triangle rectangle.

### Les côtés d'un triangle rectangle et les fonctions trigonométriques

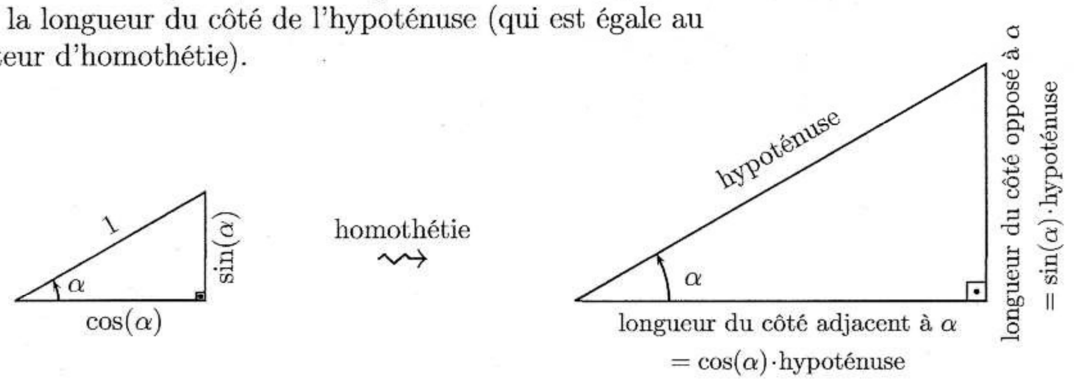
A chaque angle $\alpha$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on peut associer un triangle rectangle de côtés de longueur 1 (pour l'hypoténuse) et $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ pour les deux cathètes.




Tout triangle rectangle est, à une homothétie (agrandissement ou rapetissement) près, un triangle rectangle pouvant se voir de la façon décrite ci-contre.

On a donc une méthode pour mettre en relation un angle d'un triangle rectangle avec la longueur de ses côtés.

Pour déterminer les longueurs des côtés lorsque l'hypoténuse ne vaut pas 1, on multiplie toutes les longueurs par la longueur du côté de l'hypoténuse (qui est égale au facteur d'homothétie).




On peut donc utiliser les fonctions cosinus et sinus pour établir des formules reliant les grandeurs des différents côtés d'un triangle rectangle. Mais avant, on va définir une nouvelle fonction trigonométrique sur laquelle on reviendra plus loin.

**Définition** Soit $\alpha$ un angle, on définit la *tangente* de cet angle $\alpha$ de la façon suivante.

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

### Relations entre les fonctions trigonométriques et les longueurs des côtés d'un triangle rectangle

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}$$ penser à « cos-adj-hyp »

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}$$ penser à « sin-opp-hyp »

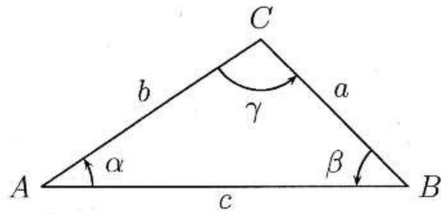
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}}$$ penser à « tan-opp-adj »

### Remarque

Grâce aux fonctions trigonométriques, il suffit maintenant de connaître
– la longueur d'au moins deux côtés d'un triangle rectangle, ou
– la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et un angle (différent de l'angle droit),
pour pouvoir en déterminer toutes ses caractéristiques (angles et longueurs des côtés).

## 6.4 Les triangles quelconques

**Convention** On note les sommets dans le sens positif par $A$, $B$ et $C$. Les angles associés aux sommets seront respectivement noté $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Quant aux côtés opposés aux sommets, ils seront appelés $a$, $b$ et $c$ respectivement au nom du sommet opposé.




Cette convention est très importante et doit être RESPECTÉE dans le but de pouvoir appliquer les théorèmes qui suivent.

Lorsqu'on avait affaire à des triangles rectangles, la connaissance de deux caractéristiques (angle ou longueur de côté) nous permettait de trouver toutes ses caractéristiques. Dans le cas d'un triangle quelconque, c'est au moins trois caractéristiques qu'ils faut connaître pour pouvoir déterminer toutes les autres. Les mathématiciens ont trouvé deux théorèmes extrêmement utiles.

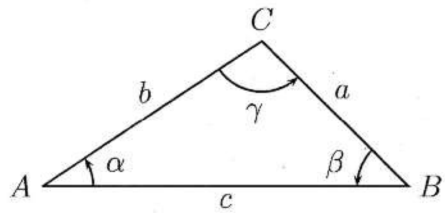
### Théorème du sinus

Considérons un triangle quelconque.
On a la relation suivante.

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

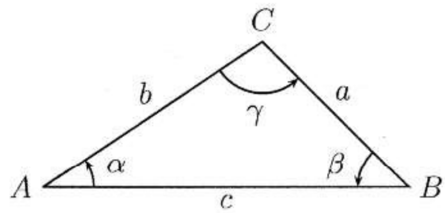



Autrement dit : dans un triangle quelconque, le rapport du sinus d'un angle au côté opposé à cet angle est égal au rapport du sinus d'un autre angle au côté opposé à cet autre angle.

### Théorème du cosinus

Considérons un triangle quelconque.
On a les relations suivantes.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$




Autrement dit : le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés moins deux fois le produit des longueurs des deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle entre-eux.

Pour passer d'une relation à l'autre, on fait les permutations circulaires suivantes.


Cela nous permet de ne mémoriser qu'une seule relation.

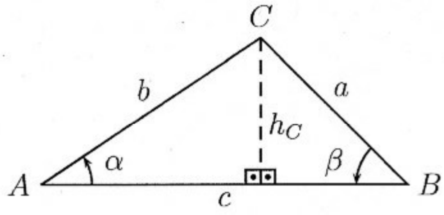
### Preuve du théorème du sinus

Considérons un triangle $ABC$ quelconque et utilisons la hauteur partant du sommet $C$.

Trois cas se produisent.

1. Premier cas : la hauteur 'tombe' à l'intérieur du triangle.

   La hauteur sépare le triangle $ABC$ en deux triangles rectangles.

   Grâce à «sin-opp-hyp», on trouve

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \frac{h_C}{a}$$

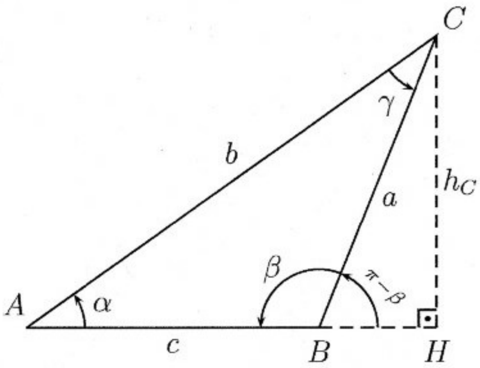
   Ainsi, on a $h_C = b\sin(\alpha)$ et $h_C = a\sin(\beta)$. Par conséquent $b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$.

   Donc

   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

2. Deuxième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle.

   Grâce à la hauteur, on voit apparaître deux triangles rectangles, $AHC$ et $BHC$.

   Grâce à «sin-opp-hyp», on trouve

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \sin(\pi - \beta) = \frac{h_C}{a}$$

   Ainsi, on a $b \cdot \sin(\alpha) = h_C = a \cdot \sin(\pi - \beta)$.

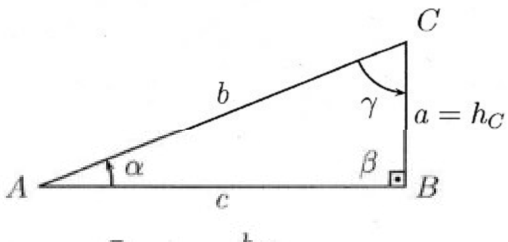
   Donc

   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{b} \overset{\text{page 56}}{=} \frac{\sin(\beta)}{b}$$

   Si la hauteur était tombée à gauche plutôt qu'à droite, le raisonnement aurait été similaire (échanger $A$ et $B$, $a$ et $b$, et $\alpha$ et $\beta$).

3. Troisième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet $B$.

   Le triangle $ABC$ est rectangle. Le côté $a$ correspond à la hauteur $h_C$.

   Grâce à «sin-opp-hyp» et à la relation $a = h_C$, on trouve

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{h_C}{a}$$

   Ainsi, on a $b \cdot \sin(\alpha) = h_C = a \cdot \sin(\beta)$.

   Donc

   $$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

   Si la hauteur était tombée sur le sommet $A$ au lieu du sommet $B$, le raisonnement aurait été similaire (échanger $A$ et $B$, $a$ et $b$, et $\alpha$ et $\beta$).

Par conséquent, quelque soit le triangle $ABC$, on a (grâce à la hauteur partant de $C$)

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

En effectuant la même chose pour la hauteur partant du sommet A, on trouve

$$\frac{\sin(\beta)}{b}$$

Ainsi, on a la formule annoncée

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

qui est équivalente à

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

□

**Preuve du théorème du cosinus**

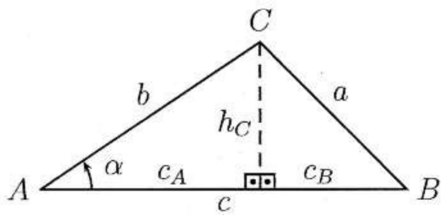
Considérons un triangle $ABC$ quelconque et utilisons la hauteur partant du sommet $C$.

Montrons d'abord la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

Cette formule n'étant pas symétrique en $a$ et $b$ (et en $\alpha$ et $\beta$), on doit distinguer 5 cas.

1. Premier cas : la hauteur 'tombe' à l'intérieur du triangle.

   La hauteur sépare le triangle $ABC$ en deux triangles rectangles. Elle coupe aussi l'arête $c$ en deux parties $c_A$ et $c_B$.

   En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + c_B^2$. Puisque $c_B = c - c_A$, on a

   $$a^2 = h_C^2 + (c - c_A)^2$$

   Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer $h_C$ et $c_A$.

   En effet, on a

   $$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{c_A}{b}$$

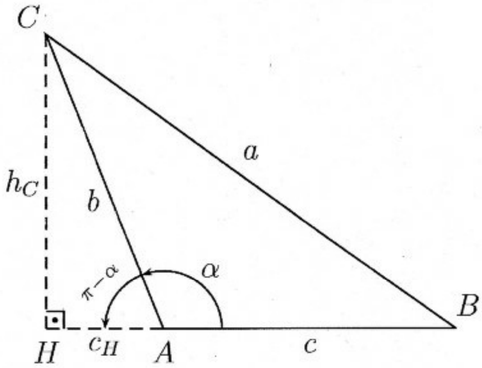
   Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_A = b \cdot \cos(\alpha)$. Donc

   $$\begin{aligned} a^2 &= \big(b\cdot\sin(\alpha)\big)^2 + \big(c - b\cdot\cos(\alpha)\big)^2 \\ &= b^2\sin^2(\alpha) + c^2 + b^2\cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\ &= b^2\big(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ &\overset{\text{page 55}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

   On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

2. Deuxième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle sur la gauche.

La hauteur fait apparaître un nouveau triangle rectangle, elle prolonge l'arête $c$ en y ajoutant une arête $c_H$.




En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + (c + c_H)^2$.

Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer $h_C$ et $c_H$.

En effet, on a

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{h_C}{b} \overset{\text{page 56}}{=} \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - \alpha) = \frac{c_H}{b} \overset{\text{page 56}}{=} -\cos(\alpha)$$

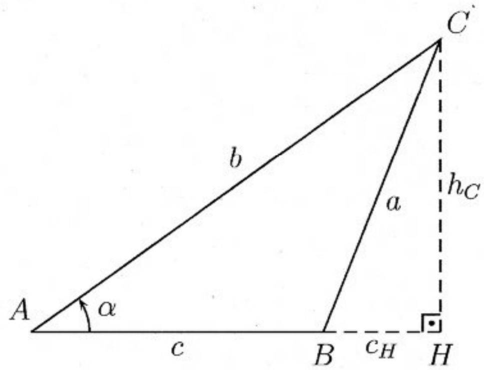
Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_H = -b \cdot \cos(\alpha)$. Donc

$$\begin{aligned}
a^2 &= \big(b \cdot \sin(\alpha)\big)^2 + \big(c - b \cdot \cos(\alpha)\big)^2 \\
&= b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 + b^2 \cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) \\
&= b^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
&\overset{\text{page 55}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

3. Troisième cas : la hauteur 'tombe' à l'extérieur du triangle sur la droite.

La hauteur fait apparaître un nouveau triangle rectangle, elle prolonge l'arête $c$ en y ajoutant une arête $c_H$.




En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que $a^2 = h_C^2 + c_H^2$.

Grâce à «cos-adj-hyp» et «sin-opp-hyp», on peut substituer $h_C$ et $c_H$.

En effet, on a

$$\sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{c + c_H}{b}$$

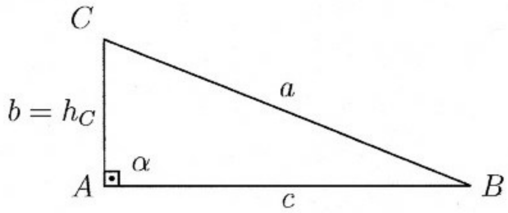
Ainsi, on a $h_C = b \cdot \sin(\alpha)$ et $c_H = b \cdot \cos(\alpha) - c$. Donc

$$\begin{aligned}
a^2 &= \big(b \cdot \sin(\alpha)\big)^2 + \big(b \cdot \cos(\alpha) - c\big)^2 \\
&= b^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
&= b^2\big(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\big) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
&\overset{\text{page 55}}{=} b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

On a donc montré la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

4. Quatrième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet $A$.

   Le triangle $ABC$ est rectangle. Le côté $b$ correspond à la hauteur $h_C$. Ainsi, on peut appliquer Pythagore et remarquer que $\cos(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

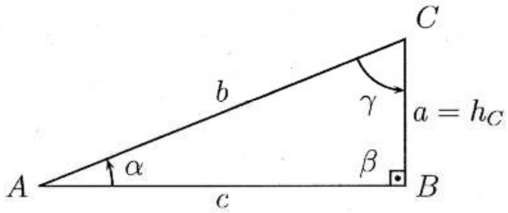
   Par Pythagore, on a $a^2 = b^2 + c^2$.

   Comme $\cos(\alpha) = 0$, on a ainsi la formule cherchée.

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

5. Cinquième cas : la hauteur 'tombe' sur le sommet $B$.

   Le triangle $ABC$ est rectangle. Grâce à Pythagore, on a $a^2 = b^2 - c^2$. Or dans la formule finale, on veut $a^2 = b^2 + c^2 + \cdots$. Pour cette raison, on écrit

   $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - c^2 \\ &= b^2 + c^2 - c^2 - c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2c \cdot c \end{aligned}$$

   Comme $\cos(\alpha) = c/b$ on a $c = b\cos(\alpha)$. En remplaçant un des deux derniers $c$ de l'expression ci-dessus par ce qu'on vient de trouver, il vient

   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

   qui est bien la formule cherchée.

Par conséquent, quelque soit le triangle $ABC$, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Plutôt que de refaire cette preuve pour trouver les deux autres formules, remarquons que cette preuve résiste à une permutation circulaire des lettres $A$, $B$, $C$ ; $a$, $b$, $c$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.


Après la permutation circulaire, le triangle est toujours réglementaire par rapport aux notations fixées en page 61. On peux donc reporter cette permutation circulaire sur la formule pour trouver

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)$$

Une seconde permutation circulaire supplémentaire nous donne la troisième formule.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

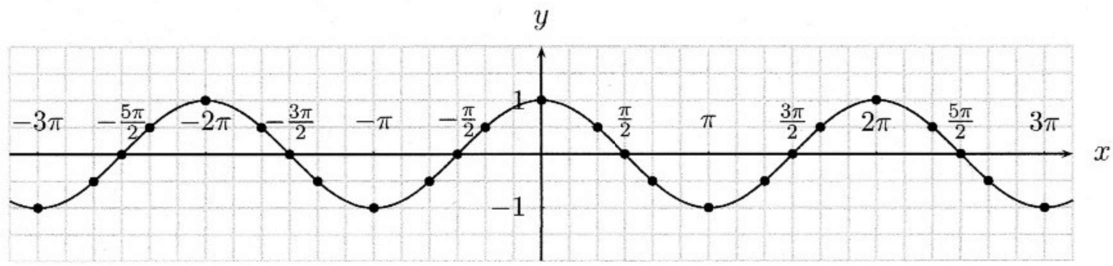
□

## 6.5 Les fonctions trigonométriques

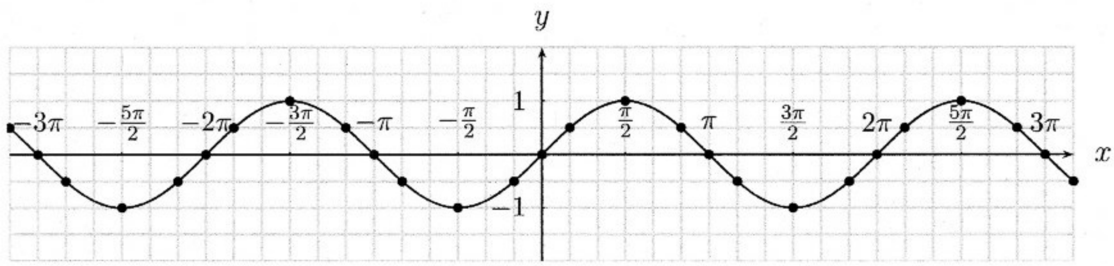
Voici les graphes des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente (la définition de la cotangente se trouve à la page suivante). Grâce aux radians, on obtient des fonctions réelles (car les radians sont sans unités).

### Graphe des fonctions cosinus, sinus et tangente

Voici le graphe de la fonction cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Voici le graphe de la fonction sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

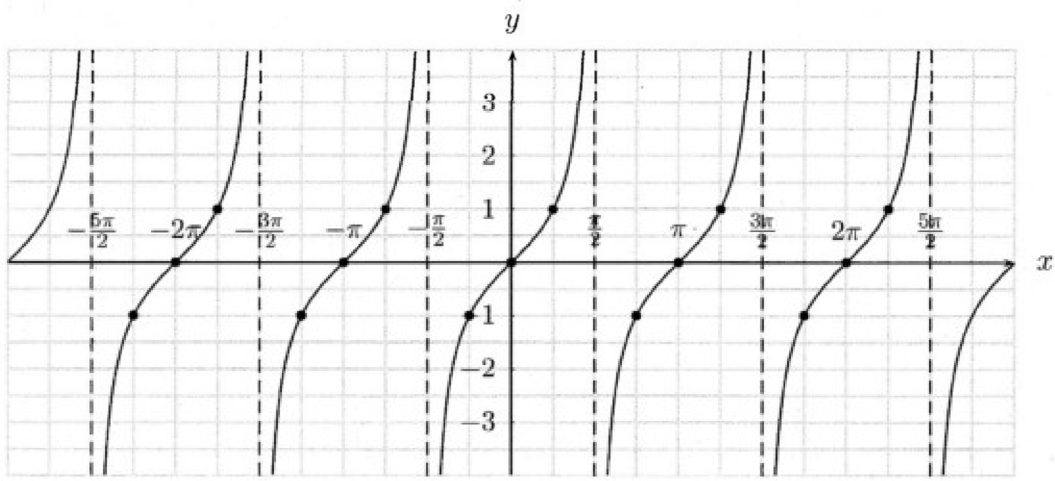


Rappelons que la tangente est définie de la manière suivante.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

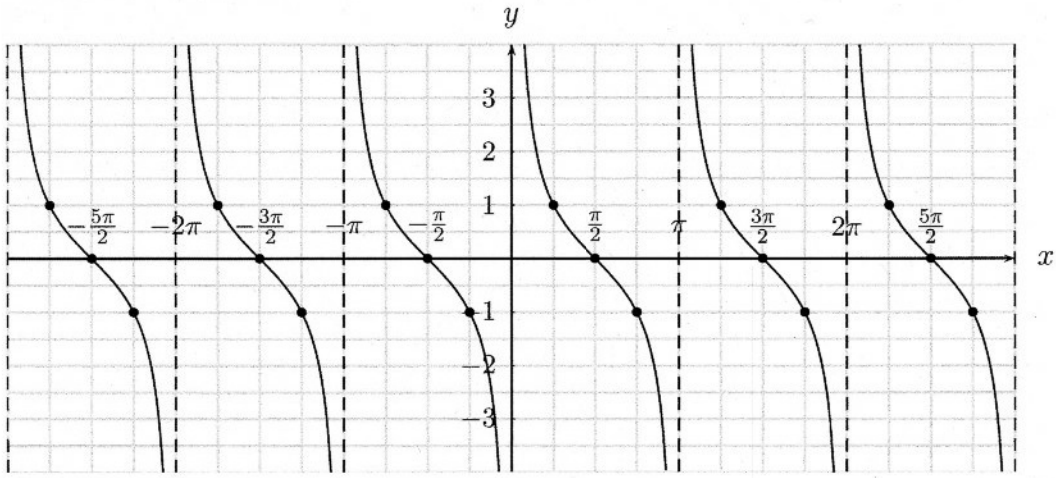
On voit ainsi qu'il y a une division par zéro lorsque le cosinus s'annule, il faut donc enlever au domaine de définition l'ensemble $Z_{\cos} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Voici le graphe de la fonction tan : $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.



**Graphe de la fonction cotangente**

Voici le graphe de la fonction cot : $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.



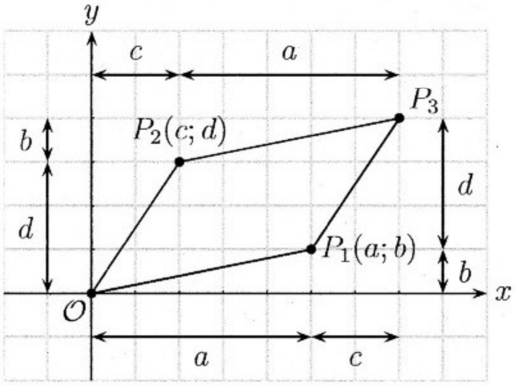

## 6.6 Formules d'additions des angles

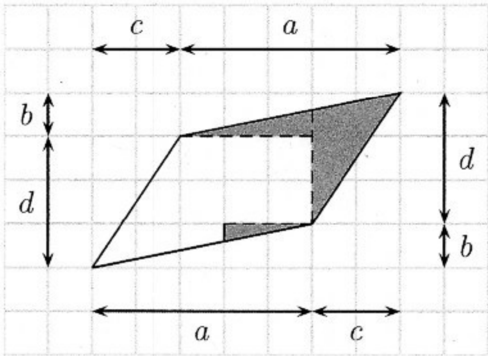
Il existe des formules pour calculer les cosinus et les sinus d'une somme ou d'une différence d'angles. Mais pour démontrer ces formules, on aura besoin d'un résultat sur l'aire du parallélogramme.

Partons d'une illustration.

**Illustration**

Ci-dessous, on voit que les deux points $P_1$ et $P_2$ engendrent un parallélogramme.



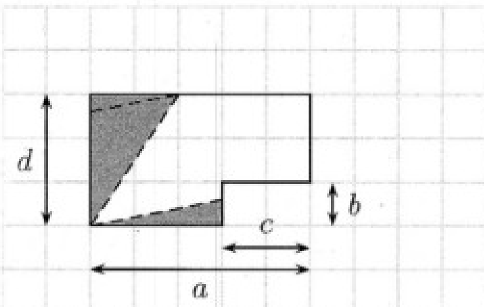




On va trouver l'aire de ce parallélogramme en déplaçant les morceaux ci-dessus le long des côtés du parallélogramme.

Dans cette situation ($a \geqslant c$ et $d \geqslant b$), on voit que l'aire du parallélogramme est égale à l'aire du grand rectangle moins celle du petit, donc

$$A = ad - bc$$

**Attention** Si l'on avait, sur le dessin, échangé les points $P_1$ et $P_2$, ce nombre aurait été négatif. On parle donc d'aire signée !



**Théorème**

Pour tout $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$, on a

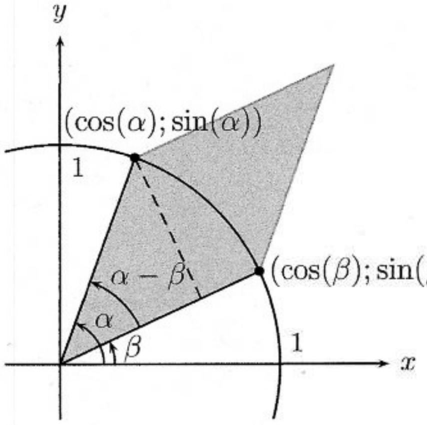
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

**Idée de la preuve**

On va se contenter de montrer ce résultat pour des angles $\alpha$ et $\beta$ satisfaisant

$$0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

On est donc dans la situation suivante.




En contemplant la situation, on voit un parallélogramme apparaître. Calculons son aire de deux manières différentes.

1. L'aire d'un parallélogramme est donnée par la base de ce dernier fois sa hauteur. Dans le dessin ci-dessus, la hauteur est traitillée et de longueur $\sin(\alpha - \beta)$. La base est un rayon du cercle trigonométrique, donc de longueur 1. On a

$$A = \text{base} \cdot \text{hauteur} = 1 \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

2. On utilise la formule de l'illustration (on peut car $\cos(\beta) \geqslant \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha) \geqslant \sin(\beta)$) qui nous donne

$$A = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Ainsi, on vient de montrer que

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$\square$

On utilise cette formule pour trouver les *formules d'addition d'angles* pour les fonctions trigonométriques.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha - \beta)$ | $=$ | $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ | $-$ | $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\sin(\alpha + \beta)$ | $=$ | $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ | $+$ | $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\cos(\alpha + \beta)$ | $=$ | $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ | $-$ | $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ |
| $\cos(\alpha - \beta)$ | $=$ | $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ | $+$ | $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ |

## 6.7 Équations trigonométriques

On a déjà résolu quelques équations trigonométriques en déterminant toutes les caractéristiques des triangles rectangles. Mais cette fois, on aborde le sujet de manière plus générale.

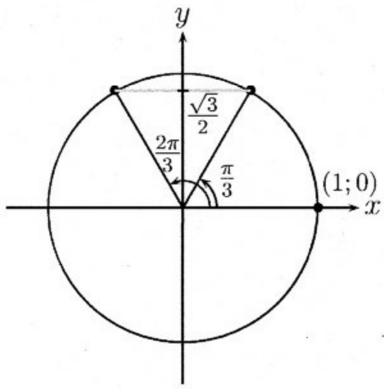
### Définition

Une *équation trigonométrique* en la variable $x$ (par exemple) est une équation dans laquelle apparaît une ou plusieurs fonctions trigonométriques dépendantes de $x$. Lorsqu'on résout une équation trigonométrique, on cherche TOUTES les valeurs de $x$ qui la satisfont.

### Exemple

On cherche à résoudre l'équation trigonométrique suivante.

$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$




On se souvient que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, grâce à la symétrie verticale (page 56), on a aussi

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc l'équivalence suivante.

$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} 5x+3 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \quad\text{ou} \\ 5x+3 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Le nombre entier $k$ symbolise le nombre de tours dans un sens comme dans l'autre que l'on peut faire (rappelons qu'un tour de plus ne modifie ni le cosinus ni le sinus).

Il ne reste plus qu'à soustraire 3 et diviser par 5 pour obtenir $x$. Ces opérations sont réversibles, on a donc l'équivalence suivante.

$$\sin(5x+3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{2\pi k}{5} \\ \quad\text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{15} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{2\pi k}{5} \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ \frac{\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5},\ \frac{2\pi}{15} - \frac{3}{5} + \frac{2\pi k}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$